Def $\quad A$ superiorm. limitato

$r = \sup A \iff$ 1) $r \notin A$

$s = \inf A$

2) $r \geq a \quad \forall a \in A$ $\qquad s \leq a \quad \forall a$

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A$ tale che

$r - \varepsilon < \bar{a}$

$s + \varepsilon > \bar{a}$

$r = \max A \iff$ 1) $r \in A$

$s = \min A$

2) $r \geq a \quad \forall a \in A$ $\qquad s \leq a \quad \forall a$

(3) è ovviamente verificata perché

r è un elemento di A, quindi OGNI MAGGIORANTE di A è MAGGIORE o UGUALE a r.

$$\boxed{\text{\underline{Teorema} L'insieme } \mathbb{Q} \text{ (dei numeri razionali) NON È COMPLETO}}$$

per dimostrare questa affermazione è sufficiente trovare almeno 1 esempio di un sottoinsieme A di $\mathbb{Q}$ SUPERIORM. LIMITATO e tale che non esista il $\sup A \in \mathbb{Q}$.

$A = \{ a \in \mathbb{Q},\ a > 0$ e tale che

$$a \cdot a = a^2 \leq 2 \} \subseteq \mathbb{Q}$$

$a = 1 \in A$ $\qquad a = \frac{1}{3} \in A$

$a = \frac{4}{3}$ $\qquad a \cdot a = \frac{16}{9} \leq 2$ $\qquad \frac{4}{3} \in A$

$r = 3 > 0$ $\qquad r \cdot r = 9 > 2$

$$r^2 = 9 > 2 \geq a^2 \qquad \forall a \in A$$

$$\boxed{3^2 > a^2 \quad \forall a \in A} \Longrightarrow$$

$3^2 > a^2 \quad \forall a \in A$

$\Downarrow$

(sicuramente allora $3 > a \quad \forall a \in A$

(N.B $a > 0$!)

SE NON FOSSE VERO $\exists a \in A \ a > 0$ $3 \leq a$ molt per a

$3 \cdot a \leq \underbrace{a \cdot a}$

molt per 3

$3 \cdot 3 \leq \underbrace{a \cdot 3}$

$\underline{\underline{9}} = 3 \cdot 3 = 3^2 \leq 3a \leq a^2 \leq 2$

$9 \leq 2$ No!

A è superiormente limitato perché ha almeno un maggiorante (anzi sono MAGGIORANTI di A tutti i numeri razionali $r \in \mathbb{Q}$ tali che $r > 0$ e $r^2 > 2$)

$$r^2 > 2 \geq a^2 \quad \forall a \in A \implies r \geq a \quad \forall a \in A$$

Se ci fosse un minimo dei maggioranti di A dovrebbe essere un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ $r > 0$ tale che $\boxed{r \cdot r = r^2 = 2}$

$\nexists$

NON ESISTE

se esistesse $r = \frac{M}{N}$ $M, N \in \mathbb{N}$ $N \neq 0$ $\frac{M^2}{N^2} = 2$

$$\frac{\cancel{N^2} \, M^2}{\cancel{N^2}} = 2N^2 \qquad M, N \in \mathbb{N} \quad N \neq 0$$

$$\underline{M^2} = 2\underline{N^2}$$

M^2 è PARI $\Rightarrow$ M È PARI $\Rightarrow$

$$M = 2 \cdot R \qquad R \in \mathbb{N}$$

$$M^2 = 4R^2$$

$$\overset{2}{\cancel{4}} R^2 = \cancel{2} N^2$$

$$\boxed{2R^2 = N^2}$$

(N è PARI)

$$N = 2^k T \qquad T \in \mathbb{N}$$

$k \geq 1$

T DISPARI

$$2 \cdot 2^{2h} S^2 = 2^{2k} T^2$$

$$R = 2^h S \qquad S \in \mathbb{N}$$

$h \geq 0$

S DISPARI

$$\boxed{2\cdot 2^{2h}}\,\underline{\underline{S}}^2 = 2^{2k}\,\underline{\underline{T}}^2$$

S DISPARI

T DISPARI

$$2^{1+2h} S^2 = 2^{2k} T^2$$

$$\boxed{1+2h = \underline{2k}}$$ IMPOSS.

