Variabili Aleatorie

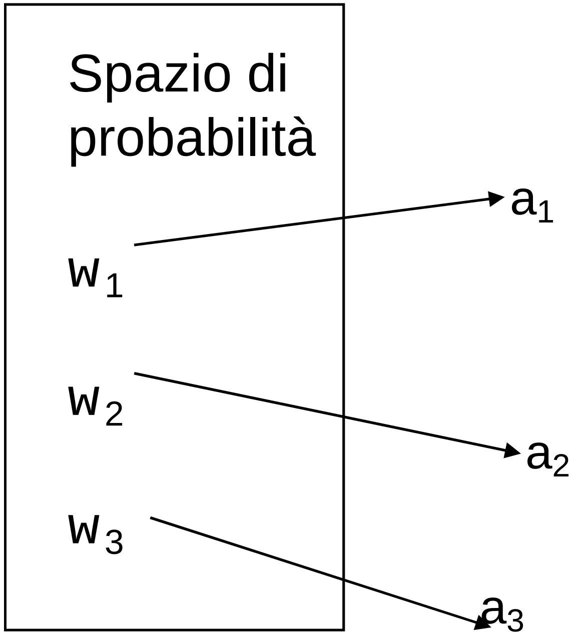
Definizione: Variabile aleatoria

Sia Ω uno spazio campionario. Una variabile aleatoria su Ω è una funzione con dominio Ω e codominio $\mathbb{R}$:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

♣

In altre parole: una variabile casuale X è una funzione che associa ad ogni evento dello spazio campionario Ω uno ed un solo numero reale secondo una funzione di probabilità.



Dunque, una v.a. è una una funzione che permette di assegnare un valore numerico ad ogni risultato dell'esperimento.

Dalla definizione è evidente che dato uno spazio campionario Ω è possibile costruire infinite v.a.

Definizione: Funzione di distribuzione

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *variabile aleatoria.*

Diciamo distribuzione, o ripartizione, di X *la funzione*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \mathrm{P}(X \leq x).$$

Nel seguito indichiamo rispettivamente con $F_X(a^-)$, $F_X(a^+)$ i limiti sinistri e destri di F_X in a.

Proprietà della funzione di distribuzione

La funzione di distribuzione F_X *di una v.a.* X *ha le seguenti proprietà:*

1. F_X *è crescente;*
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1;$
3. F_X *è continua a destra.*
4. *Per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *si ha* $\mathrm{P}(X < a) = F_X(a^-) := \lim_{x \to a^-} F_X(x);$
5. *Per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *si ha* $\mathrm{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-).$

♠

Variabili Aleatorie Discrete

Definizione Variabile discreta

Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *si dice discreta se l'immagine* $\mathrm{Im}(X)$ *di* X *è un insieme finito o numerabile* $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. ♣

Definizione: Densità discreta

Sia Ω *uno spazio campionario,* P *una funzione di probabilità su* Ω *e* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variabile aleatoria discreta. Diciamo* ***densità discreta*** *di* X *la funzione*

$$p_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \mathrm{P}(X = x).$$

♣

Variabili Aleatorie Continue

Definizione   Variabile continua

Una variabile aleatoria X *si dice* **continua** *se esiste* $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *integrabile e tale che*

$$\mathrm{P}(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

per ogni intervallo (aperto o chiuso o misto o illimitato) $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. *La funzione* f_X *si chiama* **densità di** X. ♣

Una v.a. è continua se i valori che essa assume sono contenuti in un intervallo reale. In tale contesto, non è possibile elencare i valori che la v.a. X assume con le rispettive probabilità come nel caso discreto.

Il problema viene superato associando a ciascun punto dell'intervallo in cui è definita X una **funzione matematica**, f(x), che non è la probabilità, ma è proporzionale (a meno di un infinitesimo) alla probabilità di un intervallo <<sufficientemente piccolo>>, detta **funzione di densità**.

$$P_r\left[x_0 \le X \le x_0 + dx\right] = f(x_0)dx$$

f(x) soddisfa le seguenti proprietà

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

2. $\int_{\Re} f(x)dx = 1$

Def. Una v.a. viene detta **continua** se esiste una funzione f(.) t.c.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad \forall x$$

dove F(.) e f(.) sono, rispettivamente, la f.r. e la f.d. della v.a. X.

Si osservi che data una funzione di ripartizione F(x), la funzione di densità è uguale a

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{a_1} f_A(a)da = F_A(a_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_A(a)da = 1$$

Differenza tra probabilità e ddp

Mentre la P di una v.a. discreta in un certo valore a_1 rappresenta la probabilità che essa assume il valore a_1

la ddp di una v.a. continua in un certo valore a_1 NON rappresenta la probabilità che essa assume il valore a_1

Infatti la ddp di una v.a. continua NON è una probabilità ma una densità di probabilità, ovvero solo il suo integrale su un intervallo ha il significato di probabilità

Def. *Momenti semplici di ordine r*.

Se X è una v.a. il momento di ordine r, con r naturale, è definito dalla seguente:

$$E\left[X^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

Nel caso continuo.

$$E\left[X^r\right] = \sum_j x_j^r f(x_j)$$

Nel caso discreto

Si osserva che per r=1 si ottiene il valore atteso (aspettativa) di X.

