

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Marittima, Ambientale e Geotecnica

**Dinamica degli inquinanti nei corpi idrici
superficiali**

Prof. Stefano Lanzoni

Indice

Prefazione	v
1 Richiami di Meccanica dei Fluidi	1
1.1 Introduzione	1
1.1.1 Il teorema del trasporto	4
1.2 Conservazione della massa	5
1.2.1 Formulazione Integrale	5
1.2.2 Formulazione differenziale	6
1.2.3 Condizione cinematica in corrispondenza di un'interfaccia . .	7
1.3 Conservazione della variazione della quantità di moto	8
1.3.1 Formulazione integrale	8
1.3.2 Formulazione differenziale	9
1.4 Equazioni di Navier-Stokes	14
1.5 Moti laminari e turbolenti	15
1.6 Metodologie di studio dei campi di moto turbolenti	15
1.6.1 Modello di chiusura di Boussinesq	19
1.6.2 Modello di chiusura di Prandtl	20
1.6.3 Il profilo logaritmico della velocità	21
1.6.4 Bilanci energetici nei moti turbolenti	23
1.6.5 Descrizione statistica della turbolenza	26
1.6.6 Valori medi	26
1.6.7 Intensità turbolenta	27
1.6.8 Funzioni di correlazione spazio-temporale	27
1.6.9 Stazionarietà e omogeneità	29
1.6.10 Spettro di energia	33
1.6.11 Ipotesi di Taylor	34
1.7 Equazioni delle onde lunghe su acque basse	35
1.7.1 L'ipotesi di onde lunghe su acque basse	36
1.7.2 Le equazioni di De Saint Venant per i moti bidimensionali. .	38
1.7.3 Le equazioni di de Saint Venant per una corrente monodimen- sionale.	42
2 Generalità sui processi di trasporto	49
2.1 Elementi di base di un bilancio di massa	49
2.1.1 Calibrazione e verifica dei modelli	50
2.1.2 Processi di trasporto	50
2.2 Definizioni	53

3	Diffusione molecolare e turbolenta	55
3.1	Diffusione molecolare	55
3.2	L'equazione differenziale della diffusione molecolare	56
3.3	Soluzioni analitiche dell'equazione della diffusione molecolare	58
3.3.1	La soluzione fondamentale	59
3.3.2	Proprietà della distribuzione fondamentale	62
3.3.3	Pura diffusione di una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata	63
3.3.4	Concentrazione nota in un punto e costante nel tempo	67
3.3.5	Concentrazione nota in un punto e variabile nel tempo	69
3.3.6	Soluzione fondamentale bi- e tridimensionale	69
3.3.7	Avvezione uniforme e diffusione longitudinale	71
3.3.8	Avvezione uniforme e diffusione bidimensionale	72
3.3.9	Avvezione uniforme e diffusione tri-dimensionale	74
4	Diffusione turbolenta	75
4.1	L'equazione differenziale della diffusione turbolenta	75
4.2	Analisi statistica della diffusione turbolenta	77
4.2.1	Proprietà statistiche della singola nuvola e della nuvola media	79
4.3	Coefficienti di diffusione turbolenta	85
4.4	Coefficienti di diffusione turbolenta in un corso d'acqua	86
4.4.1	Diffusione turbolenta verticale	88
4.4.2	Diffusione turbolenta longitudinale	90
4.4.3	Diffusione turbolenta trasversale	91
4.4.4	Trascurabilità della diffusione turbolenta longitudinale	91
5	Dispersione idrodinamica	93
5.1	Equazione 2D del bilancio di massa	95
5.2	Coefficiente di mescolamento longitudinale	99
5.2.1	Il problema all'ordine $O(\epsilon^0)$	102
5.2.2	Il problema all'ordine $O(\epsilon)$	102
5.2.3	Il problema all'ordine $O(\epsilon^2)$	103
5.2.4	Il coefficiente di mescolamento longitudinale k_x	104
5.3	Il coefficiente di mescolamento trasversale	106
5.4	Dispersione longitudinale	106
5.4.1	Osservazioni sulla dispersione longitudinale	109
5.4.2	Il coefficiente di dispersione longitudinale	111
5.4.3	Traccianti e loro modalità di immissione	118
5.4.4	Esempi	118
6	Dinamica degli inquinanti convenzionali nei corsi d'acqua	125
6.1	Modellazione monodimensionale	126
6.1.1	Pura convenzione e reazione del I ordine	127
6.2	Dinamica del BOD in un corso d'acqua	128
6.2.1	Stima di B_0	133
6.2.2	Determinazione della costante di ri-areazione r_a	134
6.2.3	Esempio	135

6.3	Modifiche dell'equazione di Streeter-Phelps	136
6.3.1	<i>NBOD</i>	136
6.3.2	<i>SOD</i>	137
6.3.3	<i>BOD</i> di fondo	137
6.3.4	Produzione primaria netta	137
6.4	Assegnazione dei carichi inquinanti	142
6.4.1	Esempio	143
6.5	Segmentazione	145
6.5.1	Confluenze e derivazioni	145
6.5.2	Esempio di confluenza	146
6.5.3	Esempio di segmentazione	146
6.6	Dispersione non trascurabile e reazione del I ordine	147
6.6.1	Soluzione per il BOD	147
6.6.2	Soluzione per il deficit di ossigeno	150
6.6.3	Esempio di immissione localizzata di BOD in un estuario	151
6.6.4	Ulteriori processi fisici agenti negli estuari	153
6.6.5	Estuari nettamente stratificati	154
6.6.6	Estuari parzialmente mescolati	156
6.6.7	Estuari ben mescolati	157
7	Dinamica dei nutrienti nei laghi	159
7.1	Generalità	159
7.1.1	Nutriente limitante	160
7.1.2	Il ciclo algale	161
7.2	Bilancio del fosforo totale in un corpo idrico	162
7.2.1	Esempio	162
7.3	Grado di eutrofia di un corpo idrico	163
7.4	Il campo idrodinamico di un lago	166
7.4.1	Stabilità statica	166
7.4.2	Esempi di moti baroclinici	170
7.5	Scelta del modello idrodinamico	172
7.5.1	Forzanti esterne	173
7.6	Compatimentalizzazione	174
7.6.1	Analogia tra trasporto di massa, di quantità di moto e di calore	176
7.6.2	Esempi di compartimentalizzazione	179
A		185
B		203
C		215

Prefazione

La distribuzione della concentrazione di un inquinante è innanzitutto associata al campo idrodinamico caratterizzante il corpo idrico all'interno del quale l'inquinante è rilasciato. Nel caso degli inquinanti convenzionali, la quantità di ossigeno presente nell'acqua è altresì condizionata dalla biomassa algale e dalla dinamica dei sedimenti presenti nel corpo idrico in esame. Il campo di moto, d'altra parte, è condizionato dalle caratteristiche morfologiche del corpo idrico e dalle condizioni al contorno.

La difficoltà di descrivere nel dettaglio le caratteristiche di un dato campo di moto e la molteplicità dei processi in gioco, rende complicato affrontare tale tipologia di problematiche con un approccio di tipo manualistico. Ogni corpo idrico (e.g, fiumi, laghi, estuari, zone umide, lagune) ha caratteristiche peculiari la cui schematizzazione richiede una conoscenza approfondita dei vari processi fisici e degli strumenti matematici necessari per la loro descrizione.

Scopo di queste note è quello di fornire le conoscenze di base che, dato un corpo idrico, consentano di formulare autonomamente un appropriato modello della dinamica di inquinanti convenzionali (e.g, BOD), individuando i processi di tipo chimico-fisico-biologico rilevanti, la modellazione matematica più opportuna e le modalità di risoluzione del problema così formulato.

I modelli così sviluppati potranno essere utilizzati per stimare la distribuzione spazio-temporale della concentrazione di inquinante e il relativo rispetto dei criteri di qualità delle acque (i.e., delle soglie di tossicità acuta e cronica) ed effettuare previsioni affidabili di scenari futuri e al variare delle condizioni al contorno.

I vari processi sono analizzati tramite bilanci di massa e quantità di moto propri dei sistemi continui e illustrati tramite esempi schematici e alcuni esempi applicativi, facendo particolare attenzione alle semplificazioni introdotte e alle limitazioni dei risultati ottenuti.

Il materiale didattico è così organizzato. Nel Capitolo 2, data l'importanza del campo idrodinamico nel determinare la dinamica di un inquinante, sono sintetizzate alcune fondamentali nozioni di meccanica dei fluidi, che saranno poi utilizzate nei successivi capitoli. Nel Capitolo 3 sono presentati gli elementi di base di un bilancio di massa, i vari meccanismi che determinano le modalità con cui la nuvola di inquinante evolve e vengono definite le varie grandezze in gioco. Il Capitolo 4 è dedicato allo studio della diffusione molecolare e alla soluzione dell'equazione della avvezione diffusione che riveste una importanza cruciale nei modelli di inquinamento. Nel Capitolo 5 le conoscenze acquisite verranno estese al caso della diffusione turbolenta. Particolare attenzione verrà dedicata alle modalità con cui descrivere la dinamica della nuvola di inquinante e ai meccanismi fisici che determinano tale dinamica. Il Capitolo 6 tratta della dispersione idrodinamica nei corpi idrici superficiali, che ri-

sulta indispensabile descrivere correttamente qualora si utilizzino modelli mediati spazialmente (i.e., sulla profondità della corrente o sulla sezione). Nei Capitoli 7 e 8 le conoscenze acquisite verranno applicate allo studio della dinamica degli inquinanti convenzionali (e.g., BOD) rispettivamente nei corsi d'acqua e nei laghi. Infine, in appendice sono forniti alcuni programmi (in linguaggio MatLab) per il calcolo di varie soluzioni di interesse pratico e la loro visualizzazione, nonché alcuni richiami di cinetica delle reazioni.

Grandezze istantanee e mediate

Nella descrizione di un campo di velocità e di concentrazione, come verrà discusso ampiamente nel corso di queste note, è possibile distinguere tra grandezze istantanee, grandezze mediate sulla turbolenza, grandezze mediate sulla verticale e, infine, grandezze mediate sulla sezione. In quanto segue, verranno utilizzate le seguenti notazioni:

$\vec{u}$, c : *valori istantanei* (i.e., ad un determinato istante di tempo t) della velocità e della concentrazione;

$\langle \vec{u} \rangle$, $\langle c \rangle$: valori di velocità e concentrazione mediati sulla turbolenza;

$\vec{U}$, C : valori di velocità e concentrazione mediati sulla verticale; la media sulla verticale di una generica quantità a verrà indicata da $\bar{a}$;

U , C : valori di velocità e concentrazione mediati sulla sezione di un corso d'acqua; la media sulla sezione di una generica quantità a verrà indicata con $\tilde{a}$;

d : profondità locale della corrente;

D : profondità media della sezione di un corso d'acqua.

Per quanto riguarda gli assi di riferimento, l'asse longitudinale di una corrente fluida (e.g., quella in un corso d'acqua) verrà indicato con x , quello trasversale con y , mentre z indicherà l'asse verticale, orientato verso l'alto.

Vettori, Tensori e relative operazioni

Nei capitoli che seguono verrà seguita la convenzione secondo cui i vettori sono indicati con lettere minuscole sormontate da una freccia mentre i tensori sono indicati con lettere maiuscole in grassetto. Ad esempio i vettori della velocità e dell'accelerazione verranno indicati con $\vec{u}$, $\vec{a}$ mentre i tensori della tensione, della velocità di deformazione e della diffusione turbolenta verranno indicati con $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$.

Gli operatori propri del calcolo vettoriale sono indicati come segue:

- Prodotto interno di due vettori: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Prodotto esterno di due vettori: $\vec{a} \times \vec{b}$
- Prodotto tensoriale di due vettori: $\vec{a} \otimes \vec{b}$
- Prodotto tra due vettori: $\mathbf{T}:\mathbf{D}$
- Divergenza di un vettore, tensore: $\nabla \cdot \vec{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{T}$
- Gradiente di uno scalare, vettore, tensore: ∇c , $\nabla \vec{u}$, $\nabla \mathbf{T}$
- Rotore di un vettore: $\nabla \times \vec{u}$

Le operazioni tra grandezze vettoriali e tensoriali possono essere espresse in modo compatto ed efficace adottando la cosiddetta notazione tensoriale, largamente utilizzata nella letteratura matematica e fisica, in base a cui:

ciascun pedice che compare una sola volta in un dato termine può assumere i valori 1, 2, 3. Ad esempio u_i denota le tre componenti u_1, u_2, u_3 del vettore $\vec{u}$, mentre A_{ij} denotano le nove componenti $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ del tensore $\mathbf{A}$

ciascun pedice che compare due volte in un dato termine deve intendersi sommato da 1 a 3. Ad esempio, $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

Utilizzando la notazione tensoriale si ha:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_j b_j \\
 \vec{a} \otimes \vec{b} &= a_j b_k \\
 \mathbf{T} : \mathbf{D} &= T_{jk} D_{jk} \\
 \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\
 \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \\
 \nabla \vec{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad \nabla c = \frac{\partial c}{\partial x_j}; \\
 \vec{u} \nabla \cdot \vec{u} &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
 \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

È importante osservare che l'operatore divergenza è lineare, si applica a grandezze vettoriali o tensoriali fornendo come risultato, rispettivamente, grandezze scalari oppure vettoriali.

L'operatore gradiente è anch'esso lineare, si applica a grandezze scalari, vettoriali o tensoriali fornendo come risultato, rispettivamente, grandezze vettoriali o tensoriali.

Infine, si ricorda che il prodotto esterno di due vettori e l'operatore rotore forniscono come risultato un vettore e possono essere rappresentati tramite i seguenti determinanti simbolici:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 \nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Capitolo 1

Richiami di Meccanica dei Fluidi

1.1 Introduzione

È noto dalla Meccanica Razionale (e.g., Grioli, 1983) e dalla Meccanica dei Fluidi (e.g., Batchelor, 1967) che le proprietà caratterizzanti un campo fluido (densità, velocità, quantità di moto, etc.) possono essere studiate seguendo due metodi di indagine cinematica. In primo metodo, detto euleriano, si fonda sulla determinazione della velocità e delle sue variazioni in ogni punto del campo di moto. Il secondo metodo, detto lagrangiano, è largamente utilizzato nella meccanica classica ed è basato sullo studio delle traiettorie delle singole particelle fluide.

Nella trattazione euleriana le proprietà del campo di moto vengono definite in funzione del tempo t e della posizione nello spazio $\vec{x}$ rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano inerziale di assi x_1, x_2, x_3 . Le variabili $(\vec{x}, t)$ sono dette euleriane (o spaziali) e caratterizzano una singola posizione dello spazio dove, al variare del tempo, vengono a trovarsi particelle di fluido diverse.

L'approccio lagrangiano, d'altra parte, si fonda sul concetto di elemento materiale, ovvero di un volume materiale elementare che si muove con il fluido e, quindi, è sempre costituito dalle stesse molecole fluide. Le proprietà del campo di moto possono allora essere definite in funzione del comportamento dinamico di tale volume, individuato tramite la posizione $\vec{X}$ del suo centro di massa all'istante iniziale $t_0 = 0$ (cfr. Figura 1.1).

Con il trascorrere del tempo tale volume si sposterà e si deformerà, la sua posizione al generico istante t (computato a partire dall'origine dei tempi $t_0 = 0$) essendo definita dalla relazione

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (1.1)$$

che definisce la traiettoria percorsa dal volume elementare di fluido il cui baricentro è inizialmente posto in $\vec{X}$. Si noti come, per un fissato istante t , la (1.1) individui una trasformazione della regione dV_0 occupata dal fluido all'istante iniziale t_0 nella regione $dV(t)$ occupata all'istante t . Il moto del continuo fluido può quindi essere descritto assumendo come variabili indipendenti le coordinate $(\vec{X}, t)$, dette anche coordinate materiali in quanto ciascuna particella del campo fluido è caratterizzata

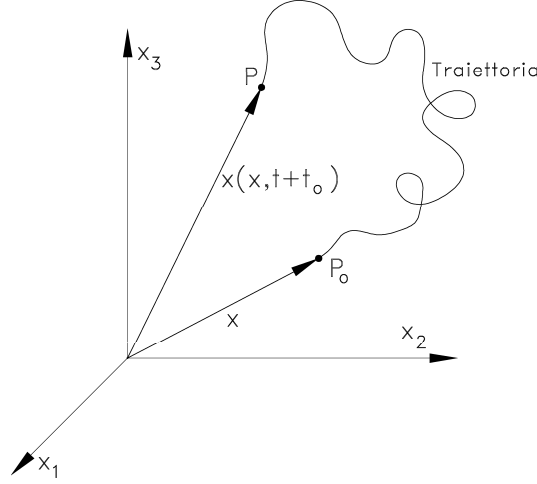


Figura 1.1: Descrizione lagrangiana del campo di moto. La particella (elemento materiale elementare) che all'istante iniziale $t_0 = 0$ si trova nella posizione $\vec{X}$, con il trascorrere del tempo muta la sua posizione e all'istante t si trova in P . La posizione della particella ad un generico istante t è individuata dalla traiettoria $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$.

da un assegnato valore di $\vec{X}$. Ovviamente tale proprietà è verificata solo se si ammette, come faremo in seguito, che particelle distinte tra loro all'istante iniziale $t_0 = 0$ si mantengano tali anche nel corso del moto.

La velocità e l'accelerazione di una generica particella fluida, saranno pertanto definite come:

$$\vec{u}_L(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t}, \quad \vec{a}_L(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

In molti casi risulta conveniente conoscere la velocità e l'accelerazione di una particella in funzione della posizione $\vec{x}$ che essa occupa all'istante t . A tale scopo è necessario osservare che il volume materiale dV_0 che all'istante iniziale t_0 è contenuto in un parallelepipedo rettangolare centrato in $\vec{X}$, di lati dX_1, dX_2, dX_3 , nel corso del tempo si modifica per effetto del movimento, pur contenendo sempre le stesse particelle fluide. All'istante t esso si sarà trasformato in un parallelepipedo obliquo di lati dx_1, dx_2, dx_3 , centrato in $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ (Figura 1.1). Come illustrato nei corsi di Meccanica Razionale e Analisi Matematica (e.g., Pigozzi, 2009), è possibile dimostrare che il volume elementare deformato $dV(t)$ risulta legato al volume iniziale $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ dalla relazione:

$$\frac{dV}{dV_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

dove il termine a secondo membro rappresenta il *determinante Jacobiano* J della trasformazione (i.e., della matrice del gradiente di deformazione) che consente di passare dalle coordinate euleriane x_1, x_2, x_3 alle coordinate lagrangiane X_1, X_2, X_3 .

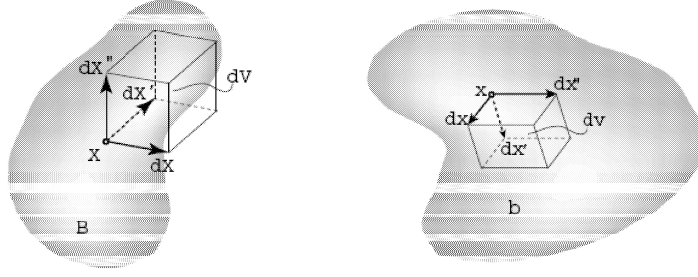


Figura 1.2: Il volume elementare $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$, inizialmente centrato in $\vec{X}$, per effetto del moto del continuo fluido, si sosta e si deforma, trasformandosi al tempo t nel volume $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ centrato in $\vec{x}$.

Il fatto che J non nullo comporta una corrispondenza biunivoca tra la posizione iniziale della particella, $\vec{X}$, e la posizione $\vec{x}$ al generico tempo t , ovvero che sia univocamente determinata la funzione:

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) \quad (1.4)$$

Risulta a questo punto possibile definire la velocità e l'accelerazione di una particella in funzione della posizione $\vec{x}$ che essa occupa all'istante t :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_L(\vec{X}(\vec{x}, t), t), \quad \vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}_L(\vec{X}(\vec{x}, t), t), \quad (1.5)$$

Tali rappresentazioni della velocità e dell'accelerazione vengono dette euleriane.

In modo del tutto analogo è possibile descrivere in termini euleriani (i.e. spaziali) una generica grandezza ψ (e.g., $\vec{x}, t$) scalare o vettoriale (densità di massa, concentrazione, quantità di moto). La variazione nel tempo di $\psi(\vec{x}, t)$ è data dalla cosiddetta derivata materiale o totale. Fissata la posizione $\vec{x}$, la grandezza ψ (e.g., $\vec{x}, t$) varierà non solo a causa della sua esplicita dipendenza dal tempo, ma anche perchè al variare di t nella posizione fissata $\vec{x}$ transiteranno particelle diverse, $\vec{X}(\vec{x}, t)$. Ne consegue che la variazione complessiva nel tempo della proprietà ψ risulta descritta dalla cosiddetta derivata materiale o totale:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\psi \quad (1.6)$$

con

$$\vec{u} = \frac{\partial\vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

vettore della velocità euleriana e avendo indicato con ∇ l'operatore gradiente (cfr. Capitolo 1). La (1.6) rappresenta dunque la rapidità di variazione nel tempo della grandezza ψ che compete ad una particella, identificata mediante la sua posizione attuale $\vec{x}$. Il termine $\partial\psi/\partial t$ rappresenta la variazione locale della grandezza ψ mentre la quantità $\vec{u} \cdot \nabla\psi$ costituisce il cosiddetto termine convettivo. La relazione tra derivata temporale di una grandezza definita lagrangianamente (i.e., $\psi_L(\vec{X}, t)$ associata ad una particella) e quella materiale di una grandezza euleriana (i.e., $\psi(\vec{x}, t)$ definita spazialmente) è ottenuta osservando le (1.5):

$$\frac{\partial \psi_L(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi[\vec{x}(\vec{X}, t), t]}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \psi \quad (1.8)$$

Nel caso in cui si ponga $\psi = J$ si può dimostrare che (Pitteri, 2009, Batchelor, 1967)

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \vec{u} \quad (1.9)$$

dove $\nabla \cdot$ rappresenta l'operatore della divergenza (cfr. Capitolo 1).