PROPR. POTENZE

$a \in \mathbb{Q}$ $\quad a \neq 0$

$$a^0 = 1 \qquad (0^0 \text{ NON ESISTE})$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$A \subseteq \mathbb{Q}$ $\qquad A = \{ a > 0 \quad a \in \mathbb{Q} \quad a^2 \leq 2 \}$

non esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $\underbrace{r = \sup A}$

"aggiungo a $\mathbb{Q}$" l'oggetto $\sqrt{2}$ cioè quel numero che moltiplicato per se stesso dà 2.

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \text{ tale che } r \text{ si scrive come } \;\middle|\; r = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,\ \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\substack{\| \\ 2}}{(1+1)^1},\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27},\ \ldots \right.$$

$(n = 1)$ $\qquad$ $(n=2)$ $\qquad$ $n = 3$

Si può mostrare che questo insieme

è LIMITATO

in particolare

$$\underset{\text{MINORANTE}}{\underline{\underline{2}}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \overset{\text{MAGGIORANTE}}{\underline{\underline{3}}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$n \neq 0$

$2 = \min A$

NON ESISTE IL MINIMO DEI MAGGIORANTI in $\mathbb{Q}$

Definisco un numero NON RAZIONALE che ha il minimo dei maggioranti di A, $\sup A$

$$\sup A = \sup \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} \ n \neq 0 \right\}$$

$$= e \quad \text{(NUMERO di NEPERO)}$$

(è un elemento che sta tra 2 e 3

$e \simeq 2,78 \ldots$

Definisco l'insieme $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ (NUMERI REALI)

come il completamento di $\mathbb{Q}$

"(aggiungo tutti gli estremi superiori e inferiori che mancano a $\mathbb{Q}$)"

$\boxed{\text{Modello di } \mathbb{R}}$: insieme di <u>tutti</u> i possibili ALLINEAMENTI DECIMALI, finiti, infiniti periodici o infiniti <u>NON</u> periodici

$e = 2,781\ldots\ldots$

$\pi = 3,14\ldots\ldots$

$\sqrt{2}_{R} = 1,4142\ldots$

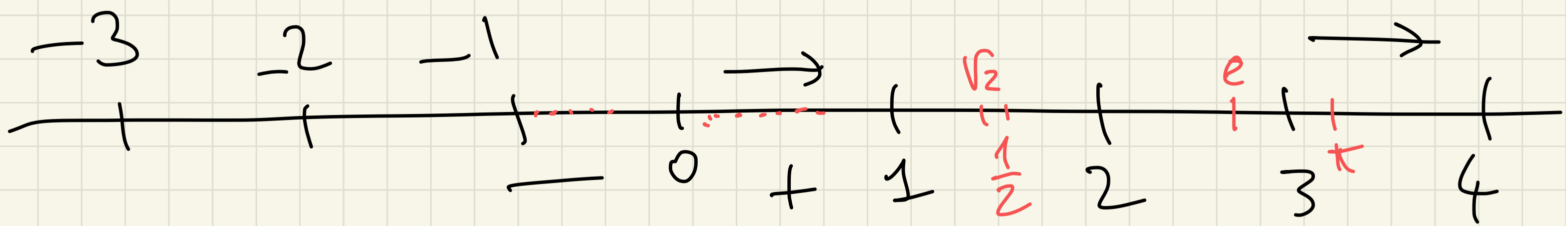
$\mathbb{R}$ è L'INSIEME NUMERICO che contiene $\mathbb{Q}$, a cui $\cdot$ e $+$, $\cdot$ compatibili con ORDINE TOTALE e che è COMPLETO

su $\mathbb{R}$ eredito le operazioni di SOMMA e prodotto con tutte le loro proprietà e le RELAZIONE D'ORDINE $(\leq, \geq)$.. (TOTALE) un altro modo di rappresentare $\mathbb{R}$ è

il MODELLO GEOMETRICO

↓

identifico i numeri reali con i punti di una retta ORIENTATA



definisco la funzione VALORE

ASSOLUTO o "MODULO di un

numero reale in questo modo.

$x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{|x|}_{\text{"prendo il numero e gli tolgo il segno"}} = \text{valore assoluto di } \mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|-3| =$

$= -(-3)$

$= +3$

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = 0 \iff x = 0$

$a, b \in \mathbb{R}$

distanza tra a e b = $|a-b|$