Def. *Momenti centrali di ordine r*.

Se X è una v.a. il momento centrale di ordine r, con r naturale, è definito dalla seguente:

$$E\left\{\left[X-E(X)\right]^r\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{x-E(X)\right\}^r f(x)dx$$

Nel caso continuo

$$E\left\{\left[X-E(X)\right]^r\right\}=\sum_j\left\{x_j-E(X)\right\}^r f(x_j)$$

Nel caso discreto

Si osserva che per r=2 si ottiene la varianza di X.

Operatori E(.) e Var(.)

Data una v.a. X l'operatore E(.) non è altro che l'**aspettativa** di X.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Se g(.) è una funzione di X allora

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Proprietà

1. $E[C]=C \quad \forall \text{ C costante}$

2. $E[C_1+C_2X]=C_1+C_2E(X) \quad \forall \text{ C}_1,\text{C}_2 \text{ costanti}$

3. $E[C_1g_1(X)+C_2g_2(X)]=C_1E[g_1(X)]+C_2E[g_2(X)]$

$$\forall \ \text{C}_1, C_2 \ \ \text{costanti}$$

$$\forall \ \text{g}_1(.), g_2(.) \ \ \text{funzioni di X}$$

L’operatore Var(.) definisce la varianza della v.a. X

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{x-E(X)\}^2 f(x)dx=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

E’ il momento centrale di ordine 2. Si può scrivere come differenza tra il momento secondo e il momento primo al quadrato, cioè

$$V(X)=E\left[X^2\right]-\left[E(X)\right]^2$$

1. $V(C)=0$ Se C è costante

2. $V[C_1+C_2X]=C_2^2V(X)$ Se C_1 e C_2 sono costanti

Variabile casuale Scarto

Data una v.a. X con momento primo E[X] e V(X) entrambe finite, la seguente trasformazione

$$Y = X - E[X]$$

Definisce la v.a. scarto. E' immediato verificare che:

$$E[Y] = E\left\{X - E[X]\right\} = E[X] - E[X] = 0$$

$$V[Y] = V\left\{X - E[X]\right\} = V[X]$$

Variabile casuale Standardizzata

Data una v.a. X con momento primo E[X] e V(X) entrambe finite, la seguente trasformazione

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{E}[\mathrm{X}]}{\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}}$$

Definisce la v.a. standardizzata. E’ immediato verificare che:

$$E[Z] = E\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E\{X - E[X]\} = 0$$

$$V[Z] = V\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right\} = \frac{1}{V(X)} V\{X - E[X]\} = 1$$

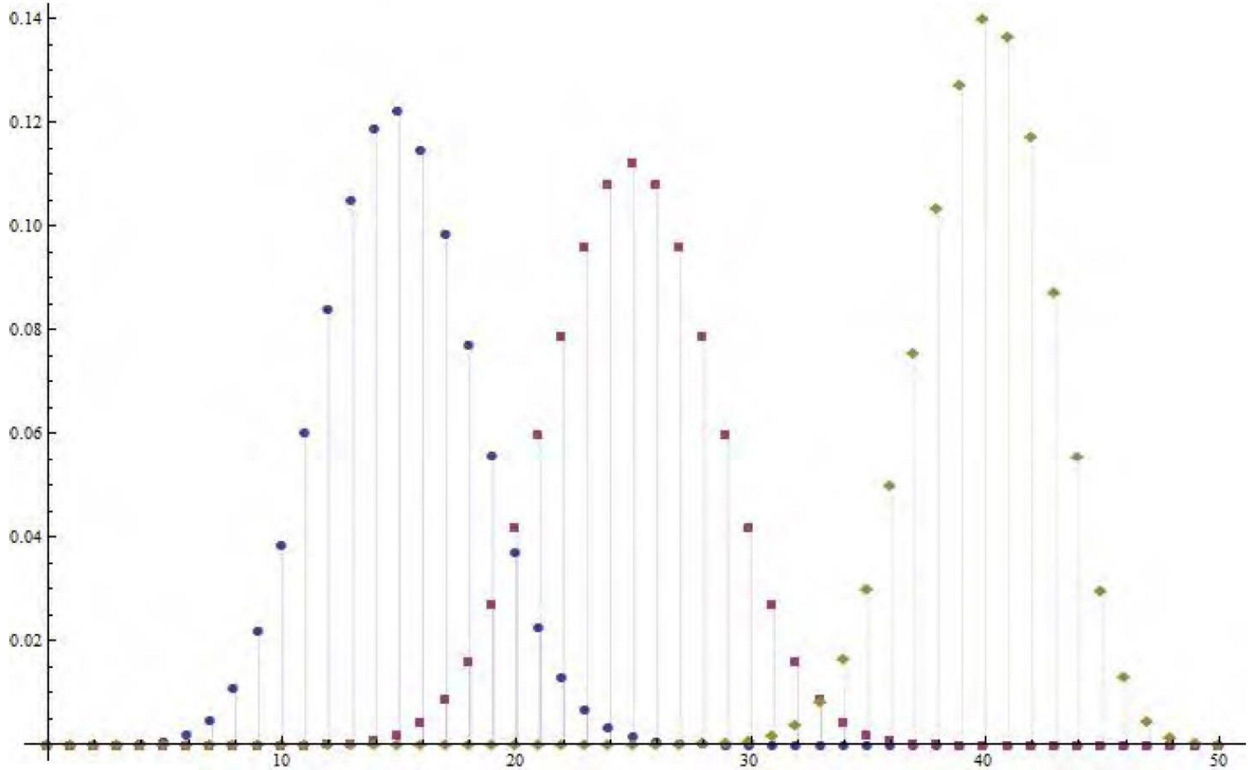
Alcune tra le più note funzioni di probababilità e di densità