1.1.1 Il teorema del trasporto

Il teorema del trasporto (o di Reynolds) ha importanti ripercussioni di tipo cinematico in quanto, come si vedrà nel seguito, consente di passare da un approccio di tipo continuo ad un approccio basato sul cosiddetto volume di controllo. Fissato un dato istante t , si isoli all'interno della massa fluida un generico volume materiale V . Indicata con $\psi(\vec{x}, t)$ una qualsiasi *proprietà intensiva* del fluido (ovvero una proprietà per unità di volume) si vuole studiare la variazione subita nel tempo dalla generica *proprietà estensiva* $\Psi = \int \psi dV$. Si noti come, in generale, ψ può rappresentare una quantità sia scalare (la massa ρ , l'energia specifica per unità di volume e , la concentrazione volumetrica c , etc) sia vettoriale (la quantità di moto per unità di volume $\rho \vec{u}$, il momento della quantità di moto per unità di volume $\vec{r} \times \vec{u}$, essendo $\vec{r}$ il braccio rispetto ad un assegnato polo, etc). In base alle (1.3), (1.9) e osservando che il volume V_0 occupato dal fluido al tempo iniziale t_0 non dipende dal tempo, si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \psi dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \psi \left(\frac{dV}{dV_0} \right) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(J \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \cdot \vec{u} \right) J dV_0 \end{aligned}$$

da cui, utilizzando nuovamente la (1.3),

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV = \int_V \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \cdot \vec{u} \right) dV \quad (1.10)$$

Il significato cinematico di tale teorema emerge immediatamente qualora se ne fornisca una formulazione alternativa. In base alla (1.6), infatti, la funzione integranda che compare a secondo membro della (1.10) può essere riscritta come

$$\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{u} \quad (1.11)$$

Ma, utilizzando la convenzione per cui termini contenenti indici ripetuti vanno sommati tra loro (cfr. Capitolo 1), si può scrivere

$$\vec{u} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{u} = u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \psi_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(\psi_i u_j)}{\partial x_j} = \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \psi) \quad (1.12)$$

dove $\otimes$ indica il prodotto tensoriale di due vettori che si riduce all'usuale prodotto $\psi \vec{u}$ qualora ψ sia una quantità scalare (cfr. Capitolo 1).

D'altra parte, indicata con S la superficie che ad un dato istante delimita il volume $V(t)$, in base al teorema della divergenza (noto anche come teorema di Gauss o del flusso) si avrà

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \psi) dV = \int_S \psi (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.13)$$

con $\vec{n}$ normale alla superficie S , *positiva se orientata verso l'esterno*.

Ne consegue che la (1.10) può essere riscritta nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_S \psi \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.14)$$

Pertanto, la derivata totale (materiale) dell'integrale di $\psi(\vec{x}, t)$ esteso al volume mobile $V(t)$ uguaglia la somma dell'integrale della derivata locale della quantità ψ esteso al *volume di controllo* istantaneamente coincidente con V e del flusso di ψ attraverso la superficie di contorno di tale volume. Nel caso in cui il volume di controllo sia *fisso*, la derivata parziale che compare a secondo membro può essere portata fuori dal segno di integrale. Un aspetto essenziale della (1.14) risiede nel fatto che le variazioni di ψ all'interno di V , in assenza di un termine sorgente, dipendono solo dai flussi che *attraversano* la superficie S e *non* dai flussi che si generano *all'interno* di V . Tale proprietà è di notevole importanza nella derivazione di approssimazioni numeriche delle leggi che governano un assegnato campo di moto.

E' infine importante osservare che nel caso di volume di controllo fisso rispetto a un sistema di riferimento cartesiano inerziale x_1, x_2, x_3 , tale sistema può muoversi seguendo una legge di moto rettilineo uniforme. Nel caso in cui, invece, il sistema di riferimento x_1, x_2, x_3 non sia inerziale, è necessario modificare la (1.14) mettendo in conto l'accelerazione $\vec{a}_O$ con cui si muove l'origine O del sistema di riferimento e velocità angolare $\vec{\omega}$ con cui esso ruota (*Grioli*, 1983; *Shames*, 1992, p. 174, Kundu et al., 2011).

Nei paragrafi che seguono si vedrà come il teorema del trasporto consenta di derivare in forma integrale e differenziale le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia di un assegnato fluido.

1.2 Conservazione della massa

1.2.1 Formulazione Integrale

Si isoli all'interno del campo fluido un *arbitrario* volume materiale $V(t)$. La massa M del fluido che all'istante t occupa tale volume è pari a $M = \int_V \rho dV$, avendo indicato con $\rho(\vec{x}, t)$ la densità del fluido (ovvero la massa per unità di volume).

Il principio di conservazione della massa *postula* che, in assenza di reazioni, la massa di fluido M non cambi con il moto di V , ovvero che la derivata materiale di M sia sempre identicamente uguale a zero

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (1.15)$$

Ponendo $\psi = \rho$ nella (1.10), la (1.15) può essere riscritta come

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = 0 \quad (1.16)$$

D'altra parte utilizzando la formulazione alternativa (1.14) del teorema del trasporto si ottiene

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.17)$$

Tale espressione mostra come, fissato un volume di controllo V delimitato dalla superficie S , la differenza tra il flusso di massa entrante in S e il flusso di massa uscente da S uguaglia, in assenza di termini sorgenti, la variazione nel tempo della massa contenuta in V . In particolare, per una corrente monodimensionale, ovvero caratterizzata dallo sviluppo del moto in una direzione prevalente, si potrà scrivere che

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_{out}} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_{in}} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.18)$$

dove S_{out} ed S_{in} indicano le porzioni di S in cui la normale n (diretta esternamente a V , cfr. Figura 1.3) è orientata concordemente o discordemente con il vettore velocità u . Si noti come $\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ rappresenti la portata di massa che attraversa la superficie dS mentre $dQ = \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ è la relativa portata volumetrica.

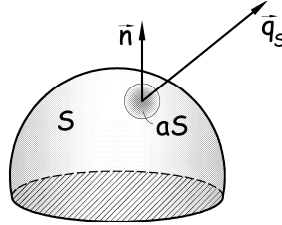


Figura 1.3: Definizione di portata di massa.

1.2.2 Formulazione differenziale

La forma differenziale euleriana dell'equazione di continuità può essere facilmente dedotta considerando il bilancio di massa relativo ad un prisma elementare di lati dx_1, dx_2, dx_3 (cfr. Ghetti, 1981, p. 72). Tuttavia, essa discende immediatamente dalla (1.16) qualora si osservi che, in virtù dell'arbitrarietà del volume V considerato, l'integrale a secondo membro è identicamente nullo solo se lo è la funzione integranda, ovvero

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.19)$$

Sfruttando le (1.6), (1.11), (1.12), si ottiene la classica forma differenziale dell'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.20)$$

che in forma estesa si scrive:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Le equazioni (1.19), (1.20) sono del tutto equivalenti da un punto di vista matematico, ma, come vedremo, non lo sono qualora si operi una discretizzazione numerica delle equazioni. In particolare, la forma (1.20), viene detta *forma conservativa* (o divergente) dell'equazione di continuità.

Infine, si lascia al lettore dimostrare che dalla (1.10) associata alla (1.19) discende la relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV = \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV \quad (1.21)$$

ampiamente utilizzata in quanto segue.

1.2.3 Condizione cinematica in corrispondenza di un'interfaccia

L'equazione di continuità assume una forma particolare in corrispondenza della frontiera del dominio fluido (in corrispondenza cioè di una superficie libera o di una parete, quale quella illustrata in Figura 1.2.3).

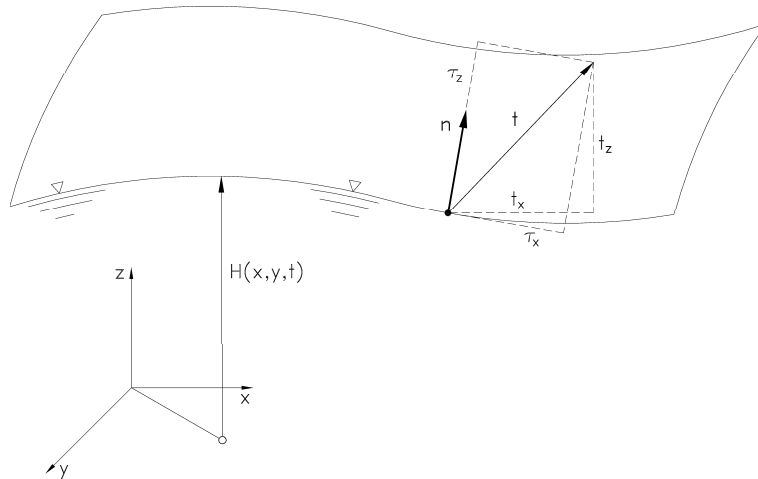


Figura 1.4: Notazioni per l'imposizione delle condizioni cinematiche e dinamiche in corrispondenza di una superficie di separazione.

E' possibile dimostrare, infatti, che ogni frontiera (fissa o mobile) è una superficie materiale (e, quindi, costituita sempre dalle stesse particelle fluide) e soddisfa la cosiddetta *condizione cinematica*. Sia dunque $\mathcal{F}(\vec{x}, t) = 0$ l'equazione all'istante t della frontiera del fluido in moto. All'istante $t + dt$ l'equazione della frontiera diventa $\mathcal{F}(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) = 0$. Sviluppando la $\mathcal{F}$ in serie di Taylor si ottiene

$$\mathcal{F}(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) = \mathcal{F}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dt + \nabla \mathcal{F} \cdot d\vec{x} + O(dt^2, |dx|^2) = 0$$

Da cui, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$\vec{u}_F = -\frac{1}{\nabla \mathcal{F}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

dove $\vec{u}_F = d\vec{x}/dt$ rappresenta la velocità $\vec{u}_F$ con cui si muove la frontiera. Il fatto che la superficie $\mathcal{F}$ sia una frontiera del campo fluido impone che non vi sia distacco o compenetrazione, ovvero che le componenti in direzione normale a $\mathcal{F}$ della velocità del fluido $\vec{u}$ e della velocità della frontiera $\vec{u}_F$ coincidano.

Ricordato che la normale alla frontiera è data da

$$\vec{n}_F = \frac{\nabla \mathcal{F}}{|\nabla \mathcal{F}|} \quad (1.22)$$

dovrà quindi essere soddisfatta l'uguaglianza $\vec{u}_F \cdot \vec{n}_F = \vec{u} \cdot \vec{n}_F$ per cui:

$$-\frac{1}{|\nabla \mathcal{F}|} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \vec{u} \cdot \frac{\nabla \mathcal{F}}{|\nabla \mathcal{F}|}$$

Ne discende la condizione cinematica:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \mathcal{F} = 0 \quad (1.23)$$

ovvero, in forma estesa:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0$$

Si lascia al lettore dimostrare che tale condizione implica che la superficie $\mathcal{F}(\vec{x}, t) = 0$ è sempre costituita dalle stesse particelle, ovvero è una superficie materiale.

Si noti infine come nel caso in cui la frontiera sia costituita da una *superficie fissa* la (1.23) si riduce ad imporre l'usuale condizione di continuità

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_F = 0 \quad (1.24)$$

1.3 Conservazione della variazione della quantità di moto

1.3.1 Formulazione integrale

Si consideri la porzione di fluido che all'istante t occupa il volume materiale V avente superficie S . Le forze esterne agenti su tale volume possono, in generale, essere suddivise in

forze di massa $\vec{f}(\vec{x}, t)$, definite per unità di massa e applicate alle particelle fluide contenute in V

forze di superficie $\vec{F}(\vec{x}, t)$, definite per unità di superficie e applicate alle particelle fluide che costituiscono S .

Indicato con $\vec{u}(\vec{x}, t)$ il vettore della velocità (euleriana) in un generico punto, il principio di conservazione della quantità di moto *postula* che *la derivata totale della quantità di moto associata al volume materiale V sia uguale in ogni istante alla risultante delle forze esterne ad esso applicate*, ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{F} dS \quad (1.25)$$

Applicando il teorema del trasporto al primo membro della (1.25), ponendo cioè $\psi = \rho \vec{u}$ nella (1.10) e tenendo conto della equazione di continuità (1.16) si ottiene la seguente formulazione integrale del principio di conservazione della quantità di moto

$$\int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{F} dS \quad (1.26)$$

D'altra parte, utilizzando il teorema del trasporto nella formulazione alternativa (1.14) si ottiene

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_S (\rho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{F} dS \quad (1.27)$$

Per una corrente monodimensionale, indicata con $dQ = \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ la portata volumetrica che attraversa la superficie dS e, al solito, assumendo la convenzione per cui la normale $\vec{n}$ alla superficie S è orientata esternamente a V , si ottiene

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_{S_{out}} \rho \vec{u} dQ - \int_{S_{in}} \rho \vec{u} dQ = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{F} dS \quad (1.28)$$

dove i pedici *out* e *in* si riferiscono a quelle porzioni di S in cui il flusso di quantità di moto è diretto, rispettivamente, verso l'esterno e verso l'interno del volume di controllo.

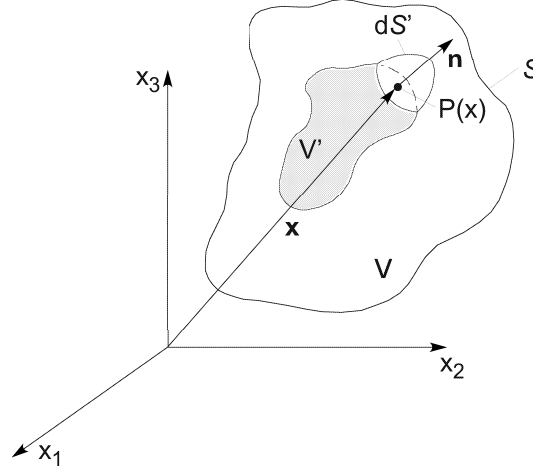
1.3.2 Formulazione differenziale

Stato di tensione in un continuo

La derivazione della forma differenziale del principio della quantità di moto presuppone l'introduzione del concetto di tensione in un generico punto di un continuo.

Con riferimento alle notazioni di figura 4 si consideri un qualsiasi sistema continuo in moto che all'istante t occupa il volume $V(t)$ delimitato dalla superficie chiusa $S(t)$. All'interno di V si isoli un arbitrario volume materiale V^* delimitato dalla superficie S^* . Su tale superficie si consideri una superficie elementare δS^* , centrata in $P(\vec{x})$, la cui giacitura è individuata dalla normale $\vec{n}$ orientata esternamente a V^* . Indicata con $\delta \vec{R}$ la risultante delle forze che il fluido esterno a V^* esercita su δS^* la tensione $\vec{t}$ agente nel punto $P(\vec{x})$ è definita come

$$\vec{t} = \vec{t}(\vec{x}, \vec{n}) = \lim_{\delta S^* \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{R}}{\delta S^*} \quad (1.29)$$

Figura 1.5: Definizione dei volumi di controllo V e V' .

La tensione $\vec{t}$, dunque, rappresenta una forza per unità di superficie e risulta funzione sia del punto $P(\vec{x})$ considerato sia della giacitura (individuata mediante la normale $\vec{n}$) dell'elemento considerato. La giacitura della superficie elementare δS^* , infatti può essere qualsiasi in virtù del modo del tutto arbitrario con cui si isola il volume V^* e, quindi, la sua superficie S^* . Se ora, sempre con riferimento al volume arbitrario V^* , si considera il principio della quantità di moto nella formulazione (1.26), al tendere a zero di V^* gli integrali di volume risultano infinitesimi di ordine superiore rispetto all'integrale di superficie e, quindi, il principio della quantità di moto a livello locale si riduce ad una condizione di equilibrio delle forze di superficie (tensioni) distribuite su una superficie chiusa circostante il punto P considerato, ovvero

$$\lim_{V^* \rightarrow 0} \int_{S^*} \vec{F} dS^* = \lim_{V^* \rightarrow 0} \int_{S^*} \vec{t} dS^* = 0 \quad (1.30)$$

Condizione dinamica in corrispondenza di un'interfaccia

Nel caso in cui il punto P si trovi sulla frontiera del campo fluido (ovvero, in un intorno di P , S^* coincida con l'interfaccia che separa il mezzo fluido da un altro mezzo) è necessario mettere in conto l'azione della cosiddetta tensione superficiale σ . Essa rappresenta una forza per unità di lunghezza che agisce tangenzialmente a qualsiasi interfaccia, dando luogo ad una tensione normale all'interfaccia $\vec{t}_\sigma$ secondo la legge di Laplace (cfr. Ghetti pag. 16)

$$\vec{t}_\sigma = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \vec{n} \quad (1.31)$$

dove R_1 ed R_2 rappresentano i raggi di curvatura dell'interfaccia ed $\vec{n}$ è la normale all'interfaccia in P .

La condizione dinamica in corrispondenza di una qualsiasi interfaccia che separa il sistema continuo considerato e l'esterno, può essere dunque formulata come

$$\vec{F} = \vec{t} + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \vec{n} \quad (1.32)$$

ovvero in ciascun elemento superficiale dell'interfaccia la somma della tensione $\vec{t}$ e della tensione normale alla superficie $\vec{t}_\sigma$ indotta dalla tensione superficiale σ deve uguagliare la forza esterna per unità di superficie $\vec{F}$.

Il tensore delle tensioni

Al fine di indagare la struttura di $\vec{t}$ si consideri il volume materiale δV di forma tetraedrica illustrato in figura 5, avente tre facce parallele ai piani coordinati di riferimento (di normali $\vec{n}_1 = -\vec{i}_1, \vec{n}_2 = -\vec{i}_2, \vec{n}_3 = -\vec{i}_3$) e la quarta secondo una giacitura generica individuata dalla normale $\vec{n}$. Indicate con $\vec{t}_n$ la tensione agente sulla faccia inclinata, di area δA , e con $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ le tensioni che agiscono sulle facce parallele ai piani coordinati, aventi aree $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$, la (1.30) impone che

$$\vec{t}\delta A + \vec{t}_1\delta A_1 + \vec{t}_2\delta A_2 + \vec{t}_3\delta A_3 = 0 \quad (1.33)$$

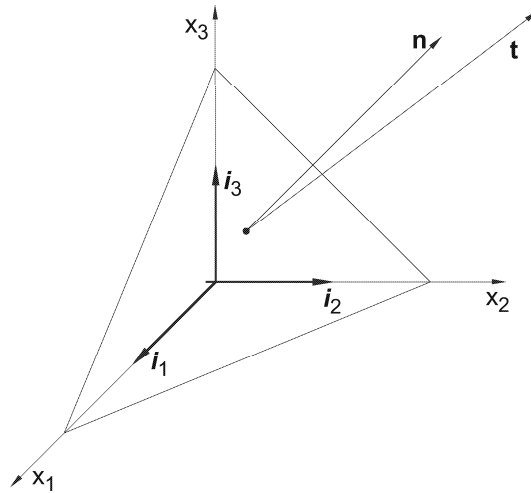


Figura 1.6: Definizione del tetraedo di Cauchy.

Ma,

$$\delta A_i = \vec{n}_i \cdot \vec{n} \delta A = -\vec{i}_i \cdot \vec{n} \delta A = -n_i \delta A \quad (1.34)$$

da cui:

$$\vec{t} = n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3 = n_j \vec{t}_j \quad (1.35)$$

Ma, la tensione $\vec{t}_j$ agente sulla faccia di normale $-\vec{i}_j$ può essere così decomposta rispetto al sistema di assi x_1, x_2, x_3

$$\vec{t}_j = T_{1j} \vec{i}_1 + T_{2j} \vec{i}_2 + T_{3j} \vec{i}_3 \quad (1.36)$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
\vec{t} &= n_1(T_{11}\vec{i}_1 + T_{21}\vec{i}_2 + T_{31}\vec{i}_3) \\
&+ n_2(T_{12}\vec{i}_1 + T_{22}\vec{i}_2 + T_{32}\vec{i}_3) \\
&+ n_3(T_{13}\vec{i}_1 + T_{23}\vec{i}_2 + T_{33}\vec{i}_3)
\end{aligned}$$

ovvero, in forma tensoriale,

$$t_i = n_j T_{ij} \quad i.e. \quad \vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} \quad (1.37)$$

Utilizzando notazioni estese avremo:

$$[t_x, t_y, t_z] = [n_x, n_y, n_z] \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

In altre parole, la tensione nel punto $P(\vec{x})$ secondo la giacitura individuata dalla normale $\vec{n}$ è il trasformato del vettore $\vec{n}$ tramite il tensore della tensione $\mathbf{T}$.

