$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ = num. razionali = $\left\{ \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0 \end{array} \right\}$

attenzione IDENTIFICO le frazioni

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \qquad \begin{array}{l} m, r \in \mathbb{Z} \\ n, s \in \mathbb{N} \quad n, s \neq 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$m \cdot s = r \cdot n$$

un altro modello di $\mathbb{Q}$ (un altro modo per rappresentare $\mathbb{Q}$) è il modello

ALLINEAMENTI DECIMALI FINITI o PERIODICI all. decimale finito (numero finito di cifre dopo la virgola)

$\underline{z}, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$

$z \in \mathbb{Z}$ $\quad a_1, a_2, \dots \quad a_n \in \{0, 1, 2 \dots, 9\}$

$$-3,5732 = \frac{-35732}{10000}$$

all. decimale periodico (ho infinite cifre dopo la virgola che da un certo punto in poi si ripetono sempre uguali)

$0,66666$

$$+5,371717171\dots = 5,3\overline{71} \qquad = 0,\overline{6}$$

all'interno numeri razionali ho somma, prodotto e relazione d'ordine

(COMPATIBILI tra loro)

$a, b \in \mathbb{Q}$ $\quad a \leq b$

se $\boxed{c \in \mathbb{Q} \quad c > 0 \quad a \cdot c \leq b \cdot c}$

se $d \in \mathbb{Q}$ $\quad a + d \leq b + d$

osservazione se $c < 0$ $\quad a \geq b$

$$\Downarrow$$

$$ac \leq b \cdot c$$

ESTREMO SUPERIORE e INFERIORE

X insieme numerico (dove sia definita la solita rel. d'ordine)

$$\boxed{A \subseteq X \quad A \text{ sottoinsieme di } X}$$

(es: $X = \mathbb{N}$, $A = \{$insieme di numeri pari$\}$)

Def Si dice che $r \in X$ è UN MAGGIORANTE di A se $r \geq a$ $\forall a \in A$

Se esiste almeno UN MAGGIORANTE di A, allora A si dice <u>SUPERIORMENTE LIMITATO</u>

Se non esiste nessun maggiorante di A allora A è ILLIMITATO SUPERIORMENTE

es. $X = \mathbb{N}$ $\quad A = \{\text{numeri pari}\}$

$\downarrow$ A è illimitato superiormente

$B = \{1, \underline{18}, 3, 5\} \subseteq \mathbb{N}$

B è sup. limitato ($r = 19, 20, 21 \ldots$ sono tutti maggioranti di B.

anche $r = 18$ è maggiorante

oss. se r è MAGGIORANTE di A $\Rightarrow r + n$ è MAGG. di A $\forall n \in \mathbb{N}$.

Def $r \in X$ è **MINORANTE** di A se
$r \leq a \quad \forall a \in A$

se esiste almeno un minorante, A è detto INFERIORMENTE LIMITATO,
se non esiste minorante, A è detto ILLIMITATO inferiormente

Def A si dice INSIEME LIMITATO se ha sia un maggiorante che un minorante.

Es $\underline{\underline{X = \mathbb{Q}}}$

A = sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ costituito dalle frazioni che scrivo come rapporto tra un numero naturale e il suo precedente =

$\cap$

$\mathbb{Q}$

$$\stackrel{!}{=} \left\{ \frac{n+1}{n} \;,\; n \in \mathbb{N} \;\; n \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\underset{2}{\shortparallel}}{\frac{2}{1}}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

- tutti gli elementi di A sono POSITIVI

$\Rightarrow$ 0 è MINORANTE di A

$\forall a \in A \quad a \geq 0 \quad (a > 0)$

$$\frac{n+1}{n} > 0$$

- $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$

$0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$

$n \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \leq 1$

$\forall n \neq 0$

$\boxed{0 < a \leq b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}}$ $a, b \in \mathbb{Q}$

$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{a \cdot b} \geq 0$

$a \cdot b > 0$

$b - a \geq 0$

$a \le b$

$0 = a - a \le b - a \Rightarrow 0 \le b - a$

dato che $\frac{1}{n} \le 1$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 1 + 1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0.$$

2 è un maggiorante di A

A è LIMITATO.