Variabile binomiale

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω. Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) se

1. $\operatorname{Im} X = \{0, 1, ..., n\}$;
2. $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k = 0, 1, 2, ..., n.$

Scriveremo $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. ♣



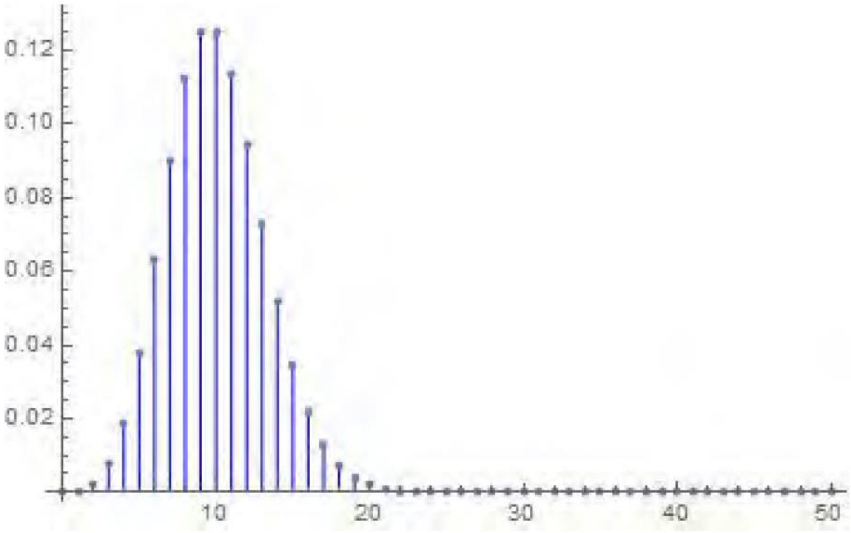
Densità discrete di binomiali di parametri: $(50, 0.3), (50, 0.5), (50, 0.8)$

Variabile di Poisson

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω. Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$ (e si pone $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$) se

1. $\mathrm{Im}\, X = \mathbb{N}$;
2. $p_X(k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

♣



La densità discreta di una Poisson di parametro $\lambda = 10$

Def. *Funzione di densità* ***Gamma***.

Si dice che la v.a. X ha distribuzione Gamma se la f.d.di X è data da:

$$f(x;a,\lambda)=\frac{\lambda}{\Gamma(a)}(\lambda x)^{a-1}e^{-\lambda x}$$

Verrà indicata con G(a,λ).