Si noti come l'equilibrio alla rotazione di un elemento infinitesimo di fluido costituito da un parallelepipedo elementare di lati dx_1, dx_2, dx_3 consenta di dimostrare la cosiddetta *reciprocità delle tensioni tangenziali*, per cui

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1.39)$$

Le equazioni del moto di Cauchy

Risulta ora possibile ricavare l'equazione differenziale che governa il bilancio di quantità di moto in un mezzo continuo quale quello fluido. Sempre con riferimento all'arbitrario volume V^* delimitato dalla superficie chiusa S^* , l'integrale di superficie che compare a secondo membro della (1.27) può infatti essere riscritto come

$$\int_{S^*} \vec{F} dS^* = \int_{S^*} \vec{t} dS^* = \int_{S^*} \vec{n} \cdot \vec{T} dS^* = \int_{S^*} n_j T_{ji} dS^* \quad (1.40)$$

Utilizzando il teorema della divergenza

$$\int_{S^*} n_j T_{ji} dS^* = \int_{V^*} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV^* = \int_{V^*} \nabla \cdot \mathbf{T} dV^*$$

e sostituendo nella (1.27) si ottiene:

$$\int_{V^*} \left[\rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{u}}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{T} \right] dV^* = 0$$

Data l'arbitrarietà del volume V^* considerato, l'integrale è identicamente nullo solo se lo è la funzione integranda per cui l'equazione della quantità di moto in forma differenziale porge

$$\rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{u}}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (1.41)$$

ovvero, in forma estesa,

$$\begin{aligned}\rho \left(f_x - \frac{du_x}{dt} \right) + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left(f_y - \frac{du_y}{dt} \right) + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left(f_z - \frac{du_z}{dt} \right) + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Tali equazioni prendono il nome di equazioni del moto di Cauchy e valgono per qualsiasi mezzo continuo.

Fluido viscoso newtoniano

L'equazione della quantità di moto (1.41) risulta valida per qualsiasi sistema continuo. L'introduzione del cosiddetto *legame costitutivo* permette di particularizzarla al sistema continuo che si vuole studiare.

Nel caso di un fluido viscoso newtoniano, è possibile dimostrare (cfr. Ghetti, pp. 190-193) che lo stato di tensione in un punto è legato alla velocità di deformazione del fluido dalla seguente relazione

$$T_{ij} = (-p + \lambda \nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.42)$$

dove δ_{ij} è l'operatore di Kronecker, μ e λ sono, rispettivamente, la viscosità dinamica e la viscosità volumetrica del fluido, p è la pressione (ovvero la componente della tensione diretta normalmente alla superficie e positiva se di compressione) e il tensore

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.43)$$

rappresenta la velocità di deformazione del fluido. Si noti che, in generale, μ e λ dipendono dalla pressione e dalla temperatura: si rimanda il lettore ai trattati di reologia per gli specifici approfondimenti. Qui ci si limita a ricordare la relazione proposta da Stokes secondo cui

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (1.44)$$

Si noti come, per un fluido in quiete,

$$T_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (1.45)$$

ovvero lo stato delle tensioni è isotropo, non dipende cioè dalla giacitura $\vec{n}$ ed è unicamente dato dall'azione della pressione che, come è noto dallo studio dei fluidi in quiete, è distribuita idrostaticamente all'interno del campo fluido.

Nel caso di un fluido viscoso in movimento, invece, la pressione dinamica un diverso significato fisico in relazione al carattere comprimibile o incomprimibile del fluido esaminato. Per un fluido comprimibile la pressione è una variabile di natura termodinamica espressa mediante una legge di stato che dipende dal tipo di trasformazione considerata (cfr. Ghetti, p. 11). Per un fluido incomprimibile, invece, la

pressione non è definibile come una variabile di natura termodinamica e qualsiasi espressione di p è possibile purchè essa si riduca alla (1.45) al tendere a zero della velocità di deformazione $\mathbf{D}$. In particolare, risulta conveniente porre

$$p = \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33}}{3} \quad (1.46)$$

1.4 Equazioni di Navier-Stokes

Le classiche equazioni di Navier-Stokes si ottengono sostituendo nelle equazioni del moto di Cauchy (1.41) il tensore delle tensioni proprio di un fluido viscoso newtoniano (1.42). Esse porgono:

$$\rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = \nabla p - \lambda \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (1.47)$$

Ma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right) = \frac{1}{2} (\nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u}) \end{aligned}$$

e, quindi,

$$\rho \left(\vec{f} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \nabla \vec{u} \right) = \nabla p - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.48)$$

ovvero, in notazione tensoriale,

$$\rho \left(f_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.49)$$

Si noti infine come, nel caso in cui il campo delle forze esterne di massa si riduca alle sole forze gravitazionali (i.e., $f_i = g \partial h / \partial x_i$) e il fluido possa essere schematizzato come incomprimibile (i.e., $\partial u_j / \partial x_j = 0$) le equazioni di Navier Stokes assumono la classica forma ampiamente utilizzata nello studio dei fenomeni idraulici

$$\frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial x_i} = -\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.50)$$

ovvero, in forma estesa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial x} &= -\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial y} &= -\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial z} = & - \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
& + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}$$

1.5 Moti laminari e turbolenti

Le equazioni (1.50) descrivono in modo completo qualsiasi campo di moto di un fluido newtoniano incomprimibile (e.g., acqua e aria per velocità inferiori a quella del suono) soggetto al campo di forze gravitazionale. In base al valore assunto dal numero di Reynolds caratteristico del moto è tuttavia possibile individuare due diverse tipologie di moto: laminare e turbolento.

I moti laminari si realizzano per valori sufficientemente bassi del numero di Reynolds e sono caratterizzati dal prevalere delle forze viscosi su quelle inerziali. Ne consegue che un disturbo casuale indotto nel campo di moto tende ad essere smorzato dalla viscosità e, quindi, il campo di moto risulta stabile. Il moto avviene con grande regolarità, gli strati fluidi scorrono gli uni sugli altri, senza che tra essi avvengano scambi di quantità di moto e, quindi, la velocità non è soggetta a fluttuazioni (Figura 1.7). Esempi di moti laminari si incontrano nell'ambito della meccanica e, in particolare, nella teoria della lubrificazione (e.g., moto di Hagen-Poiseuille tra piani paralleli e moto di Poiseuille nei tubi) .

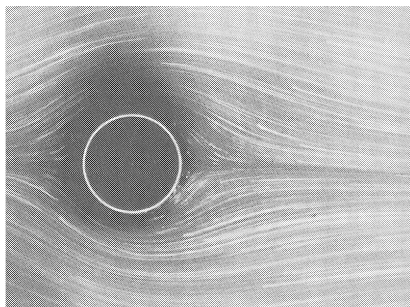


Figura 1.7: Esempio di moto laminare attorno ad un cilindro

I moti turbolenti si realizzano per valori sufficientemente elevati del numero di Reynolds, in relazione alla geometria del campo di moto considerato. In tal caso sono le forze di inerzia che prevalgono su quelle viscosi e, quindi, un generico disturbo tende ad amplificarsi rapidamente interessando l'intero campo fluido (Figura 1.8).

1.6 Metodologie di studio dei campi di moto turbolenti

Come illustrato negli esempi di Figura 1.8, risulta estremamente complicato definire le caratteristiche di un campo di moto turbolento. La turbolenza, infatti, è una

quantità complessa che può essere definita solo attraverso un **insieme di proprietà**. In generale, un campo di moto turbolento è: 1) irregolare nel tempo e nello spazio; 2) dissipativo; 3) rotazionale; 3) tridimensionale; 4) non omogeneo; 5) anisotropo; 6) non-lineare. Tutte queste caratteristiche sono completamente descritte dalle **equazioni di Navier-Stokes** (1.49) che, per un **fluido incompressibile** e un campo di moto gravitazionale, porgono:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla(p + \rho gh) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.51)$$

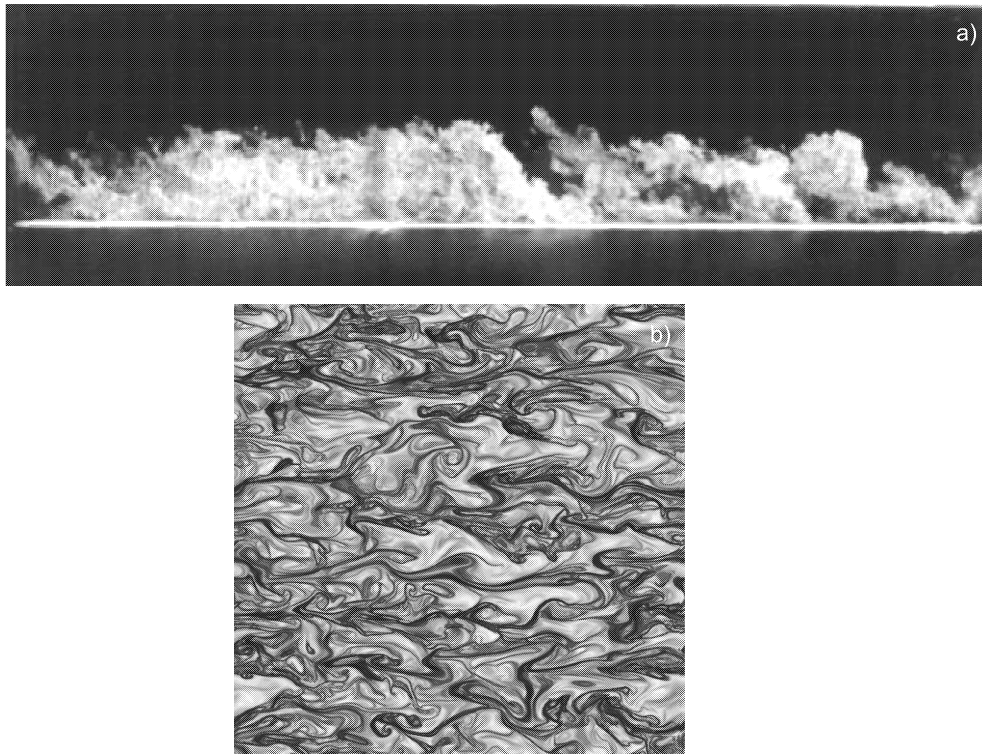


Figura 1.8: a) Strato limite turbolento su lastra piana. b) Strutture coerenti generate dal campo di moto turbolento che si realizza all'interno di un condotto rettangolare

Tali equazioni, associate all'equazione di **continuità**,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.52)$$

formano un sistema **di quattro equazioni** differenziali nelle quattro **incognite** u_x, u_y, u_z e p che, associato a opportune condizioni iniziali e al contorno pone un problema ben posto e, quindi, in linea di principio perfettamente risolubile, pur dovendo ricorrere ad una soluzione numerica.

L'attuale potenza di calcolo, tuttavia, non consente di ottenere una soluzione numerica diretta (DNS) se non per numeri di Reynolds relativamente bassi e domini di calcolo non troppo estesi, precludendo così in molti casi la soluzione di problemi di carattere ingegneristico.

Al fine di capire per quale motivo non è al momento pensabile di risolvere numericamente il problema posto dalle (1.51) e (1.52) è opportuno rappresentare il campo di moto in **serie di Fourier**:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \vec{a}(\vec{k}, t) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.53)$$

dove i è l'**unità immaginaria**, mentre

$$\vec{x} = (j_1 \Delta x, j_2 \Delta y, j_3 \Delta z), \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\ell} (k_1, k_2, k_3)$$

rappresentano, rispettivamente, il vettore posizione $\vec{x}$ e il vettore dei numeri d'onda $\vec{k}$. Gli $N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ coefficienti $\vec{a}(\vec{k}, t)$ che consentono di rappresentare il vettore velocità nello spazio dei numeri d'onda vengono determinati risolvendo il sistema di N equazioni algebriche ottenute sostituendo la rappresentazione (1.53) nelle equazioni (1.51) e (1.52) e discretizzando alle differenze finite il termine di accelerazione temporale.

È evidente che, se si vuole rappresentare la turbolenza in tutti i suoi aspetti, dai **macrovortici**, aventi dimensioni paragonabili al dominio considerato, ai **microvortici**, responsabili delle dissipazioni viscosi, è necessario considerare un numero sufficientemente elevato di termini della serie. Indicata con ℓ la **scala integrale turbolenta** (i.e., dei macrovortici) e con ℓ_d la **scala dissipativa** di Kolmogorov (i.e., propria dei microvortici) è dunque necessario che

$$[k_i]_{max} = k_d \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\ell} N_i = \frac{2\pi}{\ell_d} \quad \Rightarrow \quad N_i \sim \frac{\ell}{\ell_d}$$

e, quindi, il numero complessivo di termini da sommare è

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = \left(\frac{\ell}{\ell_d} \right)^3$$

D'altra parte, studiando lo spettro della turbolenza (ovvero la distribuzione dei coefficienti $\vec{a}(\vec{k}, t)$ in funzione del vettore dei numeri d'onda) si può dimostrare che

$$\frac{\ell}{\ell_d} \sim R_\ell^{3/4} \quad \text{con} \quad R_\ell = \frac{\rho \ell v}{\mu}$$

Il numero di termini che è necessario sommare per ottenere una rappresentazione completa del campo fluido è dunque pari a:

$$N = R_\ell^{9/4} \quad (1.54)$$

Una soluzione numerica diretta (DNS) delle equazioni di Navier Stokes risulta dunque possibile solo per geometrie molto semplici e numeri di Reynolds non troppo elevati ($\sim 10^4 - 10^5$)

Per numeri di Reynolds elevati, quali quelli che in genere si incontrano nell'ambito dell'ingegneria ambientale, l'**onere computazionale** associato ad **una soluzione numerica diretta** (DNS) delle equazioni di Navier Stokes è troppo elevato, ed è quindi necessario ricorrere ad altre strategie di soluzione quali:

la risoluzione delle **equazioni di Reynolds** (RANS), ottenute mediando sulla turbolenza le equazioni di Navier-Stokes. Tali equazioni si ottengono sfruttando la **decomposizione di Reynolds**, e consentono di determinare i valori delle grandezze mediate sulla turbolenza. È tuttavia necessario introdurre delle opportune **leggi di chiusura** che specificano in funzione di tali grandezze medie i termini fluttuanti che nascono dalla decomposizione di Reynolds

la **large eddy simulation** (LES). In base a tale approccio vengono risolte solo le scale spaziali e temporali relative ai vortici di maggiori dimensioni (i.e, posso diminuire il numero di termini della serie di Fourier). Il comportamento dei vortici di dimensioni inferiori a quelle risolte direttamente viene **concettualizzato** introducendo un opportuno modello di turbolenza, che in genere sfrutta il carattere tendenzialmente omogeneo ed isotropo dei vortici di minori dimensioni.

Le **equazioni di Reynolds** (RANS) sono ricavate dalle equazioni sostituendo nelle equazioni di Navier-Stokes la cosiddetta **decomposizione di Reynolds**: la velocità, così come la pressione, vengono decomposte in una **componente media** ($\langle \vec{u} \rangle = \vec{U}$) ed una **componente fluttuante** ($\vec{u}'$):

$$\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}' \quad p = \langle p \rangle + p'$$

Sostituendo tali decomposizioni nelle equazioni di Navier Stokes (1.51) e nell'equazione di continuità (1.52) si ottengono le seguenti equazioni:

$$\rho \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial (\langle p \rangle + \rho g h)}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \quad (6.55-a)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.55-b)$$

Il termine $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle$, che nasce dalla non linearità del termine convettivo presente nelle equazioni di Navier-Stokes, può essere formalmente visto come un ulteriore contributo al tensore delle tensioni. È infatti immediato dimostrare che

$$- \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} = \left\langle - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right\rangle = \frac{\partial \langle T_{ij} \rangle}{\partial x_j}$$

dove

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}, \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.56)$$

rappresentano, rispettivamente, il tensore delle tensioni **per un fluido Newtoniano incompressibile** ed il tensore della **velocità di deformazione**. Ne consegue che le RANS possono essere scritte nella forma,

$$\rho \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T_{ij} \rangle - \rho \langle u'_i u'_j \rangle) \quad (6.57)$$

Appare dunque evidente come il tensore di componenti $T_{ij}^t = -\rho\langle u'_i u'_j \rangle$ sia formalmente assimilabile ad un tensore delle tensioni. Esso è infatti detto **tensore delle tensioni apparenti** di Reynolds e si va a sommare al tensore delle tensioni viscosi, mediato sulla turbolenza $T_{ij}^\mu = \langle T_{ij} \rangle$, comportando quindi un **aumento della tensione** per effetto degli **scambi di quantità** di moto associati alle **fluttuazioni turbolente**.

L'utilizzo delle RANS, invece di risolvere direttamente le equazioni di Navier Stokes, pone tuttavia il cosiddetto **problema della chiusura della turbolenza**. Le incognite del problema ($\langle \vec{u} \rangle$, $\vec{u}'$, $\langle p \rangle$) sono in numero maggiore (sette) delle equazioni disponibili (cinque). È quindi necessario esprimere i termini addizionali di Reynolds in funzione delle grandezze mediate sulla turbolenza, introducendo un opportuno **modello di chiusura**. In questi ultimi decenni tale problema è stato affrontato da numerosi ricercatori (cfr. *Rodi*, 1980), portando alla formulazione di modelli di turbolenza via via sempre più raffinati che consentono di affrontare con buoni risultati lo studio di svariate situazioni reali di interesse ingegneristico.

1.6.1 Modello di chiusura di Boussinesq

In analogia con l'espressione che fornisce la componente degli sforzi viscosi associati al tensore della velocità di deformazione, Boussinesq propone di modellare gli sforzi apparenti generati dalle fluttuazioni turbolente come:

$$T_{ij}^t = -\rho\langle u'_i u'_j \rangle = \rho\nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}e_c\delta_{ij} \quad (6.58)$$

dove ν_t è la viscosità cinematica turbolenta, δ_{ij} è l'operatore di Kronecker, ed e_c è l'**energia cinetica turbolenta**. È evidente che il secondo termine a secondo membro (che non appare nell'analogia espressione per gli sforzi viscosi) è legato alla definizione stessa di energia cinetica turbolenta. Sommando tra loro le componenti diagonali degli sforzi turbolenti e tenendo conto dell'equazione di continuità scritta per il moto medio, infatti, si ottiene la seguente definizione per e_c :

$$e_c = \rho \frac{\langle u_{x1}'^2 + u_{x2}'^2 + u_{x3}'^2 \rangle}{2} \quad (6.59)$$

È interessante osservare che il termine che contiene e_c è assimilabile ad una pressione e, sommato alla media della pressione sulla turbolenza fornisce la cosiddetta pressione dinamica:

$$\tilde{p} = \langle p \rangle + \frac{2}{3}e_c \quad (6.60)$$

In analogia con la viscosità cinematica si può porre:

$$\nu \propto U_0 l_m, \quad \nu_t \propto VL \quad (6.61)$$

essendo U_0 la velocità media del fluido, l_m il cammino medio delle molecole d'acqua, V la velocità scala della turbolenza e L la lunghezza scala dei macrovortici turbolenti. Si noti come, mentre la viscosità cinematica ν è una proprietà caratteristica del fluido, la ν_t dipende fortemente dal campo di moto considerato.

Tale modo di procedere nella chiusura della turbolenza risulta efficace qualora il campo di moto sia relativamente semplice in modo tale che non siano presenti regioni in cui $\partial\langle u_i \rangle / \partial x_j$ assuma segno opposto rispetto a quello dello sforzo tangenziale turbolento: in tal caso, infatti, ν_t dovrebbe assumere valori negativi, ovvero fisicamente non significativi.

Nel caso di moti turbolenti complessi è evidente che, a differenza di quanto accade per la viscosità cinematica, ν_t non può essere isotropo e omogeneo. Ad esempio ν_t deve annullarsi in corrispondenza di una parete.

Il modo con cui ν_t viene modellato dipende dal tipo di modello di chiusura della turbolenza adottato.

1.6.2 Modello di chiusura di Prandtl

Il modello di chiusura di Prandtl è un tipico modello a zero equazioni. Esso è applicabile alle situazioni in cui i) il gradiente del moto medio predomina in una direzione (e.g., $\partial\langle u_x \rangle / \partial z$; ii) uno degli sforzi tangenziali turbolenti (e.g., $-\rho\langle u'_x u'_z \rangle$) risulta molto maggiore degli altri.

Esso si basa sulle ipotesi che $u'_x \propto \partial\langle u_x \rangle / \partial z$ e $|u'_x| \sim |u'_z|$, per cui è possibile porre:

$$V = l_m \left| \frac{\partial\langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \quad (6.62)$$

con l_m la lunghezza di mescolamento caratterizzante gli spostamenti delle particelle fluide indotti dalle fluttuazioni turbolente. Conglobando in l_m la costante di proporzionalità, è quindi possibile esprimere ν_t come:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial\langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \quad (6.63)$$

e, quindi,

$$-\rho\langle u'_x u'_z \rangle = l_m^2 \left| \frac{\partial\langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \frac{\partial\langle u_x \rangle}{\partial z} \quad (6.64)$$

Si noti come il termine a secondo membro risulta positivo nel caso in cui il gradiente di velocità sia positivo. Tale risultato è legato al fatto che, come illustrato in Figura 1.9, le fluttuazioni u'_x e u'_y sono statisticamente localizzate nel II e IV quadrante e, quindi, il prodotto $u'_x u'_y$ è mediamente negativo.

Nel caso del moto turbolento che si realizza a contatto di una parete Prandtl propone di porre $l_m = kz$, essendo k ($\simeq 0.41$) la costante di von Karman e z la distanza dalla parete.

