

Analisi Matematica I

Prof. Bruno Bianchini

PROGRAMMA a.a. 2024/2025

- Nomenclatura e operazioni sugli insiemi: appartenenza, uguaglianza, sottoinsiemi, insiemi delle parti, unione, intersezione, differenza, complementazione.
- Prodotto cartesiano. Operazioni, strutture algebriche (gruppo, anello, corpo) e proprietà delle operazioni, in particolare: regola dei segni [d] e legge dell'annullamento del prodotto [d].
- Insiemi numerici: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Rappresentazione di \mathbb{Q} sulla retta orientata. $\sqrt{2}$ non è razionale [d].
- Funzioni e loro grafico: funzioni iniettive, suriettive, corrispondenze biunivoche. Immagine diretta ed inversa.
- Numeri reali, corrispondenza biunivoca con la retta; ordine (algebrico); proprietà di Archimede e proprietà di densità [dim. su \mathbb{Q}].
- Maggiorante, minorante, insiemi limitati e no. Massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore, equivalenza delle due definizioni [df]. Teorema di completezza.
- Insiemi finiti ed infiniti. Cenni sui cardinali.
- Principio di Induzione, diseuguaglianza di Bernoulli [d].
- Sommatorie, fattoriale, coefficienti binomiali e interpretazione combinatoria [df]. La formula di Stiefel [d]. Il triangolo di Pascal-Tartaglia. Binomio di Newton [df].
- Coordinate sul piano. Grafico di una funzione reale di variabile reale. Sottoinsiemi del piano che sono grafici di funzioni, in particolare di funzioni iniettive.
- Funzioni pari e dispari.
- Grafico di $f(x) = mx + q$ [df]. Equazione della retta, della circonferenza, dell'ellisse e dell'iperbole (canoniche); parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ [df].
- La funzione $|x|$ e sue proprietà [d].
- Funzione invertibili, funzioni inverse. Funzioni composte.
- Funzioni monotone. Funzioni monotone e segno dei rapporti incrementali [df].
- Disequazioni, proprietà. Disequazioni: disequazioni equivalenti, disequazioni algebriche di primo grado; significato geometrico; disequazioni algebriche di secondo grado. Sistemi di disequazioni; disequazioni con prodotto o quoziente di funzioni.
- Potenze ad esponente intero; radici n-sime, potenze ad esponente razionale, proprietà; monotonia di a^r , $r \in \mathbb{Q}$ [d]. Definizione di a^b , con $a > 1$, b reale [fac.], estensione a $0 < a < 1$. Monotonia di a^x , $x \in \mathbb{R}$ [df].
- Le funzioni logaritmo. Cambio di base. Monotonia delle potenze con esponente positivo.
- Grafici delle potenze con esponente intero, con esponente razionale e reale. Funzione gradino, $|x|/x$, $\text{Sgn}(x)$. Inversa di x^2 , $x \geq 0$, $x \leq 0$, di x^3 e di x^n . Definizione di $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e loro inverse.
- Noto il grafico di $f(x)$, disegnare il grafico di $f(x - a)$, di $f(|x|)$, di $|f(x)|$ e di $|f(|x|)|$.
- Disequazioni con la funzione $|x|$, le funzioni irrazionali e trascendenti.

- Sulla logica: I connettivi fondamentali, l'implicazione e la biimplicazione, i quantificatori, il calcolo dei predicati [df].