per $x>0$ con $a>0$ e $\lambda>0$

dove $\Gamma(a)=\int_0^\infty w^{a-1}e^{-w}dw$ è la funzione matematica Gamma

$$E[X]=\frac{a}{\lambda} \qquad V[X]=\frac{a}{\lambda^2}$$

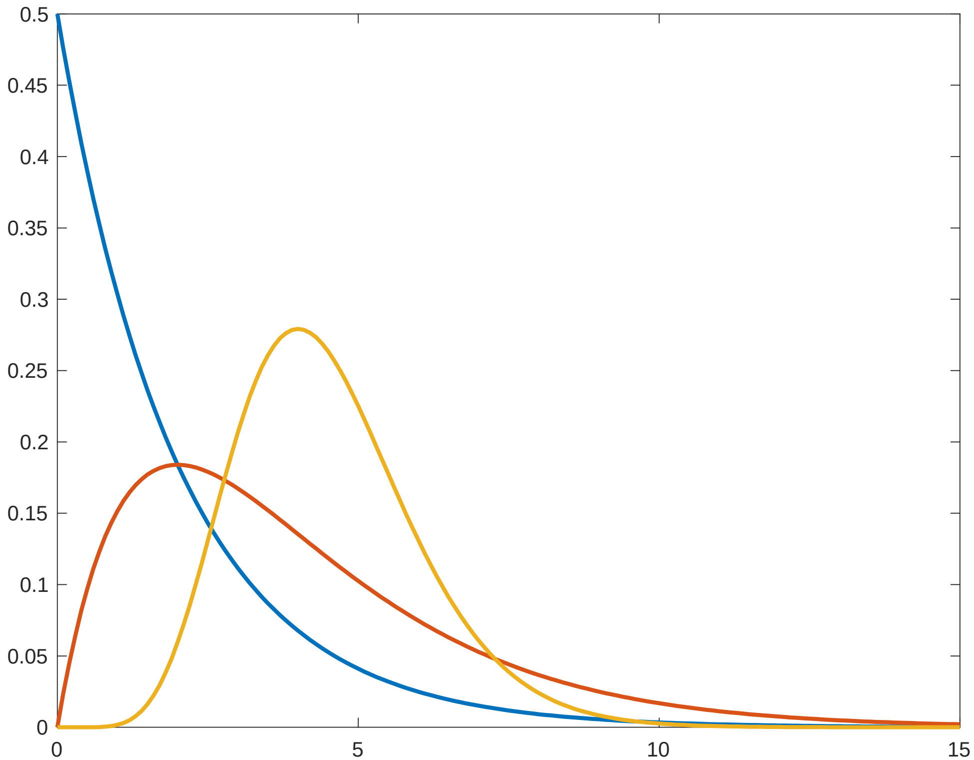
λ>t

$$f(x; a, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(a)} (\lambda x)^{a-1} e^{-\lambda x}$$

$a = 1;\ \lambda = 1/2$

$a = 2;\ \lambda = 1/2$

$a = 9;\ \lambda = 2$



Def. *Funzione di densità* ***Esponenziale*** *(negativa).*

Si dice che la v.a. X ha distribuzione Esponenziale se la f.d.di X è data da:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Verrà indicata con Exp(λ).

per $x > 0$ con $\lambda > 0$

Osservazione: se nella fd Gamma si pone a=1 si ottiene la fd Esponenziale. Cioè Exp(λ)=G(1,λ)

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

λ>t

Variabile normale (o gaussiana) standard

Def. *Funzione di densità* ***Normale***.

Si dice che la v.a. X ha distribuzione Normale se la f.d.di X è data da:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verrà indicata con $N(\mu,\sigma^2)$.

per $x \in \Re$ con $\mu \in \Re$ e $\sigma > 0$

$$E[X]=\mu \qquad V[X]=\sigma^2$$

La fd Normale possiede le seguenti caratteristiche:

1. E' **simmetrica** intorno a μ.

2. E' **unimodale**.

In statistica unimodale è riferito ad una funzione di densità di probabilità che ha un solo punto di massimo

3. Presenta **due flessi**.

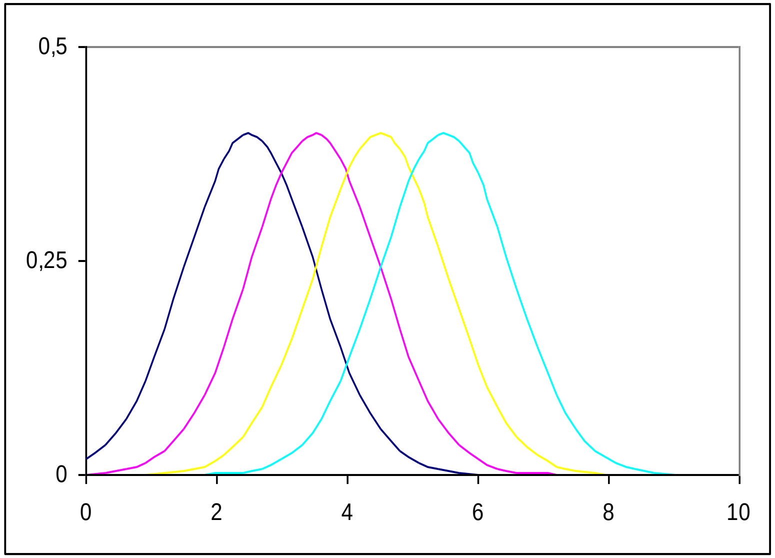
Si manifesta quando la v.a. osservata è il risultato della somma di un numero sufficientemente grande di variabili aleatorie indipendenti (o al limite debolmente indipendenti) che obbediscono a leggi di distribuzioni diverse

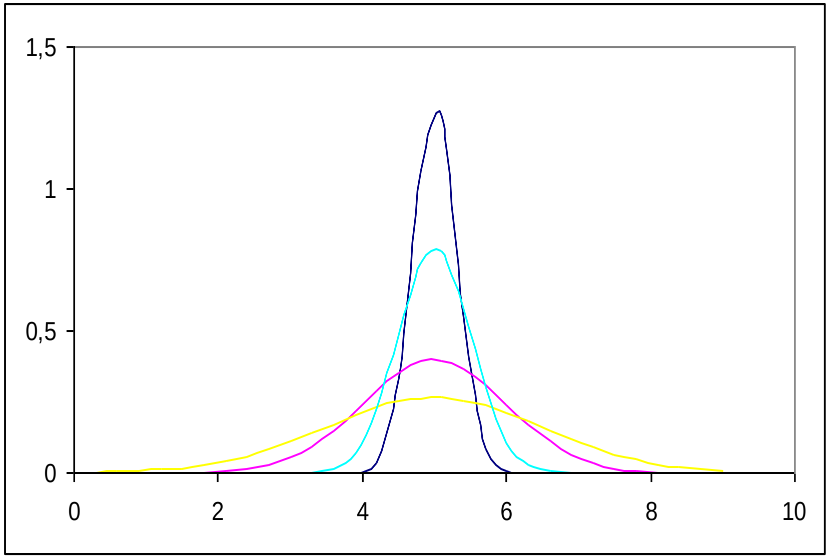
v.a. gaussiana

media= m

SD = σ

$$f_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\boldsymbol{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-m}{\boldsymbol{\sigma}}\right)^2}$$