Nel caso di turbolenza libera, quale quella che si realizza in strati di mescolamento, scie e getti, Prandtl suggerisce di porre $l_m = c\delta$, essendo δ uno spessore caratteristico e c un coefficiente determinato sulla base di osservazioni sperimentali, come risulta dalla Tabella 1.1.

È importante osservare come il modello di chiusura proposto da Prandtl non sia in grado di modellare quei campi di moto (e.g., a valle di un gradino di fondo) in cui turbolenza di parete e turbolenza libera coesistono. Inoltre, è evidente che il modello risulta incongruente nel caso in cui $\partial\langle u_x \rangle / \partial z = 0$. Infine, un'altra incongruenza

Tabella 1.1: Valori della costante di proporzionalità c nel caso di turbolenza libera

c	tipo di moto
0.7	strato di mescolamento piano
0.9	getto piano
0.075	getto circolare
0.125	getto radiale
0.16	scia piana

insita nel modello di Prandtl è legato alla crescita indefinita di ν_t determinata dall'assunzione $l_m = kz$. Al fine di ovviare a ciò è possibile introdurre delle funzioni a rampa, in modo che ad un primo strato in cui la crescita avviene linearmente sia sovrapposto un secondo strato in cui il rapporto tra $l-m$ e lo spessore dello strato limite si mantenga costante.

1.6.3 Il profilo logaritmico della velocità

Il modello di chiusura di Prandtl può essere usato per determinare l'andamento del profilo della velocità media caratterizzante il moto turbolento a ridosso di una parete (i.e., moto nei tubi e nei canali). Ponendo $l_m = kz$ nella (6.64) e assumendo che lo sforzo turbolento sia circa costante e pari a quello alla parete, $\tau = -\rho \langle u'_x u'_z \rangle \cong \tau_0$ ne consegue il tipico andamento logaritmico della velocità.

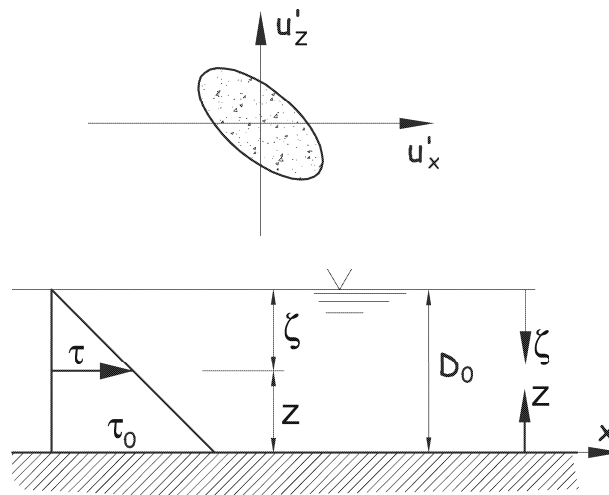


Figura 1.9: Andamento delle fluttuazioni di velocità in direzione verticale e longitudinale e degli sforzi tangenziali totali in una corrente a pelo libero.

Nell'ipotesi di moto uniforme, l'equazione (6.64) infatti diventa:

$$\tau_0 = (kz)^2 \left| \frac{d\langle u_x \rangle}{dz} \right| \left| \frac{d\langle u_x \rangle}{dz} \right| \quad (6.65)$$

Assumendo l'asse z normale alla parete e diretto verso il fluido (Figura 1.9), in modo che il gradiente della velocità media sia positivo, e separando le variabili si ottiene:

$$\frac{d\langle u_x \rangle}{u_*} = \frac{1}{k} \frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle u_x \rangle}{u_*} = \frac{1}{k} \ln z + k_1$$

dove $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ è la cosiddetta velocità di attrito. La costante di integrazione k_1 è facilmente determinabile osservando che $\langle u_x \rangle|_{D_0} = \langle u_x \rangle_{max}$,

$$k_1 = \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} - \frac{1}{k} \ln D_0$$

In definitiva:

$$\frac{U(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{z}{D_0}\right) + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*}$$

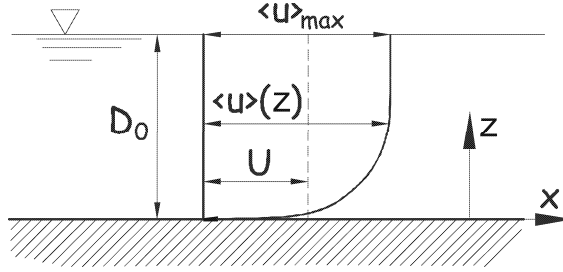


Figura 1.10: Andamento logaritmico del profilo di velocità in una corrente a pelo libero in moto turbolento.

Indicata con U_x la media di $\langle u_x \rangle$ sulla profondità si ha:

$$\frac{U_x}{u_*} = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} \left[\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{z}{D_0}\right) + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} \right] dz$$

e, posto $\eta = z/D_0$,

$$\begin{aligned} \frac{U_x}{u_*} &= \int_0^1 \left[\frac{1}{k} \ln (1 - \eta) + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} \right] d\eta = \frac{1}{k} \int_0^1 \ln (1 - \eta) d\eta + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} \\ &= \frac{1}{k} [\eta \ln (\eta) - \eta]_0^1 + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} \cong -\frac{1}{k} + \frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\langle u_x \rangle_{max}}{u_*} = \frac{1}{k} + \frac{U_x}{u_*}$$

e, in definitiva

$$\langle u_x \rangle = U_x + \frac{u_*}{k} \left[1 + \ln \left(1 - \frac{z}{D_0}\right) \right] \quad (6.66)$$

1.6.4 Bilanci energetici nei moti turbolenti

L'equazione dell'energia cinetica del moto medio

$$E_c = \rho \frac{\langle u_x \rangle^2 + \langle u_y \rangle^2 + \langle u_z \rangle^2}{2} \quad (6.67)$$

si ottiene moltiplicando per $\langle u_i \rangle$ la proiezione sull'asse i -esimo delle equazioni RANS (6.57), ovvero

$$\rho \langle u_i \rangle \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) = \langle u_i \rangle \frac{\partial (T_{ij}^\mu + T_{ij}^t)}{\partial x_j}$$

da cui,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle u_i \rangle (T_{ij}^\mu + T_{ij}^t) \right] - (T_{ij}^\mu + T_{ij}^t) \langle s_{ij} \rangle$$

essendo

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\partial E_c}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial E_c}{\partial x_j}.$$

Ricordando le espressioni delle tensioni viscosi e di quelle apparenti si ottiene così:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\langle p \rangle \langle u_i \rangle + 2\mu \langle u_i \rangle \langle s_{ij} \rangle - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \right] - \left[\mu \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \langle s_{ij} \rangle \right],$$

I primi tre termini tra parentesi quadre a secondo membro rappresentano, rispettivamente, il **lavoro di pressione** del moto medio, e il **trasporto di E_c dovuto agli sforzi viscosi** ed a quelli apparenti. Gli ultimi due termini tra parentesi quadre a secondo membro rappresentano il **lavoro di deformazione**, per unità di tempo, effettuato, rispettivamente, dagli **sforzi viscosi** e dagli **sforzi turbolenti**. Si noti come questo ultimo lavoro (i.e., $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle \langle s_{ij} \rangle$), **sottragga energia al moto medio** e, come vedremo, controlli la **produzione di energia cinetica turbolenta**. Infine, e' importante osservare che per campi di moto con **numeri di Reynolds sufficientemente elevati**, i termini viscosi (i.e., $2\mu \langle u_i \rangle \langle s_{ij} \rangle$ e $2\mu \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle$) possono essere trascurati e, quindi, la **struttura complessiva** del campo di moto è virtualmente **indipendente dalla viscosità**.

L'equazione che governa l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta e_c (cfr. equazione 6.59) si ottiene moltiplicando le equazioni di Navier-Stokes per u_i , median-do sulla turbolenza e sottraendo l'equazione dell'energia cinetica del moto medio. Si ottiene così la seguente equazione:

$$\frac{de_c}{dt} = \mathcal{P}_{rod} + \mathcal{R}_{ed} - \mathcal{D}_{iss}$$

essendo:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\mathcal{P}_{rod} = T_{ij}^t \langle s_{ij} \rangle = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle \langle s_{ij} \rangle$$

$$\mathcal{R}_{ed} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \langle u'_j p \rangle + \frac{\rho}{2} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle - 2\mu \langle u'_i s_{ij} \rangle \right]$$

$$\mathcal{D}_{iss} = -2\mu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$$

La **produzione** di energia turbolenta è dunque legata al lavoro di deformazione svolto dagli sforzi apparenti di Reynolds $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle \langle s_{ij} \rangle$, ovvero all'interazione tra gli sforzi apparenti di Reynolds, $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle$ ed i gradienti di velocità associati al moto medio (i.e., ai macrovortici), che controllano la velocità di deformazione $\langle s_{ij} \rangle$. Sono dunque i **macrovortici** che **estraggono energia** dal moto medio (ovvero comportano delle variazioni spaziali paragonabili a quelle proprie del gradiente della velocità media).

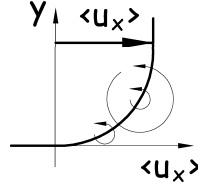


Figura 1.11: Interazione dei macrovortici con il moto medio

La **redistribuzione** di e_c è dovuta alla diffusione convettiva turbolenta dell'energia turbolenta di pressione ($\langle u'_j p \rangle$), dell'energia cinetica turbolenta ($\langle u'_i u'_i u'_j \rangle$) e dal lavoro, per unità di tempo, degli sforzi viscosi del moto turbolento ($-2\mu \langle u'_i s_{ij} \rangle$).

Infine, la **dissipazione** viscosa di e_c , associata al termine viscoso $2\mu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$, a differenza di quanto avviene per l'equazione dell'energia cinetica del moto medio E_c , non può in genere essere trascurata. La maggior parte dell'energia turbolenta viene **dissipata localmente** dai **microvortici** che si generano attraverso il processo di **vortex stretching**. Il termine $(\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u})$ che compare nell'equazione della vorticità

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

è infatti responsabile di un processo tipicamente **tridimensionale** per cui a partire dai macrovortici, interagenti con il moto medio, si formano in **cascata** vortici sempre più piccoli fino ad arrivare ai **microvortici**, la cui dimensione (**scala di Kolmogorov**) è determinata dalla viscosità del fluido. Tale processo comporta un **trasferimento di energia** dai macrovortici ai microvortici, dove l'energia è dissipata. Tale trasferimento di energia è dovuto al lavoro associato alla amplificazione e rotazione del vettore vorticità per effetto della velocità di deformazione degli elementi fluidi, descritto dal termine $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = \omega_i s_{ij}$.

Un tipico esempio di campo di moto turbolento è quello che generalmente si instaura nei corsi d'acqua naturali. All'interno della corrente è possibile individuare due strati. Nello **strato esterno** si formano dei **macrovortici** leggermente anisotropi, allungati cioè nella direzione del moto. La massima **produzione** di energia turbolenta si ha tuttavia nello **strato di parete**, dove si ha un significativo gradiente di velocità e si formano dei macrovortici più **piccoli e fortemente**

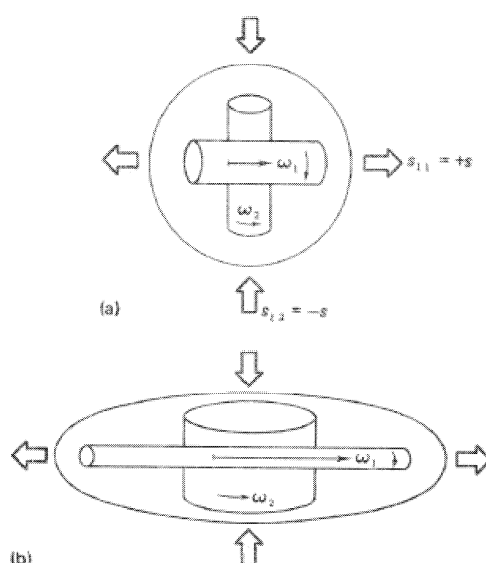


Figura 1.12: Schematizzazione del processo di vortex stretching.

anisotropi, ovvero con fissato orientamento. La **vorticità diffonde** dalla parete ($\nu \nabla^2 \vec{\omega}$) trasportando energia cinetica nella **regione esterna**. L'energia cinetica turbolenta tende tuttavia a diminuire localmente in virtù della **dissipazione viscosa** che si realizza **alla scala dei microvortici** (scala di Kolmogorov), comportando la trasformazione dell'energia cinetica turbolenta in **calore**.

Tale esempio evidenzia alcune delle caratteristiche essenziali della turbolenza sopra richiamate, ovvero, il carattere dissipativo del moto, la non-omogeneità e l'anisotropia dei vortici di maggiori dimensioni, e, viceversa, l'omogeneità e l'isotropia dei micro-vortici conseguenti al fenomeno del vortex-stretching.

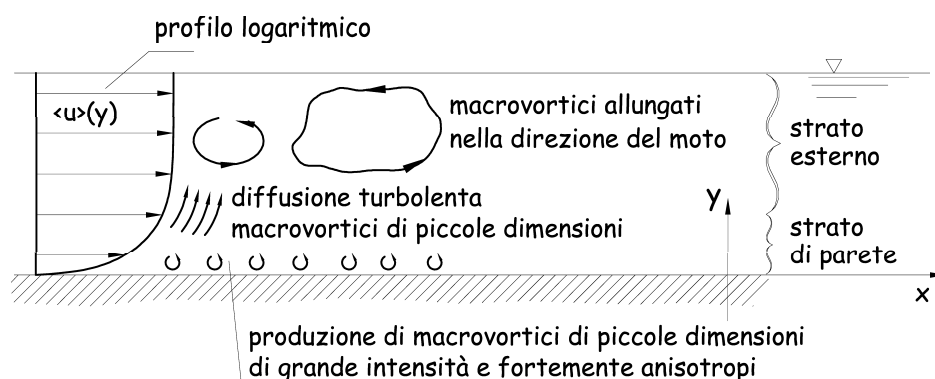


Figura 1.13: Caratteristiche del campo di moto turbolento che si realizza in una corrente a pelo libero

1.6.5 Descrizione statistica della turbolenza

La turbolenza, essendo una **grandezza complessa**, è rappresentabile solamente tramite un **insieme di numeri razionali**. Nel seguito vengono introdotte alcune delle grandezze utilizzate per caratterizzare un campo di moto turbolento, quali i valori medi, l'intensità turbolenta, le funzioni e i coefficienti di correlazione.

1.6.6 Valori medi

Come visto precedentemente, è pratica corrente nello studio della turbolenza suddividere una data grandezza f (e.g., la velocità, la pressione, la concentrazione) nella somma di un valore medio e una componente fluttuante.

$$f = \langle f \rangle + f', \quad \langle f' \rangle = 0$$

Nel caso di **turbolenza stazionaria** ($\partial \langle f \rangle / \partial t = 0$, Figura 1.14), il valore medio non dipende dal tempo e, quindi, è possibile introdurre la **media temporale**

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (6.68)$$

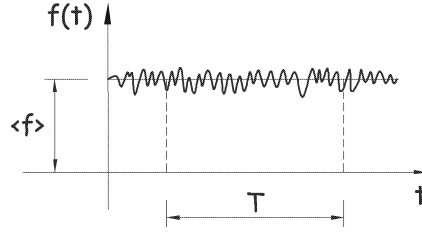


Figura 1.14: Definizione di valore medio nel caso di turbolenza stazionaria.

Tale definizione di media non è tuttavia utilizzabile per **turbolenza non stazionaria** ($\partial \langle f \rangle / \partial t \neq 0$, Figura 1.15). In tal caso è necessario ricorrere alla media d'insieme o alla media probabilistica. La **media d'insieme** è definita come segue:

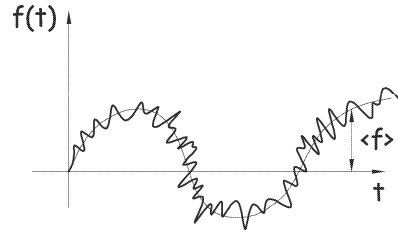


Figura 1.15: Esempio di turbolenza non stazionaria

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t) \quad (6.69)$$

essendo $f_i(t)$ il valore che la grandezza f assume al tempo t nel corso dell' i -esimo esperimento. È tuttavia evidente come tale definizione di media, pur essendo rigorosa, richiede che uno stesso esperimento sia condotto N volte con le stesse condizioni

al contorno e a partire dalle stesse condizioni iniziali e, quindi, risulta praticamente inapplicabile. Viene pertanto comunemente utilizzata la **media probabilistica** definita come:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f p(f|\vec{x}, t) df \quad (6.70)$$

dove $p(f|\vec{x}, t)$ è la **densità di probabilità**, ovvero la probabilità che nel punto $\vec{x}$, all'istante t , la funzione f sia compresa tra f e $f + df$. È noto dalla statistica che la densità di probabilità p gode delle seguenti **proprietà**:

$$p(f|\vec{x}, t) \leq 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(f|\vec{x}, t) df = 1$$

1.6.7 Intensità turbolenta

L'intensità turbolenta tiene conto dell'entità degli effetti associati alle fluttuazioni turbolente. Essa infatti coincide con lo **scarto quadratico medio** (o deviazione standard) σ_{ui} delle fluttuazioni di velocità u'_i .

$$\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} = \sigma_{ui} \quad (6.71)$$

e ha quindi le dimensioni L/T . La quantità σ_{ui}^2 rappresenta invece la **varianza** delle fluttuazioni u'_i . L'**intensità turbolenta relativa** si ottiene normalizzando σ_{ui} con la velocità media:

$$\frac{\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle}}{\langle u_i \rangle}, \quad (6.72)$$

1.6.8 Funzioni di correlazione spazio-temporale

Le funzioni di correlazione vengono utilizzate per analizzare la struttura del capo di moto associata alle fluttuazioni turbolente, ovvero la struttura delle formazioni vorticosi che tipicamente sono presenti in un campo di moto turbolento. Le **funzioni di correlazione** spazio-temporale sono in generale definite come:

$$Q_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2) = \langle u'_i(\vec{x}_1, t_1) u'_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle$$

Nel caso in cui $i = j$ si parla di correlazione (o autocorrelazione) mentre se $i \neq j$ si ha la cosiddetta correlazione incrociata (o covarianza).

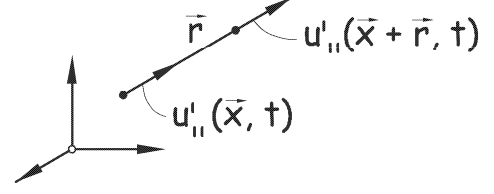
I **coefficienti di correlazione** spazio-temporale si ottengono normalizzando le funzioni di correlazione spazio-temporale con l'intensità turbolenta, ovvero

$$R_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2) = \frac{Q_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2)}{\sigma_{ui}(\vec{x}_1, t_1) \sigma_{uj}(\vec{x}_2, t_2)}$$

Nel caso in cui il tempo sia fissato ($t_1 = t_2 = t$) si hanno le funzioni e coefficienti di **correlazione spaziale**. Viceversa, se è fissata la posizione ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$) si ottengono le funzioni di **correlazione temporale**.

$$F(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle u'_{\parallel}(\vec{x}, t) u'_{\parallel}(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle$$

$$f(\vec{x}, \vec{r}, t) = \frac{F(\vec{x}, \vec{r}, t)}{F(\vec{x}, 0, t)}$$



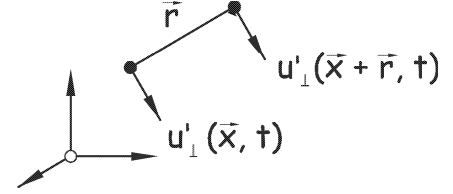
Consideriamo innanzitutto la **funzione** e il **coefficiente** di correlazione **longitudinali**, F e f , definiti come

Essi forniscono informazioni circa le dimensioni longitudinali (ovvero nel senso del moto medio) delle strutture vorticosi presenti nel campo fluido.

Le informazioni relative alle dimensioni trasversali dei vortici sono invece fornite dalla **funzione** e dal coefficiente di correlazione **lateral**, G e g ,

$$G(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle u'_{\perp}(\vec{x}, t) u'_{\perp}(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle$$

$$g(\vec{x}, \vec{r}, t) = \frac{G(\vec{x}, \vec{r}, t)}{G(\vec{x}, 0, t)}$$



Chiaramente, la determinazioni delle funzioni (coefficienti) di correlazione spaziale sopra definiti richiede che, ad un fissato istante, sia spazialmente nota la struttura del campo di moto. Ciò è possibile solo per campi di moto ottenuti numericamente (e.g., tramite DNS) mentre pone dei problemi pressochè insormontabili dal punto di vista sperimentale. Ecco il motivo per cui vengono comunemente introdotte le funzioni e i coefficienti di **correlazione temporale**. Essi si distinguono in funzioni (coefficienti) di tipo euleriano o lagrangiano, in relazione al tipo di velocità utilizzata nel loro calcolo.

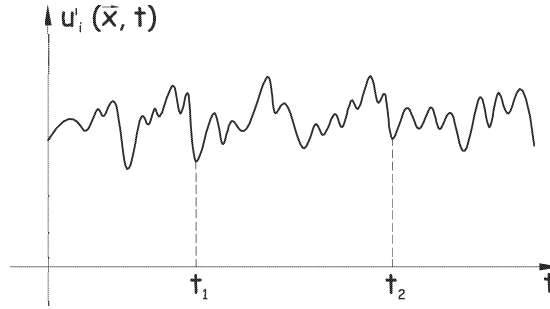


Figura 1.16: Tipico andamento temporale delle fluttuazioni turbolente della generica componente della velocità euleriana u'_i misurate in una fissata posizione $\vec{x}$.