- Elementi di topologia. Distanza in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$; intorni di un punto, punti interni, insiemi aperti. Punti di accumulazione (equivalenza delle due definizioni [d], punti isolati, punti frontiera. Insiemi chiusi, insieme aperti e loro proprietà, relazione tra chiusi e aperti. Frontiera di un insieme, interno, chiusura, derivato, esterno di un insieme: proprietà. Insiemi limitati, insieme compatti. Domini.
- Limiti di funzioni reali di variabile reale.
Definizione con gli intorni di $\lambda (L, +\infty, -\infty, \infty)$ e $\mu (x_0, +\infty, -\infty, \infty, x_0^+, x_0^-, P_0)$.
Definizioni equivalenti con ϵ, M, δ, K . L'utilità di adoperare simboli diversi (ϵ e M) (δ e K).
- Teorema dell'unicità del limite [d]. Se due funzioni sono uguali in un intorno di μ hanno lo stesso limite per $x \rightarrow \mu$. Teorema della permanenza del segno con corollario [d].
- Se $\lim f(x) = \lambda$, allora $\lim |f(x)| = |\lambda|$ [d], la proposizione si inverte se e solo se $\lambda = 0$ [d] o $\lambda = \infty$ (e $|\lambda| = +\infty$); teorema del confronto [d]. Se f ha limite finito è limitata in un intorno di μ [d].
- Infinitesimi. Infinitesimo per limitata [d]. Se g è infinitesimo e $|f(x)| \leq |g(x)|$ anche f è infinitesimo [d]. Somma di infinitesimi è un infinitesimo [d].
($\lim f(x) = L$) \Leftrightarrow ($[f(x) - L]$ è infinitesimo) \Leftrightarrow ($\exists \sigma(x)$ infinitesimo : $f(x) = L + \sigma(x)$) [d].
- Continuità in un punto di accumulazione.
Lim c , per $x \rightarrow x_0$ [d]; lim x , per $x \rightarrow x_0$ [d]; lim $|x|/x$, per $x \rightarrow 0$; lim Sgn(x), per $x \rightarrow 0$ [d]; lim $|x|/x$, per $x \rightarrow 0^+$, lim $|x|/x$, per $x \rightarrow 0^-$ [d]; posto (funzione di Dirichlet variata) $D(x) = 1, x \in \mathbb{Q}, D(x) = -1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, lim $D(x)$, per $x \rightarrow x_0$ [df].
- Lim $(\sin x)/x$, per $x \rightarrow 0$ [d].
- Operazioni sui limiti [dim. prodotto]. Operazioni con infiniti. Se $f(x) \rightarrow 0, 1/f(x) \rightarrow \infty$, se $f(x) \rightarrow \infty, 1/f(x) \rightarrow 0$ [d];
- Limite della funzione composta [d]. Limiti unilaterali destro e sinistro per funzioni monotone.
- Continuità di x^2, x^n , continuità dei polinomi, delle razionali [d], delle trigonometriche [df].
- Infinitesimi: Confronto e ordine; ordine del prodotto, della somma, ordine numerico.
Principio di sostituzione.
- I simboli: "‘ \sim ’", asintotico, e "‘o’", o piccolo; loro proprietà.
- Il principio di sostituzione con gli o piccolo [d].
- Limiti su sottoinsiemi [df].
- Le successioni: successioni convergenti, divergenti, indeterminate. Richiamo di alcuni teoremi, in particolare: una successione che ha limite finito è limitata [d], no viceversa. Teorema del limite delle successione monotone [d]. Teorema ponte [df].
- Sottosuccessioni, valori di aderenza e loro proprietà [d], teorema di Bolzano-Weierstrass [d].
- Lim a^n [d], Lim $a^{1/n}$ [d]. Lim $a^x, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ e lim $\log x, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0^+$.
- Continuità di a^x [d]; continuità di x^a [d].
- Definizione del numero e (Nepero) come lim $(1 + 1/n)^n$ [dim. monotonia fac.].
Lim $(1 + 1/x)^x, x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, lim $(a^x - 1)/x, x \rightarrow 0$ [d].
- Alcuni infinitesimi interessanti in $x = 0$ e loro ordine rispetto ad x [d]:
 $\sin x, \tan x, e^x - 1, \log(1 + x), \arcsin x, \arctan x, \sinh x, \tanh x, 1 - \cos x, 1 - \cosh x,$

$\sin x - \tan x, (1+x)^a - 1, \log(\cos x), \log(\cosh x)$.

- Gli infiniti: confronto, ordine, ordine della somma, del prodotto, ordine numerico. Il principio di sostituzione.

- Funzioni continue; definizione anche su punti isolati. Permanenza del segno.
- Teorema degli zeri [d] e di tutti i valori [d].
- Teorema di Weierstrass [d], compatti in compatti [df].
- Funzioni monotone e limiti unilaterali [df].
- Se f è monotona su un intervallo allora è continua se e solo se assume tutti i valori fra $\inf f$ e $\sup f$ [d]. Applicazione alla continuità di $\arcsin x, \log x$, etc ...
- Le funzioni iperboliche e loro inverse.

- Derivata. Il problema della tangente (Leibnitz) e quello della velocità istantanea (Newton). Definizione.

Retta tangente. Derivabilità implica continuità [d], no viceversa. Calcolo di derivate di funzioni elementari [d]. Regole di derivazione della somma, prodotto e quoziente [dim. quoziente]. L'operatore derivata è lineare. Il differenziale.

Derivata della funzione composta [d]. Derivata dell'inversa [d].

Derivata in senso generalizzato.