OSS 2 è un maggiorante di A ed è anche un elemento di A

↓

2 è IL PIÙ PICCOLO POSSIBILE tra tutti i maggioranti di A

(tutti i numeri maggiori di 2 sono maggioranti di A, però un numero MINORE di 2 NON PUÒ essere MAGGIORANTE di A, perché un maggiorante di A soddisfa $r \geq a \quad \forall a \in A$ $\Rightarrow$ anche con $a = 2$

$r \geq 2$ ...

Ogni volta che trovo un maggiorante di un insieme A che è un elemento di A allora quello è il MINIMO dei MAGGIORANTI, è unico, e si chiama

MASSIMO dell'INSIEME

2 è il massimo di $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Analogamente se trovo un minorante di un insieme A che è esso stesso un elemento dell'insieme A, allora quello è il PIÙ GRANDE POSSIBILE dei minoranti e si chiama **MINIMO dell'insieme**

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \ , \ \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 0} \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0$$

1 è anche minorante di A, ma 1 NON È UN ELEMENTO di A perché

$$1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \frac{1}{n} = 0 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

tutti i numeri più piccoli di 1 sono ovviamente minoranti di A

ma mi chiedo: c'è un NUMERO più grande di 1 che sia ancora MINORANTE di A?

esiste $c > 0$ $(c \in \mathbb{Q})$ tale che

$1 + c$ è MINORANTE di A?

cioè tale che $1 + c \leq 1 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$?

Devo trovare $\underline{c > 0}$ tale che

PER OGNI

$$-1 \quad \cancel{1} + c \leq \cancel{1} + \frac{1}{n} - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 < c \leq \frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c} \geq n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0$$

NON ESISTE TALE c

Abbiamo mostrato che non ci sono MINORANTI di A più grandi di 1

1 è IL PIÙ GRANDE dei MINORANTI di A, ma NON appartiene ad A (quindi non è il MINIMO)

1 si chiama ESTREMO INFERIORE di A.

Def Il più grande dei MINORANTI di un insieme A si chiama (SE ESISTE)

min A: MINIMO se è un elemento di A

inf A: ESTREMO INFERIORE se non è un elemento di A

es. 1 è estremo inferiore di A

$1 = \inf A$

Def. il più piccolo dei maggioranti di A si chiama (SE ESISTE)

max A : MASSIMO se è un elemento di A

sup A : ESTREMO SUPERIORE se non è un elemento di A

---

es. $2 = \max A$

Riscrivo le def. come caratterizzazioni matematiche

$r = \max A$ — 1) $r \in A$; 2, 3 UGUALI

$r = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ 1) $r \notin A$

(r è l'estremo superiore di A)

2) $r \geq a \quad \forall a \in A$

(r è MAGGIORANTE di A)

3) per dire che r è il più piccolo devo dire che se prendo numero più piccolo di r NON è maggiorante

r è il più piccolo dei MAGGIORANTI di A

$\forall c > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale che $r - c < \bar{a}$

$s = \inf A \iff$ 1) $s \notin A$

2) $s \leq a \quad \forall a \in A$

3) $\forall c > 0$ esiste $\overline{a} \in A$

$s + c > \overline{a}$.

$s = \min A \iff$ 1) $s \in A$

2) $s \leq a \ \forall a \in A$

3) uguale.

Def Un insieme numerico X si dice COMPLETO se

$\forall A \subseteq X$ ogni sottoinsieme di X che sia SUPERIORM. LIMITATO (tale che esista almeno un maggiorante) AMMETTE ESTREMO SUPERIORE o MASSIMO.

(se riesco sempre a trovare il più piccolo dei maggioranti).