Nel caso in cui si utilizzino i valori delle fluttuazioni di velocità misurate in una fissata posizione $\vec{x}$ si avranno le **funzioni** e i **coefficienti** di correlazione temporale **Euleriana**, Q_{ij} e R_{ij} , definiti come

$$Q_{ij}(\vec{x}, t_1, t_2) = \langle u'_i(\vec{x}, t_1) u'_j(\vec{x}, t_2) \rangle$$

$$R_{ij}(\vec{x}, t_1, t_2) = \frac{Q_{ij}(\vec{x}, t_1, t_2)}{\sigma_{ui}(\vec{x}, t_1) \sigma_{uj}(\vec{x}, t_2)}$$

Nel caso in cui, invece, si consideri una descrizione lagrangiana del campo di moto, ovvero si analizzino le fluttuazioni di velocità delle singole particelle fluide, si hanno le **funzioni** e i **coefficienti** di correlazione temporale **Lagrangiana**, Q_{ij}^L e R_{ij}^L ,

$$\begin{aligned} Q_{ij}^L(t, \vec{X}) &= \langle v'_i(0, \vec{X}) v'_j(t, \vec{X}) \rangle \\ R_{ij}^L(t, \vec{X}) &= \frac{Q_{ij}^L(t, \vec{X})}{\sigma_{vi}(0, \vec{X}) \sigma_{vj}(t, \vec{X})} \end{aligned}$$

dove $\vec{v}'(t, \vec{X})$ è la fluttuazione turbolenta al generico tempo t della velocità della particella che all'istante iniziale $t = 0$ si trova nel punto $\vec{X}$ (Figura 1.17).

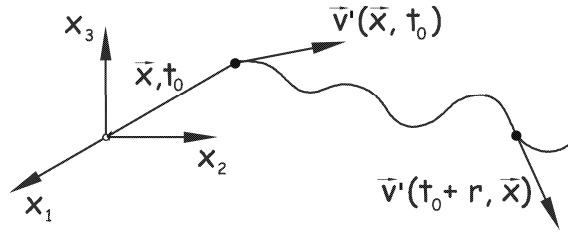


Figura 1.17: Descrizione lagrangiana di un campo di moto: traiettoria di una singola particella fluida e fluttuazioni turbolente della sua velocità.

1.6.9 Stazionarietà e omogeneità

I concetti di stazionarietà e omogeneità sono molto importanti nello studio dei campi di moto turbolenti. La condizione di **turbolenza stazionaria** si realizza spesso nella pratica: essa corrisponde infatti alla condizione di **moto permanente**. Si noti come la stazionarietà presuppone una costante produzione di energia turbolenta. Nel caso di turbolenza stazionaria la media non dipende dal tempo. Inoltre, al tendere all'infinito dell'intervallo di integrazione T la **media temporale** $\bar{u}_i(\vec{x})$ tende a **coincidere** con la **media probabilistica** $\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle$, ovvero

$$\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_i(\vec{x}, t + \tau) d\tau$$

Le funzioni e i coefficienti di correlazione temporale dipendono unicamente da $t = t_2 - t_1$ e non dagli istanti t_1 e t_2 considerati.

$$Q_{ij}(\vec{x}, t_1, t_2) = Q_{ij}(\vec{x}, t), \quad R_{ij}(\vec{x}, t_1, t_2) = R_{ij}(\vec{x}, t),$$

Più complessa è la nozione di omogeneità. Come evidenziato dalla discussione del campo di moto turbolento illustrato in Figura 1.13, mentre le strutture vorticosi di maggiori dimensioni (macrovortici) in genere dipendono dalla posizione e dalla

direzione, il processo di vortex stretching tende rendere omogenei e isotropi i vortici di più piccole dimensioni (microvortici). D'altra parte, pur non esistendo nella pratica un campo turbolento omogeneo **in senso assoluto** (esso, infatti, richiederebbe l'assenza di gradienti e, quindi, un dominio fluido infinitamente esteso), è tuttavia spesso possibile individuare **regioni omogenee limitate**, ovvero di dimensioni piccole rispetto alle scale delle disomogeneità macroscopiche e sufficientemente lontane da pareti e superfici libere. È inoltre possibile definire **regioni omogenee** in un **piano** o lungo una **determinata direzione** (e.g., moto uniforme).

Nel caso di **turbolenza omogenea** la media non dipende dallo spazio. Ne consegue che, al tendere all'infinito del volume di integrazione V la **media spaziale** tende a **coincidere** con la **media probabilistica**, $\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle$, ovvero

$$\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \int \int u_i(\vec{x} + \vec{\xi}, t) d\vec{\xi}$$

Le funzioni e i coefficienti di correlazione temporale dipendono unicamente da $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ e non dalle posizioni $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ considerate.

$$Q_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = Q_{ij}(\vec{r}, t), \quad R_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = R_{ij}(\vec{r}, t),$$

È possibile, nella pratica, avere campi turbolenti stazionari e omogenei? Come detto sopra la stazionarietà necessita di una continua produzione di energia turbolenta e, quindi, di gradienti di velocità del moto medio che estraggano energia dai macrovortici. La stazionarietà, pertanto, non appare compatibile con l'omogeneità in senso assoluto. E tuttavia nel caso di un **campo di moto omogeneo in una determinata direzione**: ad esempio nel caso del moto uniforme in un canale la produzione turbolenta risultante dall'interazione dei macrovortici con i gradienti verticali e trasversali del moto medio, si mantiene costante sia nel tempo (stazionarietà) sia nella direzione del moto medio (omogeneità longitudinale).

Un processo **stazionario** e **omogeneo** è **ergodico**. In tal caso **tutte** le possibili forme di **media** (temporale, spaziale, probabilistica, d'insieme) **convergono** alla **stessa quantità** (Figura 1.18).

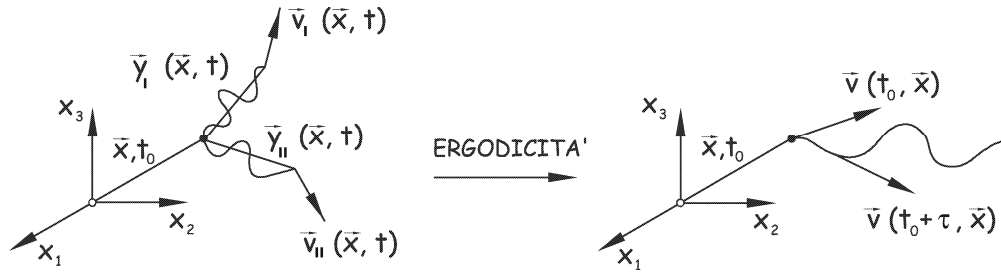


Figura 1.18: Conseguenze dell'ergodicità.

Il concetto di variabile ergodica, d'altra parte, ha delle importanti ricadute dal punto di vista statistico. In base al cosiddetto **teorema del limite centrale**, la **densità di probabilità** dei valori medi di **variabili stazionarie** tende ad avere la stessa forma, ovvero è di **tipo Gaussiano**.

Nel caso di **turbolenza stazionaria** e **omogenea** le funzioni di correlazione spaziali e temporali sono tali per cui

$$Q_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2) = Q_{ij}(\vec{r}, t), \quad R_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2) = R_{ij}(\vec{r}, t),$$

con $t = t_2 - t_1$ e $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$. Ciò comporta che una variabile ergodica diventa **statisticamente indipendente** da se stessa per $t \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow \infty$. Inoltre essa diventa scorrelata nel tempo per $t \rightarrow \infty$ e nello spazio per $r \rightarrow \infty$. Con particolare riferimento alle funzioni (coefficienti) di correlazione precedentemente visti, avremo:

$$\begin{aligned} f(r) &= f(-r), & g(r) &= g(-r), \\ R_{ij}(t) &= R_{ij}(-t), & R_{ij}^L(t) &= R_{ij}^L(-t) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$f(0) = g(0) = R_{ij}(0) = R_{ij}^L(0) = 1$$

$$f(r) \leq 1, \quad g(r) \leq 1, \quad R_{ij}(t) \leq 1, \quad R_{ij}^L(t) \leq 1$$

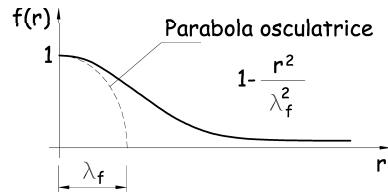
Sviluppando in serie di Taylor in un intorno di $r = 0$ e $t = 0$:

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + \frac{r^2}{2} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} \right]_{r=0} + O(r^4) \simeq 1 - \frac{r^2}{\lambda_f^2} \\ g(r) &= 1 + \frac{r^2}{2} \left[\frac{d^2 g}{dr^2} \right]_{r=0} + O(r^4) \simeq 1 - \frac{r^2}{\lambda_g^2} \\ R_{ij}(t) &= 1 + \frac{t^2}{2} \left[\frac{d^2 R_{ij}}{dt^2} \right]_{t=0} + O(t^4) \simeq 1 - \frac{t^2}{\tau_E^2} \\ R_{ij}^L(t) &= 1 + \frac{t^2}{2} \left[\frac{d^2 R_{ij}^L}{dt^2} \right]_{t=0} + O(t^4) \simeq 1 - \frac{t^2}{\tau_L^2} \end{aligned}$$

Otteniamo così le seguenti **scale caratteristiche**, strettamente associate alla geometria delle **strutture vorticosi** presenti nel moto turbolento:

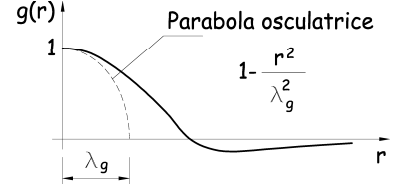
- Microscala e macroscale **spaziale longitudinale**

$$\lambda_f^{-2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \quad \Lambda_f = \int_0^\infty f(r) dr$$



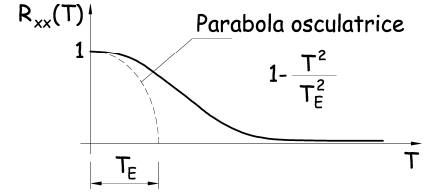
- Microscala e macroscale **spaziale trasversale**

$$\lambda_g^{-2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \quad \Lambda_g = \int_0^\infty g(r) dr$$



- Microscala e macroscale **temporale euleriana**

$$\tau_E^{-2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial t^2} \right]_{t=0}, \quad T_E = \int_0^\infty R_{ij}(t) dt$$



- Microscala e macroscale **temporale lagrangiana**

$$\tau_L^{-2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_{ij}^L}{\partial t^2} \right]_{t=0}, \quad T_L = \int_0^\infty R_{ij}^L(t) dt$$

La macroscale (o scala integrale) temporale euleriana consente di individuare il tempo ($t \gg T_E$) per cui la velocità misurata in un dato punto diventa **scorrelata**, **perdendo memoria** delle sue caratteristiche iniziali. Inoltre, sempre nell'ipotesi di turbolenza omogenea e isotropa, per $t \gg T_E$ la media temporale tende a coincidere con la media probabilistica. Analoghi ragionamenti per le macroscale scale spaziali Λ_f e Λ_g , che essenzialmente forniscono una stima delle dimensioni longitudinali e trasversali dei macrovortici, con $\Lambda_f \neq \Lambda_g$ data l'**anisotropia** propria delle strutture vorticosi di maggiori dimensioni.

Indicata con ℓ la scala integrale turbolenta e con v la scala della velocità associata all'intensità turbolenta, la produzione di energia associata al moto medio, per unità di tempo e unità di massa risulta $\mathcal{P}_{rod}/\rho = -\langle u'_i u'_j \rangle \langle s_{ij} \rangle \sim u^3/\ell$. In seguito al processo di vortex stretching descritto precedentemente, questa energia viene trasferita praticamente intatta ai vortici di piccole dimensioni, dove viene dissipata in calore.

La microscala λ sopra definita, associata alla curvatura delle autocorrelazioni spaziali, è detta anche microscala di Taylor. Essa è chiaramente inferiore alla scala integrale e, quindi, è rappresentativa di vortici aventi minori dimensioni di quelli che interagiscono con il moto medio, estraendone energia. Tuttavia, in un campo di moto turbolento le minori dimensioni sono quelle associate ai vortici che determinano le controllano la dissipazione di energia. Nell'ipotesi che, alle piccole scale, la turbolenza sia indipendente dalle caratteristiche dei macro-vortici e del moto medio e, quindi, omogenea e isotropa, la dinamica dei micro-vortici risulta controllata unicamente dal tasso con cui viene prodotta l'energia turbolenta e dalla viscosità cinematica, responsabile delle dissipazioni. In particolare, risulta ragionevole supporre, come fatto da Kolmogorov, che i tassi di produzione di energia e di dissipazione si

uguagliano. Risulta in tal modo possibile definire la cosiddetta micro-scala di Kolmogorov, ℓ_d , associata alle dimensioni dei più piccoli vortici presenti in un campo di moto turbolento. Indicati con ν e ϵ la viscosità cinematica e il tasso di dissipazione viscosa per unità di tempo e di massa, è immediato osservare che (Tennekes e Lumley, 1972):

$$\nu = \frac{\ell_d}{\tau_d} \quad \epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_c}{\partial t} = \frac{\ell_d^2}{\tau_d^3}$$

Ne conseguono che le seguenti micro-scale spaziali e temporali introdotte da Kolmogorov:

$$\tau_d = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad \ell_d = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

Si noti come il numero di Reynolds costruito con ℓ_d e con la velocità scala $v_d = \ell_d/\tau_d = (\nu\epsilon_c)^{1/4}$ risulti uguale a 1, confermando che il moto di questi micro-vortici è di tipo viscoso e che la dissipazione viscosa tende a bilanciare l'energia fornita adattando opportunamente la dimensione di tali vortici.

Osservando che $\epsilon \sim u^3/\ell$ nell'ipotesi che $\mathcal{P}_{rpd} \simeq \mathcal{D}_{iss}$, è immediato ottenere che:

$$\frac{\ell_d}{\ell} = R_\ell^{-3/4} \quad \frac{\tau_d}{\tau} = R_\ell^{-1/2} \quad \frac{v_d}{v} = R_\ell^{-1/4}$$

con $R_\ell = v\ell/\nu$ e τ scala temporale integrale, tipica dei macro-vortici.

Infine, la relazioni tra la micro-scala di Taylor e la macroscale ℓ è ottenuta associando λ , come spesso avviene per comodità, alla scala dei vortici che controllano le dissipazioni di energia. Ne consegue che $\mathcal{D}_{iss}/\rho = -2\nu\langle s_{ij}s_{ij} \rangle \sim \nu u^2/\lambda^2$, da cui:

$$\frac{\lambda}{\ell} \simeq R_\ell^{-1/2} \quad \frac{\lambda}{\ell_d} \simeq R_\ell^{1/4}$$

1.6.10 Spettro di energia

Nell'analizzare le caratteristiche di un campo di moto turbolento è spesso più comodo lavorare nel dominio delle frequenze, $\omega = 2\pi/\tau$, anzichè nel dominio del tempo τ . Il passaggio dal **dominio del tempo** al **dominio delle frequenze** (e viceversa) avviene tramite l'utilizzo delle **trasformate di Fourier**. Indicata con $f(t)$ una funzione assolutamente integrabile, non necessariamente periodica, e con i l'**unità immaginaria** di un numero complesso, la trasformata di Fourier **diretta** e **inversa** sono definite come:

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

La funzione $a(\omega)$, risultato della trasformata diretta, è la **densità dello spettro** e rappresenta come sono distribuite le frequenze del segnale $f(t)$. Noto lo spettro, il segnale originario è immediatamente determinato tramite la trasformata inversa.

Ad **esempio**, considerando la funzione di correlazione temporale $R_{ij}(t)$ nel punto fissato $\vec{x}$, si ottiene

$$E_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(t) e^{i\omega t} dt, \quad R_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

dove $E_{ij}(\omega)$ rappresenta lo **spettro 1D di energia**, che descrive come sono distribuite le frequenze contenute in $R_{ij}(t)$.

Lo spettro tridimensionale di energia $E(\vec{k})$ si ottiene in maniera del tutto analoga, considerando il dominio dei numeri d'onda $\vec{k}$ e le funzioni di correlazioni spaziali $R_{i,j}(\vec{r})$ per un tempo fissato t . In tal caso avremo che:

$$E_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}, \quad R_{ij}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

con $E_{ij}(\vec{k})$ tensore dello spettro. La somma $E_{ii}(\vec{k})$ delle componenti diagonali di tale tensore rappresentano l'energia cinetica associata al generico vettore dei numeri d'onda $\vec{k}$. Integrando tale somma su una superficie sferica di raggio k (con k modulo del vettore $\vec{k}$), si ottiene lo spettro tridimensionale nel dominio dei numeri d'onda (Batchelor, 1959) :

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_A E_{ii}(\vec{k}) dA(k) =$$

1.6.11 Ipotesi di Taylor

L'**ipotesi di Taylor** (nota anche come approssimazione della **turbolenza congelata**) consente di legare tra di loro il coefficiente di correlazione spaziale f ed il coefficiente di correlazione temporale euleriana, R . Essa richiede: i) condizioni di moto **unidirezionale uniforme** (ovvero $\vec{u} = (U_0, 0, 0) + (u'_x, u'_y, u'_z)$); ii) turbolenza **stazionaria** e **omogenea**, e consiste nell'assumere

$$\frac{\partial}{\partial t} \cong U_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

ovvero $\tau = r/U_0$. Ne discende immediatamente che

$$\begin{aligned} f(r) &= R(\tau) \\ \lambda_f &= U_0 \tau_E \\ \Lambda_f &= U_0 T_E \end{aligned}$$

Dal punto di vista fisico, l'approssimazione di turbolenza congelata comporta che le fluttuazioni in un fissato punto possono essere pensate come causate dall'intero campo di moto turbolento che attraversa quel punto con una velocità U_0 . In altre parole, l'oscillogramma delle fluttuazioni di velocità in un punto è approssimativamente uguale alla distribuzione, ad un certo istante, della velocità u_x lungo l'asse x che passa per tale punto.

È facile dimostrare che l'ipotesi di turbolenza congelata è valida se, come molto spesso accade nella pratica,

$$|u'_x| \ll U_0, \quad U_0 L / \nu \gg 1$$

Sotto tali ipotesi, infatti, i termini che compaiono a secondo membro dell'equazione di Reynolds in direzione lonfitudinale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_x}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'_x}{\partial x} = & - \left[u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y} + u'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

diventano trascurabili.

1.7 Equazioni delle onde lunghe su acque basse

Le equazioni di Reynolds (6.57) consentono di derivare un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali largamente utilizzate nella pratica ingegneristica per studiare i moti a superficie libera in acque cosiddette basse. Utilizzando il modello di chiusura di Boussinesq e ricordando la (6.55-b) si ottiene:

$$-\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = \nu_T \left(\frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \langle u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \nu_T \left(\frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \langle u_j \rangle}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \nu_T \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2}$$

Sostituendo tale espressione nelle (6.57) e sfruttando ancora l'equazione di continuità per il moto medio (6.55-b), le equazioni della quantità di moto diventano:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_j \rangle \langle u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} = (\nu + \nu_T) \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} \quad (7.73)$$

ovvero, in forma estesa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = & - \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} - \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} - \frac{\partial (\langle u_x \rangle \langle u_y \rangle)}{\partial y} - \frac{\partial (\langle u_x \rangle \langle u_z \rangle)}{\partial z} \\ & - (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial^2 \langle u_x \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_x \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_x \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.74-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = & - \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial t} - \frac{\partial (\langle u_x \rangle \langle u_y \rangle)}{\partial x} - \frac{\partial \langle u_y \rangle^2}{\partial y} - \frac{\partial (\langle u_z \rangle \langle u_y \rangle)}{\partial z} \\ & - (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.74-b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial z} = & - \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial t} - \frac{\partial (\langle u_x \rangle \langle u_z \rangle)}{\partial x} - \frac{\partial (\langle u_y \rangle \langle u_z \rangle)}{\partial y} - \frac{\partial \langle u_z \rangle^2}{\partial z} \\ & - (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.74-c)$$

La risoluzione di tali equazioni, tuttavia, risulta ancora troppo onerosa dal punto di vista computazionale qualora si vogliano studiare campi di moto relativamente estesi e geometricamente complessi. D'altra parte, nella pratica ingegneristica è spesso sufficiente conoscere macroscopicamente, ovvero mediate su una sezione, grandezze quali la velocità, la quantità di moto, l'energia. Appare quindi opportuno procedere ad ulteriori semplificazioni delle equazioni del moto, sfruttando le particolari caratteristiche fisiche esibite dal problema che si intende esaminare.

1.7.1 L'ipotesi di onde lunghe su acque basse

L'esempio che viene qui illustrato è quello inerente una vasta classe di moti a superficie libera in cui le componenti longitudinale $\langle u_x \rangle$ e trasversale $\langle u_y \rangle$ della velocità media sono di un ordine di grandezza superiori alla componente verticale $\langle u_z \rangle$. Ciò accade quando le scale spaziali caratterizzanti le variazioni delle grandezze del moto in direzione longitudinale e trasversale sono molto più grandi della profondità del moto: si parla in tal caso di moto di *onde lunghe in acque basse*. Tali ipotesi sono in genere verificate nella propagazione delle onde di piena nei corsi d'acqua e nella propagazione della marea in lagune costiere ed estuari.