- Calcolo differenziale: Punti di estremo globale e locale (proprio). Teorema di Fermat [d]. Teorema di Rolle [d], di Lagrange [d] e di Cauchy [df]. Se f è continua in un intervallo ed ha derivata nulla è costante [d]. Monotonia su un intervallo e segno della derivata prima [d]. Condizioni sufficienti per punti di estremo [d]. Regola di De l'Hospital [df. 0/0]. Applicazioni agli ordini di infinito ed infinitesimo di $e^x, \log x, x \log x, \sin x - x, \dots$. Teorema del lim di f' [d], punti angolosi, punti di cuspidi, punti a flesso verticale. Asintoti obliqui: condizione necessaria e sufficiente [d]. Asintoti verticali. Convessità e concavità. Condizione sufficiente col segno f'' [d]. Segno della f''' e posizione della retta tangente [df]. Punti di flesso e condizione sufficiente per l'esistenza [d].
- Limiti nelle forme indeterminate $f(x)^{g(x)}$.
- La formula di Taylor, (con lemma sull'annullamento delle prime n derivate [d]). Resti di Peano e Lagrange.
- Gli sviluppi di e^x [d], $\sin x$ [d], $\cos x$ [d], $\sinh x$ [d], $\cosh x$ [d], $\log(1+x)$, $\arctan x$, $\arcsin x$, $\tanh x$, $(1+x)^a$.

- Integrale di Riemann: definizione con somme superiori ed inferiori. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità [d]. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone [df]. Integrale delle costanti [d]; non integrabilità della funzione Dirichlet variata, $D(x) = 1, x \in \mathbb{Q}, D(x) = -1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, [d]. Linearità e monotonia dell'integrale. Additività. Integrabilità di f^+, f^- e $|f|$ e disuguaglianza collegata. Orientamento dell'integrale.
- Integrabilità delle funzioni generalmente continue.
- La media integrale, suo significato. Teorema della media integrale [d].
- Le funzioni integrali, loro continuità [df]. Se $f(x)$ è continua, ogni sua funzione integrale

- $F(x)$ è derivabile con derivata continua e $F'(x) = f(x)$ [d].
- Definizione di primitiva. Totalità delle primitive [d]. Integrale indefinito.
 - Teorema fondamentale del calcolo integrale [d].
 - Integrazione per parti [d] . Integrazione per sostituzione [d].
 - Classi di funzioni "integrabili": Radici di parabole (anche a numeratore); funzioni razionali fratte, cenni a classi che con sostituzione si riportano a funzioni razionali.
 - Integrali impropri o generalizzati. Definizioni . - Criteri di convergenza: del confronto [d] , del confronto asintotico [d], criterio dell'ordine di infinitesimo o infinito [d].
 - Integrali assolutamente convergenti.
 - Serie. Definizioni. Serie di Mengoli-Cauchy . Serie geometrica [d] .
Condizione necessaria per la convergenza ($a_n \rightarrow 0$) [d]. Criterio di Cauchy. Serie Resto.
Una serie ed ogni sua serie resto hanno lo stesso carattere [df] .
Linearità delle serie convergenti.
Serie a termini non negativi. Criteri di convergenza: criteri del confronto [d] , criteri del confronto asintotico [d] , criterio dell'integrale [df].
La serie armonica generalizzata [d].
Criterio dell'ordine di infinitesimo [df]. Criterio di Leibniz.
 - Assoluta e semplice convergenza. Criterio del rapporto e della radice [d] .
Applicazioni all'assoluta convergenza.
 - Serie di e^x [df], $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^a$.
 - Irrazionalità di "e" [fac.]

Equazioni differenziali ordinarie. Principali definizioni. Equazioni lineari del primo ordine. Definizione di soluzione. Calcolo delle soluzioni. Equazioni omogenee e non omogenee. Problema di Cauchy. Esempi ed esercizi. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee e non omogenee. Soluzione generale e particolare. Il problema di Cauchy. Equazione a coefficienti costanti ed equazione caratteristica.

Legenda: [d] = dimostrazione ; [df] = dimostrazione facoltativa; [dim. ... solo la parte della dimostrazione specificata é richiesta] ; [fac.] argomento facoltativo.

Testi:

- Oscar Stefani : *Pagine di Analisi Matematica* , ed., Cortina, 2009.
(Teoria ed esercizi).
- A. Marson, P. Baiti- F. Ancona B. Rubino *Analisi Matematica 1 Teoria ed applicazioni.* , ed. Carocci (per la parte sulle equazioni differenziali ordinarie)

Libri e dispense di riferimento:

- Stefani, Zanardo: *Disequazioni*, Cortina, 1999.
- Stefani, Zanardo: *Limiti*, Cortina, 2003
- Stefani, Zanardo: *Funzioni*, Cortina, 1999.
- Marson, Colombo, Sartori *Temì d'esame (Analisi Matematica 1 A.A. 2013-14)*, CUSL nuova vita, 2013

Sul WEB

- <https://elearning.dei.unipd.it/>