Media diversa

SD uguale

Media uguale

SD diversa

v.a. gaussiana: intervalli di confidenza

Sono gli intervalli di valori in cui, con una certa probabilità, cadono i valori della v.a

Per una variabile gaussiana, descritta univocamente da media e SD, questi dipendono solo dalla media e dalla SD

$P[m-SD \leq A \leq m+SD] =$

$F_A(m+SD)-F_A(m-SD)=G(1)-G(-1)=$

$0.84-0.16=0.68$

68% dei valori della v.a. sono compresi tra m-SD e m+SD

$P[m-2SD \leq A \leq m+2SD] = 95\%$

95% dei valori della v.a. sono compresi tra m-2SD e m+2SD

$P[m-3SD \leq A \leq m+3SD] = 99.7\%$

Praticamente tutti i valori (ameno del 3 per mille) sono compresi tra m-3SD e m+3SD

STATISTICA DESCRITTIVA: INDICI DI FORMA

Indici di forma

$$\frac{m^{(3)}}{\left[\sqrt{m^{(2)}}\right]^3} = \frac{momento\ centrale\ di\ ordine\ 3}{(deviazione\ standard)^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}$$

indice di assimetria (skewness)

$$\frac{m^{(4)}}{[m^{(2)}]^2} = \frac{momento\ centrale\ di\ ordine\ 4}{(varianza)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4}$$

curtosi

$s = \frac{E(x-\mu)}{\sigma^3}$

where μ is the mear
computes a sample

When you set flag

$s_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=}}\right.}$

When you set flag

$s_0 = \frac{\sqrt{n(n-}}{n-2}$

Nota: i momenti centrali di ordine n ($m^{(n)}$) di una normale valgono:

$$m^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{n dispari} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)\,\sigma^n & \text{n pari} \end{cases}$$

Quindi per una normale:

skewness = 0
curtosi = 3

Nota 1:

$$skewness\ unbiased = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}$$

Nota 2:

The kurtosis of a distribution is defined as

$$k = \frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4},$$

where μ is the mean of x, σ is the standard deviation of x, and $E(t)$ represents the expected value of the quantity t. The `kurtosis` function computes a sample version of this population value.

When you set `flag` to `1`, the kurtosis is biased, and the following equation applies:

$$k_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}.$$

When you set `flag` to `0`, `kurtosis` corrects for the systematic bias, and the following equation applies:

$$k_0 = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\left((n+1)k_1 - 3(n-1)\right) + 3.$$

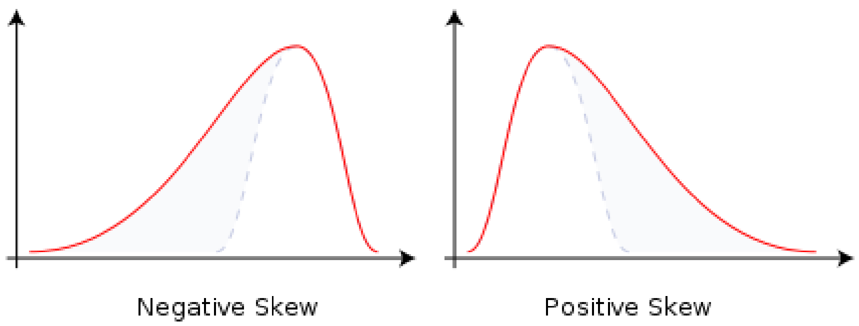
This bias-corrected equation requires that X contain at least four elements.

Se il valore di curtosi è:

> 3 la curva si definisce *leptocurtica*, cioè più "appuntita" di una normale.
< 3 la curva si definisce *platicurtica*, cioè più "piatta" di una normale.
= 3 la curva si definisce *normocurtica*, cioè "piatta" come una normale.