Vediamo ora quali sono le conseguenze dell'ipotesi di onde lunghe su acque basse. Fissato un sistema di riferimento cartesiano x, y, z , avente l'asse z diretto secondo la verticale, siano D_0 la scala caratteristica delle profondità della corrente e L_0 la scala spaziale su cui si realizzano significative variazioni delle grandezze fisiche nella direzione longitudinale x e in quella trasversale y . Indicate con $\langle u_x \rangle, \langle u_y \rangle, \langle u_z \rangle$ le componenti (mediate nel tempo) del vettore velocità nelle direzioni x, y, z , siano U_0 l'ordine di grandezza delle componenti $\langle u_x \rangle, \langle u_y \rangle$ e W_0 quello della componente $\langle u_z \rangle$. L'ipotesi di onde lunghe su acque basse presuppone che

$$\frac{D_0}{L_0} = \epsilon \ll 1 \quad (7.75)$$

In base all'equazione di continuità si ha

$$\underbrace{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x}}_{O(\frac{U_0}{L_0})} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y}}_{O(\frac{U_0}{L_0})} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z}}_{O(\frac{W_0}{D_0})} = 0$$

Ne consegue che

$$W_0 \sim O(\epsilon U_0) \quad (7.76)$$

ovvero la componente della velocità nella direzione verticale risulta almeno di un ordine di grandezza inferiore alle componenti nelle direzioni longitudinale e trasversale. Analizziamo ora l'equazione dinamica nella direzione verticale z . Assumendo le seguenti scale (Ghetti, 1981):

$$t = O(\frac{L_0}{U_0}); \quad \langle p \rangle = O(\rho U_0^2); \quad h = O(D_0) \quad (7.77)$$

e utilizzando, per semplicità, il modello di chiusura di Boussinesq (6.58), dal momento che nel campo di moto esaminato si può assumere $\nu_T \sim O(U_0 D_0)$ l'equazione di Reynolds nella direzione z (cfr. eq. (7.74-c) porge

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z}}_{O(\frac{U_0^2}{D_0})} + \underbrace{g \frac{\partial h}{\partial z}}_{O(g)} = - \left(\underbrace{\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial t}}_{O(\epsilon^2 \frac{U_0^2}{D_0})} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_y \rangle \langle u_z \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_z \rangle^2}{\partial z}}_{O(\epsilon^2 \frac{U_0^2}{D_0})} \right) + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial z^2} \right)}_{O(\frac{1}{Re} \epsilon \frac{U_0^2}{D_0}); O(\frac{1}{Re} \epsilon^3 \frac{U_0^2}{D_0})} + \underbrace{\nu_T \left(\frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial z^2} \right)}_{O(\epsilon \frac{U_0^2}{D_0}); O(\epsilon^3 \frac{U_0^2}{D_0})} \quad (7.78)$$

essendo $Re = U_0 D_0 / \nu$. Appare innanzitutto evidente come, nelle situazioni di moto in cui, come quelle che qui si vogliono studiare, $Re \gg 1$ i termini viscosi risultano trascurabili a fronte di quelli dovuti alle tensioni di Reynolds. D'altra parte, i termini legati alle tensioni di Reynolds e quelli relativi alle componenti temporale e convettiva dell'accelerazione risultano di un ordine di grandezza inferiore al termine gravitazionale purchè siano soddisfatte, rispettivamente, le condizioni:

$$\epsilon^2 F_0^2 \ll 1, \quad \epsilon F_0^2 \ll 1 \quad (7.79)$$

dove $F_0^2 = U_0^2 / (g D_0)$ rappresenta il quadrato del numero di Froude caratteristico del moto. Tali disequaglianze sono in genere largamente soddisfatte nei campi di moto che stiamo qui esaminando. In conclusione, quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'equazione dinamica nella direzione verticale z si riduce a prescrivere che le pressioni siano distribuite idrostaticamente in tale direzione per cui

$$\langle p \rangle + \gamma h = \gamma H \quad (7.80)$$

avendo indicato con $H = H(x, y, t)$ la quota della superficie libera rispetto ad un assegnato piano di riferimento orizzontale.

Con un ragionamento del tutto analogo a quello sopra esposto, è facile dimostrare che anche nelle equazioni dinamiche relative alle direzioni x e y le tensioni di natura viscosa possono essere trascurate a fronte di quelle apparenti di Reynolds. Le equazioni dei moti di onde lunghe in acque basse pertanto possono essere poste nella forma:

$$\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} = 0 \quad (7.81-a)$$

$$\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} + g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right) \quad (7.81-b)$$

$$\frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_y \rangle \langle u_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_y \rangle^2}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_y \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} + g \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xy}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}^t}{\partial z} \right) \quad (7.81-c)$$

1.7.2 Le equazioni di De Saint Venant per i moti bidimensionali.

Procediamo ora ad una ulteriore semplificazione delle equazioni (7.81-b,b,c) basata sull'osservazione che in molti problemi applicativi è sufficiente conoscere i valori mediati sulla verticale delle componenti $\langle u_x \rangle, \langle u_y \rangle$ della velocità. Indicata con $\eta(x, y, t)$ la quota del fondo (che, in generale, può variare non solo nello spazio ma anche nel tempo), integriamo le (7.81-b,b,c) lungo la verticale. L'equazione di continuità (7.81-a) porge:

$$\int_{\eta}^H \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y} dz + \langle u_z \rangle|_H - \langle u_z \rangle|_{\eta} = 0 \quad (7.82)$$

Ma, in base al teorema di derivazione sotto il segno di integrale gli integrali che compaiono a primo membro diventano:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^H \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz - \frac{\partial H}{\partial x} \langle u_x \rangle|_H + \frac{\partial \eta}{\partial x} \langle u_x \rangle|_{\eta} \\ \int_{\eta}^H \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle u_y \rangle dz - \frac{\partial H}{\partial y} \langle u_y \rangle|_H + \frac{\partial \eta}{\partial y} \langle u_y \rangle|_{\eta} \end{aligned}$$

Inoltre, l'imposizione della condizione cinematica (1.23) sulla superficie libera $z = H(x, y, t) = 0$ e sul fondo $z = \eta(x, y) = 0$ comporta, rispettivamente,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left[\langle u_z \rangle - \langle u_x \rangle \frac{\partial H}{\partial x} - \langle u_y \rangle \frac{\partial H}{\partial y} \right]_{z=H} \quad (7.83-a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\langle u_z \rangle - \langle u_x \rangle \frac{\partial \eta}{\partial x} - \langle u_y \rangle \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{z=\eta} \quad (7.83-b)$$

Ne consegue che, indicata con $D = H - \eta$ la profondità locale della corrente e con

$$U_x = \frac{1}{D} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz \quad U_y = \frac{1}{D} \int_{\eta}^H \langle u_y \rangle dz \quad (7.84)$$

i valori locali delle componenti longitudinale e trasversale della velocità mediati lungo la verticale, l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial (U_x D)}{\partial x} + \frac{\partial (U_y D)}{\partial y} = 0 \quad (7.85)$$

L'equazione del moto nella direzione longitudinale x , integrata sulla verticale diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^H \left\{ \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right\} dz + \int_{\eta}^H g \frac{\partial H}{\partial x} dz = \\ \int_{\eta}^H \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (7.86)$$

Utilizzando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e le relazioni date dalle condizioni cinematiche in corrispondenza della superficie libera (7.83-a) e del fondo (7.83-b), il primo integrale a primo membro della (7.86) diventa

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^H \left\{ \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right\} dz = \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz \\
& - \left[\langle u_x \rangle \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial H}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial H}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=H} \\
& - \left[\langle u_x \rangle \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \eta}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \eta}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=\eta} \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz
\end{aligned}$$

D'altra parte, indicati con $\hat{u}_x, \hat{u}_y$ gli scostamenti delle velocità $\langle u_x \rangle, \langle u_y \rangle$ dai loro valori mediati sulla verticale U_x, U_y , è immediato dimostrare che

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz &= DU_x^2 + \int_{\eta}^H \hat{u}_x^2 dz \\
\int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz &= DU_x U_y + \int_{\eta}^H \hat{u}_x \hat{u}_y dz
\end{aligned}$$

Posto:

$$T_{xx}^d = -\frac{\rho}{D} \int_{\eta}^H \hat{u}_x^2 dz \quad T_{yx}^d = -\frac{\rho}{D} \int_{\eta}^H \hat{u}_x \hat{u}_y dz$$

possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^H \left\{ \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right\} dz = \\
& + \frac{\partial (U_x D)}{\partial t} + \frac{\partial (U_x^2 D)}{\partial x} + \frac{\partial (U_x U_y D)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (DT_{xx}^d)}{\partial x} + \frac{\partial (DT_{yx}^d)}{\partial y} \right] \quad (7.87)
\end{aligned}$$

Si noti come, analogamente a quanto avviene nel ricavare le equazioni di Reynolds, la nonlinearietà dei termini convettivi dell'accelerazione comporta che nell'effettuare il processo di media nascono i termini aggiuntivi DT_{xx}^d e DT_{yx}^d , legati agli scostamenti della velocità puntuale dal valore mediato sulla verticale. Tali termini sono *formalmente simili* a delle tensioni per cui vengono solitamente detti *tensioni apparenti dispersive*.

Il secondo integrale a primo membro della (7.86) risulta immediatamente integrabile e porge

$$\int_{\eta}^H g \frac{\partial H}{\partial x} dz = gD \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.88)$$

Consideriamo ora l'integrale che compare a secondo membro della (7.86). Utilizzando al solito il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^H \left\{ \frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right\} dz = \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H T_{xx}^t dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H T_{yx}^t dz \\ - \left[T_{xx}^t \frac{\partial H}{\partial x} + T_{yx}^t \frac{\partial H}{\partial y} - T_{zx}^t \right]_{z=H} \\ + \left[T_{xx}^t \frac{\partial \eta}{\partial x} + T_{yx}^t \frac{\partial \eta}{\partial y} - T_{zx}^t \right]_{z=\eta} \end{aligned}$$

I termini che compaiono a secondo membro tra parentesi quadre possono essere opportunamente semplificati ricordando che in base alla (1.22), i versori normali al fondo e alla superficie libera sono

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\mathcal{F}} = (n_{\mathcal{F}x}, n_{\mathcal{F}y}, n_{\mathcal{F}z}) &= \frac{(-\partial H/\partial x, -\partial H/\partial y, 1)}{\sqrt{(\partial H/\partial x)^2 + (\partial H/\partial y)^2 + 1}}; \\ \mathbf{n}_{\eta} = (n_{\eta x}, n_{\eta y}, n_{\eta z}) &= \frac{(-\partial \eta/\partial x, -\partial \eta/\partial y, 1)}{\sqrt{(\partial \eta/\partial x)^2 + (\partial \eta/\partial y)^2 + 1}} \end{aligned}$$

e che, in base alla definizione di tensione, $\mathbf{t} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})$. Segue immediatamente che

$$\frac{t_x|_{z=H}}{n_{\mathcal{F}z}} = \left[-\frac{\partial H}{\partial x} T_{xx}^t - \frac{\partial H}{\partial y} T_{yx}^t + T_{zx}^t \right]_{z=H} \quad (7.89)$$

$$\frac{t_x|_{z=\eta}}{n_{\eta z}} = \left[-\frac{\partial \eta}{\partial x} T_{xx}^t - \frac{\partial \eta}{\partial y} T_{yx}^t + T_{zx}^t \right]_{z=\eta} \quad (7.90)$$

dove $t_x|_{z=H}$, $t_x|_{z=\eta}$ rappresentano le componenti secondo l'asse x della tensione agente, rispettivamente, sulla superficie libera e sul fondo. E' evidente che nel caso di variazioni graduali sia della superficie libera sia del fondo risulta, con buona approssimazione

$$\frac{1}{n_{\mathcal{F}z}} = \sqrt{(\partial H/\partial x)^2 + (\partial H/\partial y)^2 + 1} \simeq 1 \quad (7.91)$$

$$\frac{1}{n_{\eta z}} = \sqrt{(\partial \eta/\partial x)^2 + (\partial \eta/\partial y)^2 + 1} \simeq 1 \quad (7.92)$$

Questo significa che è possibile confondere la normale alla superficie con la verticale e, quindi, assumere che $t_x|_{z=H} \cong \tau_{sx}$, $t_x|_{z=\eta} \cong \tau_{fx}$, essendo τ_{sx} e τ_{fx} le componenti

secondo x delle tensioni tangenziali che agiscono, rispettivamente, sulla superficie libera e sul fondo (cfr. figura xx).

Ne consegue che, posto:

$$\bar{T}_{xx}^t = \frac{1}{D} \int_{\eta}^H T_{xx}^t dz; \quad \bar{T}_{yx}^t = \frac{1}{D} \int_{\eta}^H T_{yx}^t dz;$$

l'integrale che compare a secondo membro della (7.86) assume la forma:

$$\int_{\eta}^H \left\{ \frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right\} dz = \frac{\partial(D\bar{T}_{xx}^t)}{\partial x} + \frac{\partial(D\bar{T}_{yx}^t)}{\partial y} + \tau_{sx} - \tau_{fx} \quad (7.93)$$

Sostituendo nella (7.86) le relazioni (7.87), (7.88), (7.93) e facendo delle considerazioni del tutto analoghe per l'equazione del moto nella direzione trasversale y , le equazioni del moto mediate sulla verticale risultano infine

$$\begin{aligned} \frac{\partial(DU_x)}{\partial t} + \frac{\partial(DU_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(DU_x U_y)}{\partial y} + gY \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{\rho}(\tau_{sx} - \tau_{fx}) \\ &+ \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} D(\bar{T}_{xx}^t + T_{xx}^d) + \frac{\partial}{\partial y} D(\bar{T}_{yx}^t + T_{yx}^d) \right\} \end{aligned} \quad (7.94-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(DU_y)}{\partial t} + \frac{\partial(DU_x U_y)}{\partial x} + \frac{\partial(DU_y^2)}{\partial y} + gD \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{\rho}(\tau_{sy} - \tau_{fy}) \\ &+ \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} D(\bar{T}_{xy}^t + T_{xy}^d) + \frac{\partial}{\partial y} D(\bar{T}_{yy}^t + T_{yy}^d) \right\} \end{aligned} \quad (7.94-b)$$

Le equazioni (7.94-a), (7.94-b) associate all'equazione di continuità (7.85) costituiscono le cosiddette *equazioni di de Saint Venant bidimensionali*.

E' da sottolineare che nella pratica ingegneristica vengono usualmente trascurati i termini associati alle variazioni spaziali in direzione longitudinale e trasversale delle tensioni apparenti di Reynolds mediate sulla verticale $\bar{\mathbf{T}}^t$ e delle tensioni apparenti dispersive $\mathbf{T}^d$ che nascono in seguito all'operazione di media lungo z . E, infatti, se vale l'ipotesi di onde lunghe su acque basse, effettuando un'analisi degli ordini di grandezza del tutto simile a quella utilizzata nello studio dell'equazione del moto lungo z è possibile dimostrare la trascurabilità delle derivate lungo x e lungo y di tali tensioni a fronte delle tensioni tangenziali (τ_{fx}, τ_{fy}) e (τ_{sx}, τ_{sy}) che si realizzano in corrispondenza del fondo e sulla superficie libera. Si noti, tuttavia, che esiste tutta una serie di problemi applicativi in cui la necessità di descrivere le *circolazioni secondarie* che nascono in seguito alla presenza di curve, allargamenti di sezione, ostacoli, etc. non consente di trascurare tali termini.

La quantificazione delle tensioni tangenziali che si realizzano in corrispondenza del fondo e sulla superficie libera pone un problema formalmente analogo a quello della chiusura della turbolenta incontrato nella derivazione delle equazioni di Reynolds. In particolare risulta necessario legare la tensione al fondo alla velocità mediata sulla verticale e la tensione sulla superficie libera alle caratteristiche del vento eventualmente agente su di essa. Per quanto concerne la tensione sul fondo

usualmente si assume che, in virtù della graduale variazione delle caratteristiche del moto, localmente la corrente si comporti come se il moto fosse uniforme, ovvero che

$$\frac{1}{\rho}(\tau_{fx}, \tau_{fy}) = g \frac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\chi^2}(U_x, U_y) \quad (7.95)$$

essendo χ il coefficiente di resistenza di Chezy.

1.7.3 Le equazioni di de Saint Venant per una corrente monodimensionale.

Un'ulteriore semplificazione del problema del moto delle correnti a superficie libera deriva dall'osservazione che spesso il campo di moto che si vuole studiare è caratterizzato da una direzione prevalente. Si pensi, ad esempio, al moto nei corsi d'acqua naturali o artificiali di sezione compatta o nei canali lagunari. In tal caso risulta sufficiente in gran parte delle applicazioni pratiche fare riferimento alle caratteristiche macroscopiche del moto descritte dai valori delle varie grandezze mediate in un piano ortogonale alla direzione prevalente del moto che, nel seguito, assumeremo coincidere con la coordinata longitudinale x .

La possibilità di schematizzare una corrente come monodimensionale comporta non solo che la sezione sia compatta ma che l'asse dell'alveo sia caratterizzato da piccole curvature in direzione trasversale (curvature di torsione) e in direzione verticale (curvature di flessione). In tal caso è infatti possibile trascurare i moti secondari che si generano nel piano della sezione in seguito allo squilibrio tra il gradiente trasversale di pressione e la forza centrifuga indotta dalle curvature delle linee di corrente. In sostanza si può assumere che nel piano della sezione il livello del pelo libero si mantenga orizzontale.

Inoltre le variazioni delle caratteristiche del moto nello spazio e nel tempo devono comunque essere comunque graduali. Sia dunque L_0 la scala spaziale lungo cui avvengono le variazioni graduali sia delle caratteristiche geometriche della sezione sia del campo di moto (i.e. della profondità e della velocità). Indicate con D_0 e B_0 le lunghezze scala relative alla profondità della corrente e alla dimensione trasversale della sezione si avrà:

$$\epsilon_y = \frac{B_0}{L_0} \ll 1 \quad \epsilon_z = \frac{D_0}{L_0} \ll 1 \quad (7.96)$$

Si noti come molto spesso nei corsi d'acqua $D_0 \ll B_0$ e, quindi, $\epsilon_y \gg \epsilon_z$; al limite si potrà avere $\epsilon_y \cong \epsilon_z$. Ai fini dell'analisi degli ordini di grandezza possiamo quindi assumere $\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$.

Analizziamo i termini che compaiono nell'equazione di continuità mediata sulla turbolenza.

$$\underbrace{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x}}_{O(\frac{U_0}{L_0})} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y}}_{O(\frac{V_0}{L_0})} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z}}_{O(\frac{W_0}{D_0})} = 0$$

Ne consegue che

$$(V_0, W_0) \sim O(\epsilon U_0) \quad (7.97)$$

con U_0 , V_0 e W_0 valori tipici delle tre componenti della velocità. Analizziamo ora le equazioni dinamiche nella direzione trasversale y e in quella verticale z . Si noti che, per le ipotesi sopra fatte, è possibile assumere $\partial h / \partial y = 0$, ovvero che $h = h(x, z, t)$.

Utilizzando per t , $\langle p \rangle$ e h le scale definite dalle (7.77) e, al solito, utilizzando per semplicità il modello di chiusura turbolento proposto da Boussinesq l'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini mostra come l'equazione di Reynolds nella direzione z (cfr. eq. (7.78)) assume la forma:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} + \rho g \frac{\partial h}{\partial z} = O(\epsilon) \quad (7.98)$$

nell'ipotesi, usualmente soddisfatta nel tipo di moti qui considerati, che valgano le disequaglianze:

$$\epsilon^2 F_0^2 \ll 1 \quad \epsilon F_0^2 \ll 1 \quad (7.99)$$

essendo $F_0 = \sqrt{U_0^2 / (g D_0)}$ il numero di Froude della corrente.

L'analisi degli ordini di grandezza applicata all'equazione di Reynolds nella direzione trasversale y porge:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y}}_{O(\frac{U_0^2}{D_0})} &= - \underbrace{\frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial t}}_{O(\epsilon^2 \frac{U_0^2}{D_0})} - \underbrace{\langle u_x \rangle \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial y} + \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_y \rangle}{\partial z}}_{O(\epsilon^2 \frac{U_0^2}{D_0})} \\ &+ \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial z^2} \right)}_{O(\frac{1}{Re} \epsilon \frac{U_0^2}{D_0}); O(\frac{1}{Re} \epsilon^3 \frac{U_0^2}{D_0})} \\ &+ \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial z^2} \right)}_{O(\epsilon \frac{U_0^2}{D_0}); O(\epsilon^3 \frac{U_0^2}{D_0})} \end{aligned} \quad (7.100)$$

Ne consegue che:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} = O(\epsilon) \quad (7.101)$$

Si può quindi concludere che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, le equazioni dinamiche nella direzione trasversale y e in quella verticale z si riducono a prescrivere che le pressioni siano distribuite idrostaticamente nel piano della sezione, ovvero

$$\langle p \rangle + \gamma h = \gamma H \quad (7.102)$$

essendo $H = H(x, t)$ la quota della superficie libera rispetto ad un assegnato piano di riferimento orizzontale.

