

\mathbb{N} , \mathbb{Z}

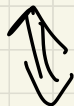
$$\mathbb{Q} = \text{num. razionali} = \left\{ \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \end{array} \right\}$$

attenzione IDENTIFICO le frazioni

$$\frac{Am}{n} = \frac{\cancel{r}}{\cancel{s}}$$

$$m, r \in \mathbb{Z}$$

$$n, s \in \mathbb{N} \quad n, s \neq 0$$



$$m \cdot s = r \cdot n$$

un altro modello di \mathbb{Q} (un altro modo per rappresentare \mathbb{Q}) è il modello

ALLINEAMENTI DECIMALI FINITI o PERIODICI

all. decimale finito (numero finito di cifre dopo la virgola)

$$\underline{z}, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

$$z \in \mathbb{Z} \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\underline{-3}, 5732 = \frac{-35732}{10000}$$

all. decimale periodico (da infinite cifre dopo la virgola che da un certo punto in poi si ripetono sempre uguali)

$$+5, 3717171\dots = 5,3 \overline{71}$$

$$0,66666\dots = 0,\overline{6}$$

all'interno numeri razionali ho somma,
prodotto e relazione d'ordine
(COMPATIBILI tra loro)

$$a, b \in \mathbb{Q}$$

$$a \leq b$$

$$\text{se } \left[\begin{array}{l} c \in \mathbb{Q} \\ c > 0 \end{array} \right] \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

$$\text{se } d \in \mathbb{Q} \quad a + d \leq b + d$$

osservazione se $c < 0$

$$\begin{array}{l} a \geq b \\ \Downarrow \\ ac \leq b \cdot c \end{array}$$

ESTREMO SUPERIORE e INFERIORE

X insieme numerico (dove sia definite le ops rel. d'ordine)

$A \subseteq X$ A sottoinsieme di X

(es: $X = \mathbb{N}$, $A = \{ \text{insieme di numeri pari} \}$)

Def Si dice che $r \in X$ è un **MAGGIORANTE** di A se $r \geq a \quad \forall a \in A$

Se esiste almeno un **MAGGIORANTE** di A , allora A si dice SUPERIORMENTE LIMITATO

Se non esiste nessun maggiorante di A
allora A è **ILLIMITATO SUPERIORMENTE**

es. $X = \mathbb{N}$ $A = \{ \text{numeri pari} \}$
↓
 A è illimitato superiormente

$$B = \{ 1, \underline{18}, 3, 5 \} \subseteq \mathbb{N}$$

B è sup. limitato ($r = 19, 20, 21, \dots$)

oss. se r è MAGGIORANTE
di $A \Rightarrow r + m$ è MAGG.
di $A \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

sono tutti maggioranti
di B .

ovvero $r = 18$ è maggiorante

Def $r \in X$ è MINORANTE di A se

$$r \leq a \quad \forall a \in A$$

se esiste almeno un minorante, A è detto
INFERIORMENTE LIMITATO,

se non esiste un minorante, A è detto ILLIMITATO
inferiormente

Def A si dice INSIEME LIMITATO se ha
sia un maggiorante che un minorante.

$$\text{Es } \underline{\underline{X = \mathbb{Q}}}$$

$A =$ sottoinsieme di \mathbb{Q} costituito dalle

\nearrow frazioni che scrivo come rapporto

\mathbb{Q} tra un numero naturale e il suo
precedente =

$$= \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \ n \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

$\frac{2}{1} = 2$

• tutti gli elementi di A sono POSITIVI:

$\Rightarrow 0$ è MINORANTE di A

$\forall a \in A \quad a \geq 0 \quad (a > 0)$

$$\frac{n+1}{n} > 0$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\forall n \neq 0 \quad n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 1$$

$$0 < a \leq b$$
$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$a, b \in \mathbb{Q}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} =$$
$$= \frac{b-a}{a \cdot b} \geq 0$$

$$a \cdot b > 0$$
$$b - a \geq 0$$

$$a \leq b$$

$$0 = a - a \leq b - a \Rightarrow 0 \leq b - a$$

dato che $\frac{1}{n} \leq 1$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0.$$

2 è un maggiorante di A

A è LIMITATO.