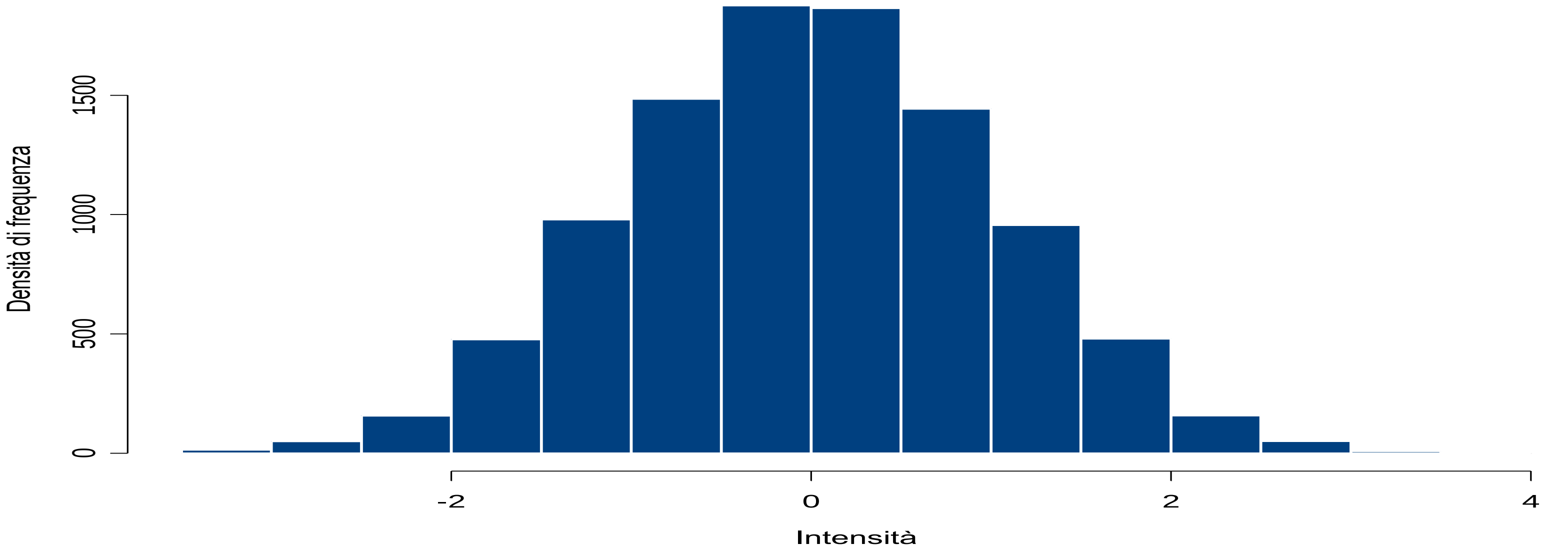
Se il coefficiente di skewness è:

> 0 coda a destra
< 0 coda a sinistra
= 0 simmetrica



SIMMETRIA E ASIMMETRIA

Distribuzione simmetrica

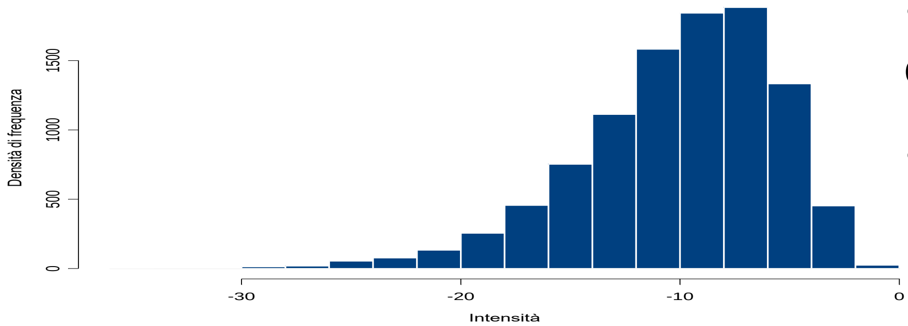


Proprietà:

1) *media aritmetica = mediana = moda*
2) *media aritmetica = mediana = moda (per distribuzioni unimodali*
3) *Q1 e Q3 sono equidistanti dalla mediana*

Distribuzioni asimmetriche

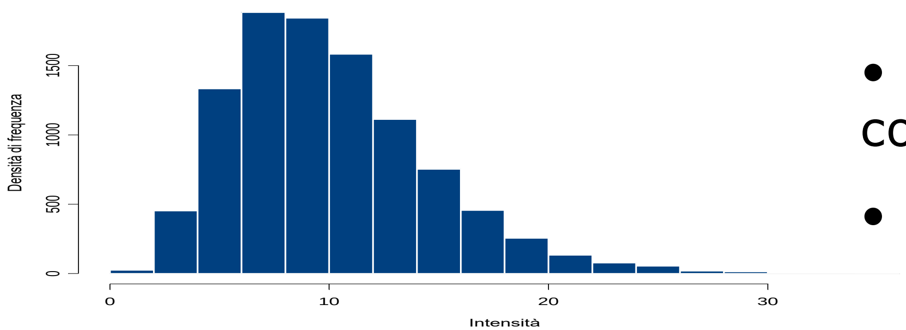
Asimmetria positiva



- Le intensità si attardano sulla coda di destra della distribuzione
- Per distribuzioni unimo-dali:

$\boxed{media\ aritmetica < mediana < moda}$

Asimmetria negativa



- Le intensità si attardano sulla coda di sinistra della distribuzione
- Per distribuzioni unimo-dali:

$\boxed{media\ aritmetica > mediana > moda}$

Esempio:

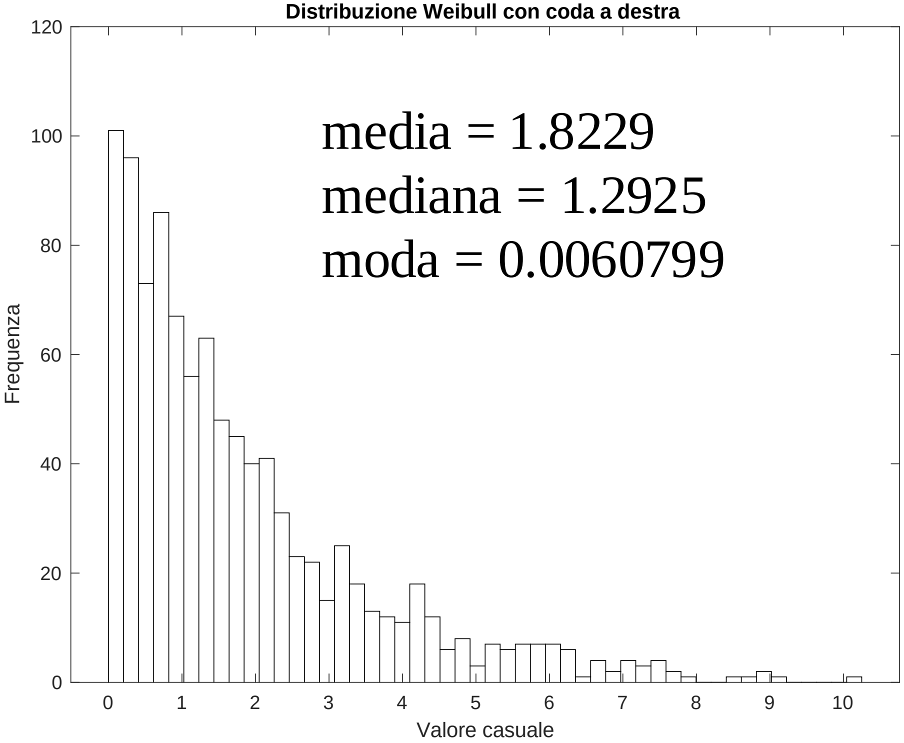
```
% Parametri della distribuzione Weibull
shape_parameter = 1; % Parametro di forma (deve essere maggiore di 0)
scale_parameter = 2; % Parametro di scala (deve essere maggiore di 0)

% Numero di campioni da generare
num_campioni = 1000;

% Genera una variabile casuale con distribuzione Weibull
variabile_aleatoria = wblrnd(scale_parameter, shape_parameter, 1, num_campioni);

% Disegna un istogramma per visualizzare la distribuzione
histogram(variabile_aleatoria, 50); % Cambia il numero di barre come desideri
xlabel('Valore casuale');
ylabel('Frequenza');
title('Distribuzione Weibull con coda a destra');

disp(['media = ',[num2str(mean(variabile_aleatoria))]])
disp(['mediana = ',[num2str(median(variabile_aleatoria))]])
disp(['moda = ',[num2str(mode(variabile_aleatoria))]])
```



Variabili aleatorie vettoriali

Il concetto di v.a. si può estendere al caso di due (o più) dimensioni, sia per v.a. discrete che continue, se ad ogni evento elementare associamo due o più funzioni.

Funzioni di densità (o di probabilità) congiunte.

Nel caso in cui su uno stesso spazio campionario Ω si definiscono più funzioni allora si è in presenza di v.a. multiple.

Dato uno spazio campionario Ω, riferito ad un dato esperimento, supponiamo di costruire:

- una prima regola, X, che associa ad ogni elemento di Ω un numero reale, x;

- una seconda regola, Y, che associa ad ogni evento di Ω un numero reale, y;

successivamente, calcoliamo le probabilità del contemporaneo verificarsi delle coppie (x,y).

$$X:\Omega \to \Re \qquad e \mapsto X(e)$$

$$Y:\Omega \to \Re \qquad e \mapsto Y(e)$$

$$P_r\left\{X = x, Y = y\right\}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_r	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1r}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2r}	$p_{2\bullet}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{ir}	$p_{i\bullet}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_s	p_{s1}	p_{s2}	$\cdots$	p_{sj}	$\cdots$	p_{sr}	$p_{s\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	$p_{\bullet r}$	1

dove

$$p_{ij} = P_r\{X = x_i ; Y = y_j\}$$

È la probabilità del contemporaneo verificarsi della coppia di modalità (x_i,y_j).

Inoltre,

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \qquad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij}$$

Sono le probabilità marginali, rispettivamente, di X e di Y.

Def. Si chiama **funzione di probabilità congiunta** delle v.a. discrete X ed Y la funzione

$$f(x,y) = P_r\{X = x, Y = y\}$$

Che soddisfa le seguenti proprietà

$$1)\quad \mathrm{f(x,y)} \geq 0 \qquad \forall\, \mathrm{(x,y)}$$

$$2)\quad \sum_{\mathrm{x}} \sum_{\mathrm{y}} \mathrm{f(x,y)} = 1$$

Da f(x,y) è possibile determinare le f. di p. **marginali** di X e di Y, cioè

$$f(x) = \sum_{y} f(x, y) \qquad f(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

E quelle **condizionate**

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \qquad f(y) > 0$$

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \qquad f(x) > 0$$

Def. Si chiama **funzione di densità congiunta** delle v.a. continue X ed Y la funzione

$$f(x, y)$$

avente le seguenti proprietà

$$1)\quad f(x, y) \geq 0 \qquad \forall\, (x, y)$$

$$2)\quad \int_x \int_y f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Condizione di indipendenza

Def. Due v.a. X ed Y sono **indipendenti** se e solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta

$$1) \quad f(x,y) = f(x)\,f(y) \qquad \forall (\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

$$2) \quad f(x/y) = f(x) \quad \forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

$$3) \quad f(y/x) = f(y) \quad \forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Media di v.a. indipendenti

Teorema *Se due v.a. X e Y sono indipendenti, il valor medio del prodotto è uguale al prodotto dei valori medi, cioè*

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

Per essere precisi a livello rigorso, bisogna assumere che X e Y abbiano valor medio finito. In tal caso, si trova dalla dimostrazione stessa che la v.a. XY ha anch'essa valor medio finito.