Con riferimento alle notazioni riportate in figura xx, ricaviamo ora le equazioni di continuità e della quantità di moto in direzione longitudinale x integrate sulla generica sezione.

Al fine di integrare sulla sezione l'equazione di continuità è sufficiente integrare in direzione trasversale dell'equazione di continuità mediata sulla verticale (7.85) ricavata precedentemente. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{-B_1}^{B_2} \frac{\partial D}{\partial t} dy + \int_{-B_1}^{B_2} \frac{\partial U_x D}{\partial x} dy + \int_{-B_1}^{B_2} \frac{\partial U_y D}{\partial y} dy = \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-B_1}^{B_2} D dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B_1}^{B_2} U_x D dy \\ - \left[Y \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + U_x \frac{\partial B_2}{\partial x} - U_y \right) \right]_{y=B_2} \\ + \left[Y \left(\frac{\partial(-B_1)}{\partial t} + U_x \frac{\partial(-B_1)}{\partial x} - U_y \right) \right]_{y=-B_1} \end{aligned}$$

È immediato osservare che i termini tra parentesi quadre sono identicamente uguali a zero. Infatti, nel caso di una sezione qualsiasi in cui la profondità si annulla gradatamente spostandosi verso le rive si ha che $D|_{y=-B_1} = D|_{y=B_2} = 0$ mentre nel caso di sezione rettangolare la condizione cinematica applicata alle due sponde e integrata lungo la verticale impone che

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} + U_x \frac{\partial B_2}{\partial x} - U_y = 0, \quad \frac{\partial(-B_1)}{\partial t} + U_x \frac{\partial(-B_1)}{\partial x} - U_y = 0.$$

Indicata con $Q = UA$ portata che fluisce nella sezione ricordando che:

$$\int_{-B_1}^{B_2} D dy = A \quad \int_{-B_1}^{B_2} U_x D dy = Q \quad (7.103)$$

l'equazione di continuità mediata sulla sezione assume la classica forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.104)$$

Consideriamo ora l'equazione della quantità di moto nella direzione longitudinale x . La (7.81-b) integrata sulla sezione diventa:

$$\begin{aligned} \int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \left(\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right) dz + g \int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \frac{\partial H}{\partial x} dz = \\ + \frac{1}{\rho} \int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \left(\frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right) dz \quad (7.105) \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale il primo termine a primo membro della (7.105) diventa:

$$\begin{aligned}
& \int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \left(\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right) dz = \\
& + \int_{-B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz \right) dy \\
& - \int_{-B_1}^{B_2} \left[\langle u_x \rangle \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial H}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial H}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=H} dy \\
& + \int_{-B_1}^{B_2} \left[\langle u_x \rangle \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \eta}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \eta}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=\eta} dy
\end{aligned}$$

Gli integrali contenenti i termini tra parentesi quadre sono identicamente nulli in quanto le funzioni integrande rappresentano condizioni cinematiche in corrispondenza del pelo libero (7.83-a) e del fondo (7.83-b). Utilizzando nuovamente la regola di derivazione sotto il segno di integrale, il termine rimanente può essere elaborato come segue:

$$\begin{aligned}
& \int_{-B_1}^{B_2} dy \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz \right) = \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-B_1}^{B_2} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B_1}^{B_2} \int_{\eta}^H \langle u \rangle^2 dy dz \\
& - \left[\frac{\partial B_2}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial B_2}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz - \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz \right]_{y=B_2} \\
& + \left[\frac{\partial(-B_1)}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial(-B_1)}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz - \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz \right]_{y=B_1}
\end{aligned}$$

È evidente che i termini che compaiono tra parentesi quadre sono identicamente nulli. Nel caso di sezione rettangolare, infatti, essi coincidono con la condizione cinematica imposta in corrispondenza delle pareti laterali, moltiplicata per $\langle u_x \rangle$ e integrata lungo z . Nel caso in cui, invece, la profondità della sezione diminuisce gradualmente avvicinandosi alle sponde (cfr. figura xx) ricordando le (7.84) e utilizzando le seguenti definizioni:

$$\int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz = \beta_1 D U_x^2, \quad \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz = \beta_2 D U_x U_y$$

conviene riscrivere tali termini nella forma:

$$\frac{\partial B}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial B}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dz - \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle dz = D \left(U_x \frac{\partial B}{\partial t} + \beta_1 U_x^2 \frac{\partial B}{\partial x} - \beta_2 U_x U_y \right)$$

con B alternativamente uguale a B_2 o a $-B_1$. È allora immediato osservare che tali espressioni calcolate in $y = B_2$ e in $y = -B_1$ sono identicamente nulle in quanto $D|_{y=B_2} = D|_{y=-B_1} = 0$.

Indicate con U la velocità media nella sezione e con A l'area liquida della sezione, per definizione si avrà:

$$\int_{-B_1}^{B_2} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle dy dz = UA, \quad \int_{-B_1}^{B_2} \int_{\eta}^H \langle u_x \rangle^2 dy dz = \beta AU^2$$

potremo infine scrivere:

$$\int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \left(\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_x \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_x \rangle \langle u_z \rangle}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial AU}{\partial t} + \frac{\partial \beta AU^2}{\partial x} \quad (7.106)$$

Il secondo termine a primo membro della (7.105) è immediatamente integrabile in quanto, per le ipotesi fatte, H dipende solo da x e t . Si avrà quindi:

$$g \int_{y=-B_1}^{y=B_2} dy \int_{\eta}^H \frac{\partial H}{\partial x} dz = gA \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.107)$$

Il termine a secondo membro della (7.105), infine, può essere sviluppato come segue utilizzando, al solito, la regola di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-B_1}^{B_2} dy \int_{\eta}^H \left(\frac{\partial T_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^t}{\partial z} \right) dz = \\ + \int_{-B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H T_{xx}^t dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H T_{xy}^t dz \right) dy \\ - \int_{-B_1}^{B_2} \left[T_{xx}^t \frac{\partial H}{\partial x} + T_{xy}^t \frac{\partial H}{\partial y} - T_{xz}^t \right]_{z=H} dy \\ - \int_{-B_1}^{B_2} \left[T_{xx}^t \frac{\partial \eta}{\partial x} + T_{xy}^t \frac{\partial \eta}{\partial y} - T_{xz}^t \right]_{z=\eta} dy \end{aligned} \quad (7.108)$$

Introducendo le condizioni dinamiche sulla superficie libera (7.89) e sul fondo (7.90), il secondo e il terzo termine a secondo membro risultano:

$$\int_{-B_1}^{B_2} \left[T_{xx}^t \frac{\partial H}{\partial x} + T_{xy}^t \frac{\partial H}{\partial y} - T_{xz}^t \right]_{z=H} dy = \int_{-B_1}^{B_2} \frac{t|_{z=H}}{n_{\mathcal{F}z}} dy \quad (7.109-a)$$

$$\int_{-B_1}^{B_2} \left[T_{xx}^t \frac{\partial \eta}{\partial x} + T_{xy}^t \frac{\partial \eta}{\partial y} - T_{xz}^t \right]_{z=\eta} dy = \int_{-B_1}^{B_2} \frac{t|_{z=\eta}}{n_{\eta z}} dy \quad (7.109-b)$$

Anche nel caso qui considerato, avendo fatto l'ipotesi di variazioni gradualità sia della superficie libera sia del fondo è possibile confondere la normale con la verticale e porre:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{\mathcal{F}z}} &= \sqrt{(\partial H / \partial x)^2 + (\partial H / \partial y)^2 + 1} \simeq 1 \\ \frac{1}{n_{\eta z}} &= \sqrt{(\partial \eta / \partial x)^2 + (\partial \eta / \partial y)^2 + 1} \simeq 1 \end{aligned}$$

Ne consegue che $t_x|_{z=H} \cong \tau_{sx}$, $t_x|_{z=\eta} \cong \tau_{fx}$, essendo τ_{sx} e τ_{fx} le componenti secondo x delle tensioni tangenziali che agiscono, rispettivamente, sulla superficie libera e sul fondo (cfr. figura xx). Indicati con B la larghezza dell'alveo in corrispondenza della superficie libera e con c il contorno bagnato della sezione i valori mediati sulla sezione delle componenti secondo x degli sforzi tangenziali al fondo $\tilde{\tau}_{fx}$ e sulla superficie libera $\tilde{\tau}_{sx}$ risultano:

$$\int_{-B_1}^{B_2} \frac{t|_{z=H}}{n_{\mathcal{F}z}} dy = \int_{-B_1}^{B_2} \tau_{fx} dy = c\tilde{\tau}_{fx}, \quad \int_{-B_1}^{B_2} \frac{t|_{z=\eta}}{n_{\eta z}} dy = \int_{-B_1}^{B_2} \tau_{sx} dy = B\tilde{\tau}_{sx},$$

Per quanto concerne l'integrale che compare a primo membro della (7.108), definiti:

$$\int_{\eta}^H T_{xx}^t dz = D\bar{T}_{xx}^t, \quad \int_{\eta}^H T_{xy}^t dz = D\bar{T}_{xy}^t,$$

esso può essere riscritto nella forma:

$$\begin{aligned} \int_{-B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H T_{xx}^t dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H T_{xy}^t dz \right) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B_1}^{B_2} D\bar{T}_{xx}^t dy \\ &- \left[Y \left(T_{xx}^t \frac{\partial B_2}{\partial x} - T_{xy}^t \right) \right]_{y=B_2} + \left[Y \left(T_{xx}^t \frac{\partial B_2}{\partial x} - T_{xy}^t \right) \right]_{y=-B_1} \end{aligned}$$

È immediato osservare che i termini tra parentesi quadre sono identicamente uguali a zero in quanto $D|_{y=-B_1} = D|_{y=B_2} = 0$.

In definitiva, l'equazione della quantità di moto nella direzione longitudinale x , integrata sulla sezione assume la forma:

$$\frac{\partial(UA)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta U^2 A)}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -c \frac{\tilde{\tau}_{fx}}{\rho} + B \frac{\tilde{\tau}_{sx}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B_1}^{B_2} Y \bar{T}_{xx}^t dy \quad (7.110)$$

Si noti come, l'ultimo termine a secondo membro, rappresentante la variazione lungo x della tensione normale nella direzione del moto, viene generalmente trascurato nelle applicazioni ingegneristiche. Inoltre, in virtù dell'ipotesi fatta che le caratteristiche del campo di moto varino gradualmente sia nel tempo sia nello spazio, è possibile ovvero assumere che le perdite di energia siano equivalenti a quelle che si avrebbero in condizioni di moto uniforme a parità di area liquida e velocità. Ne consegue che:

$$\frac{\tilde{\tau}_{fx}}{\rho} = g \frac{U^2}{\chi^2} \quad (7.111)$$

In assenza di azioni apprezzabili in corrispondenza della sulla superficie libera (ad esempio indotte dalla presenza di vento) le *equazioni di de Saint Venant* per una corrente monodimensionale, scritte in termini delle variabili U (velocità media sulla sezione) e D profondità media nella sezione, assumono la classica forma:

$$\frac{\partial BD}{\partial t} + \frac{\partial BDU}{\partial x} = 0 \quad (7.112-a)$$

$$\frac{\partial(UBD)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta U^2 BD)}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gc \frac{U^2}{\chi^2} = 0 \quad (7.112-b)$$

Capitolo 2

Generalità sui processi di trasporto

2.1 Elementi di base di un bilancio di massa

La dinamica della concentrazione di una determinata sostanza e, quindi, il grado di inquinamento ad essa connessa, è in genere valutata tramite l'utilizzo estensivo di *bilanci di massa*. Tali bilanci consentono di determinare l'evoluzione spazio-temporale della concentrazione dell'inquinante in relazione alle caratteristiche del campo di moto proprio del corpo idrico in esame e ai processi chimici, fisici e biologici che in esso avvengono.

Il bilancio di massa all'interno di un qualsiasi corpo idrico comporta innanzitutto l'individuazione di un ben definito **volume di controllo** V . Tale volume può essere *infinitesimo* o *finito* (ad esempio, il volume di un intero lago): nel primo caso la dinamica della concentrazione di una determinata sostanza è retta da una *equazione differenziale* mentre nel secondo caso si ottiene una *equazione integrale*.

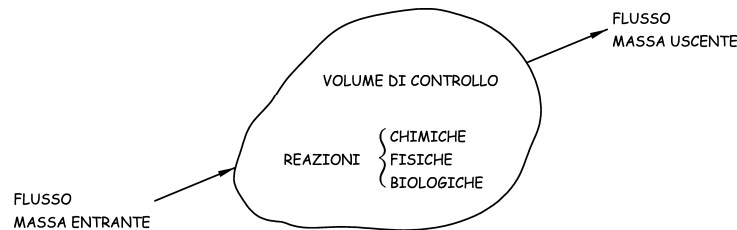


Figura 2.1: Elementi base di un bilancio di massa.

Indicata con M la massa della generica sostanza contenuta nel volume V , il bilancio di massa nell'unità di tempo comporta che:

$$\frac{dM}{dt} = Q_m^{in} - Q_m^{out} \pm R \quad (1.1)$$

essendo Q_m^{in} e Q_m^{out} i flussi di massa entranti e uscenti e R un termine che tiene conto delle **reazioni** chimiche, fisiche e biologiche a cui è soggetta la sostanza in esame (il segno positivo essendo associato alla produzione di una certa specie e quello negativo al decadimento).

La sostanza oggetto di studio viene definita come **passiva** nel caso essa venga trasportata senza alterare il campo idrodinamico (e.g., ossigeno disciolto, BOD, sedimento a basse concentrazioni), altrimenti essa viene definita come **attiva** (e.g., sedimento a elevate concentrazioni, acqua salata). La conoscenza dei flussi di massa entranti e uscenti, siano essi puntuali o spazialmente integrati, richiede siano in generale note le caratteristiche del **campo idrodinamico**. Il termine di reazione R è ovviamente nullo nel caso di un **inquinante non-reattivo**. Infine, in **condizioni stazionarie** il termine dM/dt è nullo.

Le proprietà del campo idrodinamico e dei processi di reazione in gioco sono in generale determinate tramite misure di campo, esperimenti di laboratorio e modelli numerici che, in relazione al problema considerato, risolvono le equazioni del moto 3D (mediate sulla turbolenza), 2D (mediate sulla verticale) o 1D (mediate sulla sezione) descritte nel capitolo precedente.

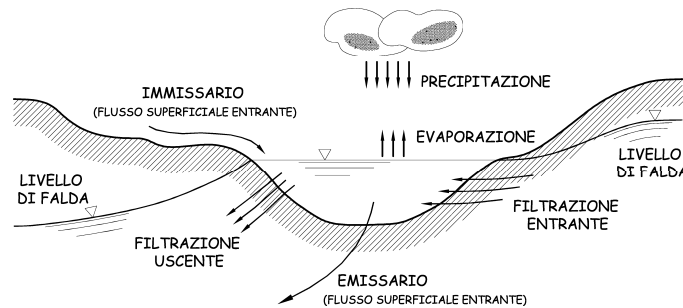


Figura 2.2: Esempio di bilancio della massa liquida in un lago.

2.1.1 Calibrazione e verifica dei modelli

La calibrazione e validazione di un dato modello matematico richiede di norma due serie indipendenti di misure della grandezza in esame, effettuate in campo o in laboratorio.

Una prima serie è utilizzata per la calibrazione del modello, ovvero per l'assegnazione dei coefficienti e delle costanti che in esso compaiono. Nel caso si utilizzino dati di letteratura si può procedere a un adattamento (tuning) dei vari coefficienti, ma *mai* al di fuori degli intervalli sperimentali per cui tali coefficienti sono stati determinati.

La seconda serie di misure, ovviamente indipendente dalla prima, è invece utilizzata per validare il modello, ovvero valutare la capacità di riprodurre le concentrazioni osservate in condizioni diverse da quelle per cui il modello è stato calibrato.

2.1.2 Processi di trasporto

Il comportamento di una sostanza liquida immessa in un corpo idrico è controllato da una serie di processi fisici che dipendono strettamente dalle caratteristiche idrodinamiche del campo idrico.

Nel caso di un *fluido in quiete*, le molecole della sostanza immessa tendono progressivamente a occupare l'intero volume fluido, eliminando così i gradienti spaziali

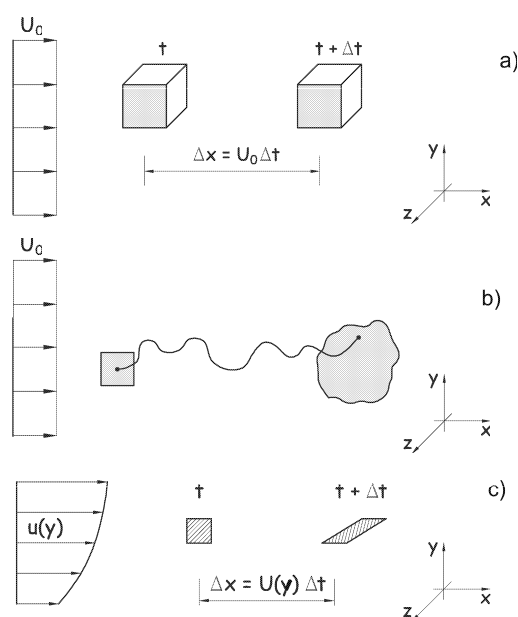


Figura 2.3: Esempio di: a) **convezione/avvezione uniforme** in assenza di gradienti spaziali di velocità e moto laminare; b) **convezione/avvezione uniforme** in assenza di gradienti spaziali di velocità e moto turbolento; c) **dispersione idrodinamica** nel caso di un campo di moto laminare.

di concentrazione. Tale comportamento è associato alla cosiddetta diffusione molecolare indotta dall'agitazione delle molecole fluide. Il moto casuale delle molecole provoca una **migrazione** delle sostanze disciolte dalle regioni ad **alta** concentrazione a quelle a **bassa** concentrazione in base alla **legge di Fick** (cfr. paragrafo). Tale modalità di trasporto non ha una grande importanza nei corpi idrici naturali eccetto nel caso del *trasporto all'interfaccia tra aria-acqua* o nei *pore dei sedimenti*.

Nel caso di un fluido in moto con velocità uniforme (ovvero in assenza di gradienti spaziali di velocità) la corrente tende a trasportare gli elementi fluidi (e le sostanze in essi disciolte) **senza produrre deformazioni** (Figura 2.3a). In tal caso si parla di pura **convezione** nel caso di una proprietà intrinseca al fluido quale (e.g., la quantità di moto o la temperatura) o pura **avvezione** nel caso di sostanza disciolta o sospesa nella fase fluida (e.g., BOD, ossigeno disciolto).

Nel caso di *moto turbolento* le **fluttuazioni** di velocità e di concentrazione producono un effetto del tutto analogo a quello dell'agitazione molecolare (Figura 2.3b). La diffusione **turbolenta** che ne consegue si somma a quella molecolare che, tuttavia risulta di uno/due ordini di grandezza inferiore (paragrafo 4.1)

Nel caso in cui nel campo di moto siano presenti dei *gradienti spaziali* di velocità il trasporto di un dato inquinante e, quindi, la dinamica della sua concentrazione, è anche condizionato dalla cosiddetta dispersione idrodinamica (Capitolo 5) dovuta alla deformazione degli elementi fluidi (Figura 2.3c).

Come illustrato nelle Figure 2.4a-2.4e, numerose sono le cause che, in natura, determinano l'insorgere di gradienti spaziali di velocità e, quindi, contribuiscono alla dispersione idrodinamica. Nel caso più generale a tali processi si sommano quelli reattivi di origine chimica, fisica o biologica. Il trasporto di sostanze inquinanti

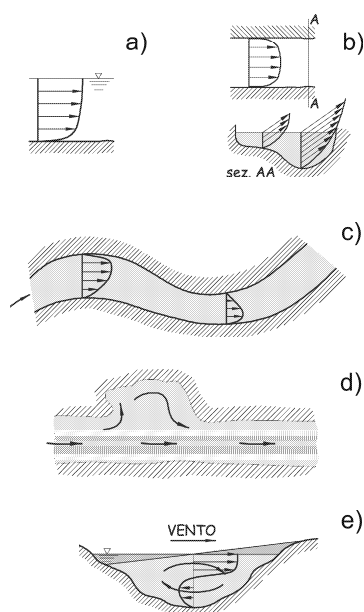


Figura 2.4: Esempi di gradienti di velocità. a) **Variazioni verticali** dovute alla condizione di aderenza alla parete; b) **variazioni trasversali** associate alla topografia del fondo e alla presenza delle sponde; c) **variazioni trasversali** dovute alla presenza di **curve**; d) variazioni trasversali dovute alla presenza di **espansioni laterali** (dead zones); e) azione del **vento** su corpi idrici estesi (i.e. con ampio fetch) quali laghi, lagune, foci fluviali;

nei **corsi d'acqua** è fortemente condizionato dall'**avvezione** e, sia pure in maniera minore, dalla **dispersione idrodinamica**. Viceversa, nei **laghi** e negli **estuari** è generalmente la dispersione idrodinamica il meccanismo predominante.