ISS $2 \bar{e}$ un maggiorante di A ed \bar{e}
anche un elemento di A



$2 \bar{e}$ IL PIÙ PICCOLO POSSIBILE tra
tutti i maggioranti di A

(tutti i numeri maggiori di 2 sono
maggioranti di A , però un numero
MINORE di 2 NON PUÒ essere MAGGIORANTE
di A , perché un maggiorante di A
soddisfa $x \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow$ anche con $a = 2$
 $x \geq 2 \dots$

Ogni volta che trovo un maggiorante
di un insieme A che è un elemento di A
allora quello è il MINIMO dei
MAGGIORANTI, è unico, e si
chiama

MASSIMO dell'INSIEME

2 è il massimo di $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Analogamente se trovo un minimo \bar{a} di un insieme A che è esso stesso un elemento dell'insieme A , allora quello è il PIÙ GRANDE POSSIBILE dei minimi e si chiama **MINIMO dell'insieme**

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{> 0} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

1 $\bar{\in}$ anche minorente di A, ma 1
NON È UN ELEMENTO di A perché

$$1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \frac{1}{n} = 0 \text{ IMPOSSIBILE}$$

tutti i numeri più piccoli di 1 sono
ovviam. minoranti di A

ma mi chiedo: C'è un NUMERO più
grande di 1 che sia ancora
MINORANTE di A?

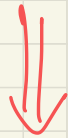
esiste $c > 0$ ($c \in \mathbb{Q}$) tale che

$1 + c$ è MINORANTE di A?

Esiste tale che $1 + c \leq 1 + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$?

Devo trovare $c > 0$ tale che

$$-1 < 1 + c \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \forall \text{ PER OGNI } n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0$$



$$0 < c \leq \frac{1}{n}$$



$$\frac{1}{c} \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0$$

NON ESISTE TALE c

Abbiamo mostrato che non ci sono

MINORANTI di A più grandi di 1



1 è IL PIÙ GRANDE dei MINORANTI

di A , ma NON appartiene ad A

(quindi non è il MINIMO)



1 si chiama ESTREMO INFERIORE

di A .

Def Il più grande dei MINORANTI di
un insieme A si chiama (SE ESISTE)

min A . MINIMO se \bar{e} un elemento di A

inf A . ESTREMO INFERIORE se non \bar{e} un
elemento di A

es. 1 \bar{e} estremo inferiore di A

$$1 = \underline{\text{inf}} A$$

Def. Il più piccolo dei maggioranti di A si chiama (SE ESISTE)

$\max A$: MASSIMO se è un elemento di A

$\sup A$: ESTREMO SUPERIORE se non è un
elemento di A

es. $2 = \max A$

Riscrivo le def. comp. caratterizzazioni
matematiche

$$r = \max A$$

$$r = \sup A$$

(r è l'estremo
superiore di A)

1) $r \in A$
2, 3 UGUALI

$$\Leftrightarrow 1) r \notin A$$

$$2) r \geq a \quad \forall a \in A$$

(r è MAGGIORANTE di A)

3) per dire che r è il più piccolo
deso dico che se prendo
numero più piccolo di r NON è
maggiorante

r è il più piccolo
dei
MAGGIORANTI
di A

$\forall c > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale
che $r - c < \bar{a}$

$$s = \inf A \iff$$

$$\underline{1)} s \notin A$$

$$2) s \leq a \quad \forall a \in A$$

$$3) \forall c > 0 \text{ esiste } \bar{a} \in A \\ s + c > \bar{a}.$$

$$s = \min A \iff$$

$$1) s \in A$$

$$2) s \leq a \quad \forall a \in A$$

$$3) \text{ uguale.}$$

del un insieme numerico X si
dice COMPLETO se

$\forall A \subseteq X$ ogni sottoinsieme di X
che ha SUPERIORM. LIMITATO
(tale che esista almeno un maggiorante)
AMMETTE ESTREMO SUPERIORE o
MASSIMO.

(se riesco sempre a trovare il più piccolo
dei maggioranti).