Covarianza

Date due v.a. X, Y, si chiama *covarianza* tra X ed Y il numero

$$Cov(X, Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]$$

dove μ_X e μ_Y sono le medie di X ed Y. Naturalmente la definizione ha senso se il valor medio è finito, cosa che accade ad esempio se si suppone che sia $E\left[X^2\right] < \infty$ e $E\left[Y^2\right] < \infty$.

La definizione è quindi analoga, algebricamente, a quella di varianza, e risulta infatti

$$Var[X] = Cov(X, X)$$

e

$$Cov(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

come per la varianza. Però il numero $Cov(X,Y)$ può avere segno qualsiasi. Ad esempio, se $\mu_X = 0$ e prendiamo $Y = -X$, vale $Cov(X,Y) = -E\left[X^2\right]$.

Teorema *Se X ed Y sono v.a. indipendenti, o almeno scorrelate, allora*

$$Cov(X,Y) = 0, \quad \rho(X,Y) = 0.$$

Viceversa, se $Cov(X,Y) = 0$, non è detto che X ed Y siano indipendenti. Se però (X,Y) è gaussiano e $Cov(X,Y) = 0$, allora X e Y sono indipendenti.

Dimostrare che:

$$Cov(X, \alpha Y + \beta Z + \gamma) = \alpha Cov(X,Y) + \beta Cov(X,Z)$$

Momenti misti di ordine k+m

Def. Siano X ed Y due v.a. con fd (o fp) congiunta f(x,y), è chiamato momento misto di ordine k+m la quantità:

$$\mu_{k,m} = E\left[X^k Y^m\right] = \iint_{\Re\times\Re} x^k y^m f(x,y)\,dx\,dy$$

nel caso continuo.

$$\mu_{k,m} = E\left[X^k Y^m\right] = \sum_x \sum_y x^k y^m f(x,y)$$

nel caso discreto.

Analogamente, i momenti misti della v.a. scarto sono

$$\overline{\mu}_{k,m} = E\left\{\left[X - E(X)\right]^k \left[Y - E(Y)\right]^m\right\} =$$

$$= \iint_{\Re\times\Re} (x-\mu_{10})^k (y-\mu_{01})^m f(x,y)dxdy$$

nel caso continuo.

$$\overline{\mu}_{k,m} = E\left\{\left[X - E(X)\right]^k \left[Y - E(Y)\right]^m\right\} =$$

$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_{10})^k (y-\mu_{01})^m f(x,y)$$

nel caso discreto.

Normale Bi-dimensionale.

Def. Si dice che la v.a. (X,Y) ha distribuzione Normale Bidimensionale se presenta la seguente fd congiunta

$$f(x,y;\mu_x,\mu_y,\sigma_x,\sigma_y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

con

$$\mu_x\in\Re,\ \mu_y\in\Re,\ \sigma_x>0,\ \sigma_y>0\ \text{ e }\ \rho\in[-1,1]$$

Caratteristica importante di tale distribuzione è la seguente:

Se X ed Y sono v.a. indipendenti,

Dimostrazione. Se r=0 la fd congiunta si riduce a

$$f(x,y;\mu_x,\mu_y,\sigma_x,\sigma_y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

Quest'ultima coincide con la fattorizzazione delle fd marginali di X e di Y

$$f(x,\mu_x,\sigma_x)\times f(y;\mu_y,\sigma_y)$$

Si dimostra che data una v.a. normale bivariata (X,Y), le fd **marginali** sono ancora normali, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)dy = f(x; \mu_x, \sigma_x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)dx = f(y; \mu_y, \sigma_y)$$

Nello stesso contesto, anche le distribuzioni condizionate di X dato che Y=y e di Y dato che X=x sono normali con parametri, rispettivamente, dati da

$$E[X / Y = y] = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y)$$

$$V[X / Y = y] = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

e

$$E[Y / X = x] = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

$$V[Y / X = x] = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

In altri termini, abbiamo

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \Rightarrow X/Y = y \sim N\left(\mu_x + \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y),\ \sigma_x^2(1-\rho^2)\right)$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Rightarrow Y/X = x \sim N\left(\mu_y + \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x),\ \sigma_y^2(1-\rho^2)\right)$$

Teorema Limite Centrale

Siano X_1, X_2,…,X_n,… una successione di v.a. **indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)iid** con valore atteso μ e varianza σ^2 finite, la v.a.

$$Z_n = \frac{S_n - E\left[S_n\right]}{\sqrt{V\left[S_n\right]}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

dove $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

al divergere di n, converge in distribuzione alla v.a. N(0,1), cioè

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left\{Z_n \leq z_0\right\} = \Phi(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$