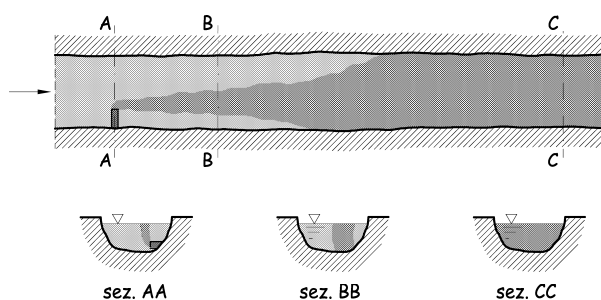


Figura 2.5: Esempio dell'evoluzione spaziale della nuvola formata da un inquinante scaricato localmente in un corso d'acqua

Un tipico esempio che illustra come i meccanismi di trasporto sopra descritti determinino il comportamento della nuvola di inquinante è quello relativo all'**immissione di uno scarico in un corso d'acqua** (Figura 2.5). In un intorno dell'immissione il mescolamento è condizionato dalla **quantità di moto** dell'inquinante stesso e dagli eventuali effetti di **galleggiamento** connessi alla differenza di densità tra l'inquinante e il fluido ricevente. La **diffusione turbolenta** e il **trasporto** da par-

te della corrente determinano un ulteriore mescolamento sia lungo la **verticale** sia in direzione **trasversale**. Quando il **mescolamento** sulla sezione **trasversale** è **completo** (ovvero le particelle di inquinante si sono distribuite sull'intera sezione del corso d'acqua) entrano in gioco gli effetti di **dispersione longitudinale** legati alla non uniforme distribuzione della velocità nella sezione trasversale del corso d'acqua.

2.2 Definizioni

Si definisce **concentrazione volumetrica** della generica specie chimica la quantità:

$$c = \lim_{\delta V_f \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V_f} \quad (2.2)$$

dove δV_f è il volume elementare della fase fluida mentre δM è la massa della specie chimica contenuta in δV_f . Nel caso di N specie chimiche si avrà $c = c_1 + c_2 + \dots + c_N$. Le unità di misura della concentrazione volumetrica sono quelle di una massa per unità di volume (e.g., kg/m^3 nel sistema internazionale).

Indicata con M_f la massa del fluido contenuto in V_f , Si definisce **concentrazione di massa** della generica specie chimica la quantità:

$$\hat{c} = \lim_{\delta V_f \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta M_f}, \quad (2.3)$$

espressa in % (come, ad esempio, la salinità).

Si definisce **densità** della fase fluida la quantità:

$$\rho = \lim_{\delta V_f \rightarrow 0} \frac{\delta M_f}{\delta V_f}, \quad (2.4)$$

espressa in kg/m^3 se si utilizza il sistema internazionale.

Il legame tra concentrazione volumetrica e concentrazione di massa si ricava facilmente osservando che:

$$\hat{c} = \lim_{\delta V_f \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta M_f} = \lim_{\delta V_f \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V_f} \frac{\delta V_f}{\delta M_f} = \frac{c}{\rho} \quad (2.5)$$

Si definisce **velocità assoluta** di una generica specie chimica la quantità:

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}, \quad (2.6)$$

dove, come illustrato in Figura 2.6, $\vec{u}$ è la **velocità media della miscela** fluida e $\vec{v}$ è la **velocità di diffusione** (i.e., velocità relativa) della specie chimica.

Si definisce **flusso di massa assoluto** della generica specie chimica la quantità:

$$\vec{q}_m = c \vec{v}_a \quad (2.7)$$

avente le dimensioni $M/(L^2T)$. Nel caso di N specie chimiche si scrive:

$$c \vec{v}_a = c_1 \vec{v}_{a1} + c_2 \vec{v}_{a2} + \dots + c_N \vec{v}_{aN} \quad (2.8)$$

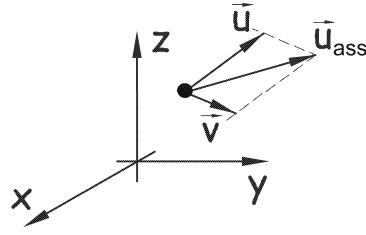


Figura 2.6: Definizione di velocità di una generica specie chimica.

Infine, si definisce **flusso di massa relativo** della generica specie chimica la quantità:

$$\vec{q}_m^r = c(\vec{v}_a - \vec{u}) = c\vec{v} \quad (2.9)$$

Si definisce **portata di massa** della generica specie chimica il flusso di massa che attraversa la superficie $\mathcal{S}$ nell'unità di tempo (cfr. Figura 2.7), ovvero:

$$Q_m = \int_{\mathcal{S}} \vec{q}_m \cdot \vec{n} dS \quad (2.10)$$

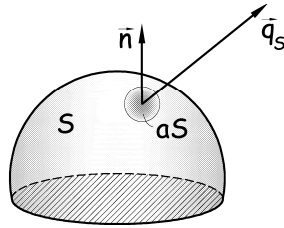


Figura 2.7: Definizione di portata di massa.

Capitolo 3

Diffusione molecolare e turbolenta

3.1 Diffusione molecolare

La diffusione molecolare è determinata dall'agitazione delle molecole fluide. Il moto casuale di tali molecole provoca una **migrazione** delle sostanze disciolte dalle regioni ad **alta** concentrazione alle regioni a **bassa** concentrazione. Nel caso di **fluido in quiete** e in **assenza di reazioni**, tale migrazione può essere descritta mediante la **legge di Fick**, basata sui seguenti **assiomi**:

- 1) il flusso di massa di soluto è funzione del gradiente di concentrazione

$$\vec{q}_m = f(\nabla c); \quad (1.1)$$

- 2) il processo è **isotropo** (non dipende dalla direzione);
- 3) il processo è **omogeneo** (non dipende dalla posizione);
- 4) il legame è **lineare**.

Ne consegue che

$$\vec{q}_m = -\mathcal{D} \nabla c \quad (1.2)$$

dove $\mathcal{D}$ è il **coefficiente di diffusione molecolare**, mentre il **segno meno** tiene conto del fatto che la diffusione molecolare tende ad eliminare i gradienti di concentrazione e, quindi, il flusso di soluto è diretto nel senso delle **concentrazioni decrescenti**. Tale legge può essere estesa al **caso di un fluido in movimento** sostituendo il **flusso di massa relativo** al flusso di massa assoluto.

Il coefficiente $\mathcal{D}$ è in generale funzione della temperatura Θ e della pressione p , ovvero $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Theta, p)$. In particolare $\mathcal{D}$ aumenta con la temperatura ed è inversamente proporzionale alla pressione. In assenza di significative variazioni spaziali di temperatura e pressione, $\mathcal{D}$ può essere considerato omogeneo (indipendente dalla posizione) e isotropo (indipendente dalla direzione) e pari a

$$\mathcal{D} \sim (1 - 2) \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s} \quad (1.3)$$

Il coefficiente $\mathcal{D}$ risulta praticamente indipendente dalla composizione della miscela. Ad esempio nel caso di $N_a C_l$ e $K M_n O_4$ in acqua a $15^\circ C$ si ha:

$$\mathcal{D}_{N_a C_l} = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/s, \quad \mathcal{D}_{K M_n O_4} = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/s.$$

Al fine di determinare la scala spaziale caratterizzante il processo diffusivo è importante osservare che le **dimensioni** di $\mathcal{D}$ sono quelle di una lunghezza al quadrato divisa per un tempo, ovvero:

$$[\mathcal{D}] = L^2/T$$

e, quindi $L \propto \sqrt{\mathcal{D}T}$

3.2 L'equazione differenziale della diffusione molecolare

Si consideri il **bilancio di massa** di un soluto contenuto all'interno di un volume di controllo $V(t)$ che, in generale, può variare nel tempo (Figura 3.1).

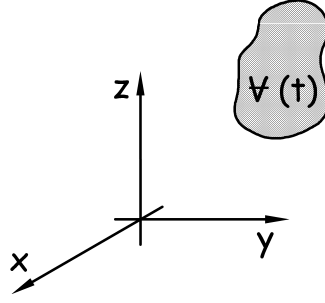


Figura 3.1: Definizione del volume di controllo utilizzato per il bilancio di massa.

In assenza di reazioni chimiche la massa contenuta in tale volume,

$$M = \int_V c \, dV, \quad (2.4)$$

si deve conservare, ovvero:

$$\frac{d}{dt} \int_V c \, dV = 0 \quad (2.5)$$

Ma, indicato con V_0 il **volume fisso** occupato dal fluido al tempo iniziale $t = 0$, e osservando che $dV = J dV_0$, essendo J il determinante Jacobiano della trasformazione di coordinate da V a V_0 , è possibile scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V c \, dV = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (Jc) \, dV_0 = \int_{V_0} \left(J \frac{dc}{dt} + c \frac{dJ}{dt} \right) dV_0$$

D'altra parte si può dimostrare che (Pitteri, 2009, Batchelor, 1967):

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \vec{v}_a = J \nabla \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

dove $\nabla \cdot$ è l'**operatore divergenza** definito come:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Ne consegue che:

$$\frac{d}{dt} \int_V c dV = \int_{V_0} \left[\frac{dc}{dt} + c \nabla \cdot \vec{v}_a \right] J dV_0 = \int_V \left[\frac{dc}{dt} + c \nabla \cdot \vec{v}_a \right] dV = 0$$

e, data l'arbitrarietà di V ,

$$\frac{dc}{dt} + c \nabla \cdot \vec{v}_a = 0$$

D'altra parte, ricordando la definizione di derivata totale:

$$\frac{d \dots}{dt} = \frac{\partial \dots}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla \dots$$

Si ottiene

$$\frac{dc}{dt} + c \nabla \cdot \vec{v}_a = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla c + c \nabla \cdot \vec{v}_a = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \vec{v}_a) = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \vec{u}) + \nabla \cdot (c \vec{v})$$

per cui

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \vec{u}) = -\nabla \cdot (c \vec{v})$$

Infine, ricordando la **Legge di Fick** estesa al caso di un fluido in movimento

$$\vec{q}_m^r = c \vec{v} = -\mathcal{D} \nabla c$$

e tenuto conto del carattere omogeneo del processo di diffusione molecolare, si ottiene

$$-\nabla \cdot (c \vec{v}) = \nabla \cdot (\mathcal{D} \nabla c) = \mathcal{D} \nabla \cdot (\nabla c) = \mathcal{D} \nabla^2 c$$

L'**equazione** differenziale della **diffusione molecolare** quindi porge:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \vec{u}) = \mathcal{D} \nabla^2 c \quad (2.6)$$

Tale forma dell'equazione é detta **conservativa** e riveste un ruolo fondamentale nel caso di soluzione numerica per riuscire a rappresentare correttamente la propagazione di fronti di concentrazione. Una forma cosiddetta **non conservativa** della (2.6), che tuttavia meglio evidenzia il ruolo fisico dei vari termini a primo membro, è facilmente ottenibile sfruttando l'**equazione di continuità** della fase fluida nell'ipotesi di fluido incompressibile. Il bilancio di massa della fase fluida, infatti, porge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.7)$$

e, per un fluido incompressibile, ipotesi usualmente soddisfatta per i campi di moto che si instaurano nei corpi idrici naturali,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

Ne consegue che:

$$\nabla \cdot (c \vec{u}) = c \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla c = \vec{u} \cdot \nabla c$$

e, quindi, l'equazione della diffusione molecolare nell'ipotesi di fluido incomprimibile può essere scritta come

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \nabla^2 c \quad (2.9)$$

È in tal modo evidente come il termine $\vec{u} \cdot \nabla c$ rappresenti il trasporto avveztivo dell'inquinante. I termini $\partial c / \partial t$ e $\mathcal{D} \nabla^2 c$, invece, sono rispettivamente associati alla variazione temporale subita localmente dalla concentrazione di inquinante e alla diffusione molecolare dell'inquinante stesso. La generalizzazione di tale equazione al caso di un soluto soggetto a reazioni è immediata e porge:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \nabla^2 c \pm R \quad (2.10)$$

Si noti infine come l'equazione 2.9 possa essere ottenuta anche considerando il **moto browniano** delle particelle liquide.

3.3 Soluzioni analitiche dell'equazione della diffusione molecolare

L'equazione della diffusione molecolare (2.9),

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \nabla^2 c \quad (3.11)$$

rappresenta un particolare tipo di equazione differenziale alle derivate parziali, detto della **avvezione-diffusione**, comune a molti problemi della fisica-matematica. Per i nostri scopi è importante osservare che anche l'equazione della diffusione turbolenta (cfr. paragrafo 4.1) assume questa forma nel caso di turbolenza omogenea e isotropa, per il quale il tensore della diffusività turbolenta si riduce ad uno scalare costante. Inoltre, come verrà discusso nel paragrafo 5.4, anche l'equazione monodimensionale che, in un corso d'acqua, controlla il comportamento della concentrazione mediata sulla sezione assume tale forma.

È quindi evidente l'importanza di studiare le possibili soluzioni della (3.11). A tale scopo è innanzitutto necessario associare a tale equazione opportune condizioni iniziali (CI) e al contorno (CC). Le prime individuano la distribuzione spaziale della concentrazione all'istante iniziale $t = 0$,

$$c(\vec{x}, 0) = c_0(\vec{x}) \quad (3.12)$$

D'altra parte, indicato con V il volume del dominio oggetto di studio e con S la sua superficie, le condizioni al contorno richiedono che, al variare del tempo, venga

specificato su S il valore di c (**condizioni di Dirichlet**) oppure il valore del flusso relativo $\vec{q}_m^r = c \vec{v}$ (**condizione di Neumann**).

Nel caso in cui $\vec{u}$ sia identicamente nullo (fluido in quiete) o costante (campo di moto uniforme) il carattere **lineare** della (3.11) comporta che, qualora anche le condizioni al contorno siano lineari, è possibile applicare la **sovrapposizione degli effetti**: soluzioni **complesse** possono così essere ottenute come somma di soluzioni **elementari** note. Ulteriore conseguenza della linearità della (3.11) è che, essendo c una funzione continua di x e t , eventuali **discontinuità** possono realizzarsi solo per $t = 0$ sul contorno S del dominio in esame.

3.3.1 La soluzione fondamentale

Consideriamo il caso della pura diffusione ($\vec{u} = 0$) conseguente all'**immissione istantanea** al tempo $t = 0$ di una massa di soluto M nell'origine $x = 0$ di un dominio fluido unidimensionale infinitamente esteso ($x \in [-\infty, \infty]$).

Indicata con c la concentrazione di massa per unità di lunghezza (**concentrazione lineare**, M/L)

$$c(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

il problema sopra posto si traduce nella seguente formulazione matematica:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3.13-a)$$

$$c(x, 0) = M \delta(x) \quad (3.13-b)$$

$$c(\pm\infty, t) = c_{\pm\infty} \quad (3.13-c)$$

dove $c_{\pm\infty}$ è il valore, limitato, che la concentrazione assume sul contorno del dominio fluido mentre $\delta(x)$ è la cosiddetta **delta di Dirac**. Tale funzione generalizzata, definibile attraverso opportune funzioni di forma, gode delle seguenti proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ f(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Al fine di risolvere il problema posto dalle (3.13-a), (3.13-b) e (3.13-c) osserviamo che:

- i) la dipendenza funzionale della concentrazione lineare è del tipo $c = c(x, t, M, \mathcal{D})$;
- ii) la linearità del problema comporta che $c \propto M$;
- iii) in assenza di reazioni, la conservazione della massa impone che, ad ogni istante,

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx = M; \quad (3.14)$$

iv) data l'isotropia del processo, per simmetria deve essere:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (3.15)$$

In base alle assunzioni i) e ii) è evidente che $c = M f(x, t, \mathcal{D})$. D'altra parte, ricordando che $\mathcal{D}$ ha le dimensioni L^2/T , avremo:

$$L \propto (\mathcal{D}T)^{1/2}$$

Assumendo $(\mathcal{D}, t)$ come **grandezze fondamentali**, x come **grandezza derivata** e definita la **lunghezza scala** $L = (4\mathcal{D}t)^{1/2}$, conviene introdurre la variabile adimensionale

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \quad (3.16)$$

e porre

$$c = \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} g(\eta)$$

Osserviamo innanzitutto che $\eta = \eta(x, t)$ e, quindi,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} = -\frac{1}{2t} \eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}$$

Ricordando la regola di derivazione di una funzione di funzione:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} g + \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \left(g + \eta \frac{dg}{d\eta} \right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{M}{4\mathcal{D}t} \frac{dg}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{M}{4\mathcal{D}t} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{M}{4\mathcal{D}t} \frac{1}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \frac{d^2 g}{d\eta^2},$$

sostituendo nell'equazione (3.13-a) e semplificando otteniamo:

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} + 2 \eta \frac{dg}{d\eta} + 2 g = 0$$

Tale equazione, integrata una volta in η , porge:

$$\frac{dg}{d\eta} + 2 \eta g + k_0 = 0$$

La costante di integrazione k_0 è determinata ricordando la condizione di simmetria iv), in base a cui

$$\left. \frac{dg}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = 0$$

Utilizzando la separazione delle variabili e integrando una seconda volta in η

$$\frac{dg}{g} = -2\eta d\eta \quad \Rightarrow \quad \ln g = -\eta^2 + \ln k_1 \quad \Rightarrow \quad g = k_1 e^{-\eta^2}$$

La nuova costante di integrazione k_1 si determina imponendo la condizione integrale di conservazione della massa iii),

$$\begin{aligned} M = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} k_1 e^{-\eta^2} dx \\ &= M k_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = M k_1 \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Si ottiene cosí la seguente distribuzione spazio-temporale di concentrazione:

$$c = \frac{M}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{-x^2/(4\mathcal{D}t)} \quad (3.17)$$

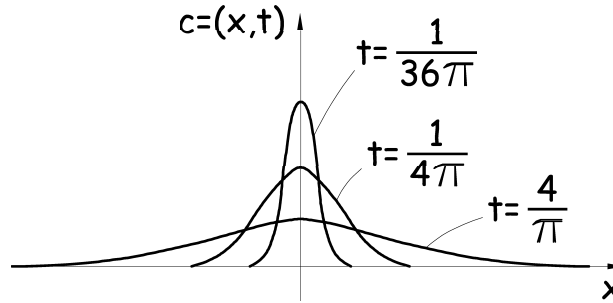


Figura 3.2: Distribuzione gaussiana 1D della concentrazione conseguente all'immissione istantanea di una massa M di soluto non reattivo nella sezione $x = 0$ di un fluido in quiete.

Tale distribuzione è detta **gaussiana**. Essa tende alla distribuzione di Dirac propria della condizione iniziale quando $t \rightarrow 0$. Infatti, in tal caso:

$$\begin{cases} c \rightarrow 0 & x \neq 0 \\ c \rightarrow \infty & x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c = M \delta(x)$$

È importante osservare che, ad un fissato istante, la (3.17) descrive la distribuzione spaziale della concentrazione all'interno delle nuvola di inquinante. È immediato verificare che, per un fissato istante, tale distribuzione è simmetrica rispetto alla sezione di immissione. D'altra parte, per una fissata sezione, la (3.17) comporta una fase di crescita della concentrazione (fronte della nuvola di inquinante) più rapida di quella di esaurimento (cosa della nuvola).

Nel caso in cui la sostanza considerata sia soggetta ad una reazione del primo ordine ($\pm R = \pm rc$) è facile dimostrare che la soluzione fondamentale porge:

$$c = \dots\dots\dots (3.18)$$

3.3.2 Proprietà della distribuzione fondamentale

Le caratteristiche di una qualsiasi distribuzione spaziale di concentrazione a un fissato istante sono descritte dai suoi momenti statistici. Infatti, conoscere tutti i momenti di una distribuzione spaziale a rigori equivale a conoscere la distribuzione stessa. I momenti statistici di ordine $0, 1, 2, \dots, n$ sono così definiti:

$$\mathcal{M}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c \, dx = M \quad (3.19-a)$$

$$\mathcal{M}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \, c \, dx = \mu \, \mathcal{M}_0 \quad (3.19-b)$$

$$\mathcal{M}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, c \, dx = \sigma^2 \, \mathcal{M}_0 \quad (3.19-c)$$

$$\mathcal{M}_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n \, c \, dx \quad (3.19-d)$$

È immediato osservare che il momento di ordine 0 coincide con la **massa di soluto** M contenuta nella nuvola di inquinante.

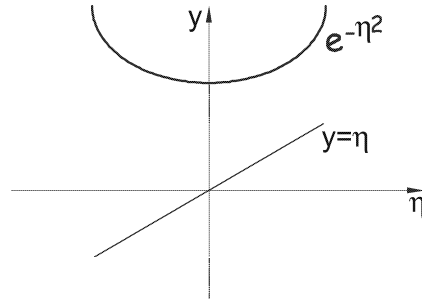


Figura 3.3: Andamento delle funzioni simmetrica $e^{-\eta^2}$ e antisimmetrica η che compaiono nel calcolo di μ

Il momento del primo ordine è invece associato alla media della distribuzione di concentrazione, $\mu = \mathcal{M}_1/\mathcal{M}_0$, e individua il **baricentro della nuvola** di inquinante. Per costruzione, la soluzione fondamentale è simmetrica rispetto all'origine dell'asse x e, quindi, $\mathcal{M}_1$ e μ risultano identicamente nulli (Figura 3.3). Infatti:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\mathcal{M}_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \, c \, dx \\ &= \frac{\sqrt{4\mathcal{D}t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \, e^{-\eta^2} \, d\eta = 0 \end{aligned}$$

Il baricentro della nuvola di inquinante, quindi, **non** varia nel tempo ed è localizzato nell'origine.

Il momento del secondo ordine è legato all'**ampiezza della nuvola** di inquinante. La **varianza** della nuvola, definita come $\sigma^2 = \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_0$, fornisce una misura del quadrato della lunghezza della nuvola. Nel caso della soluzione fondamentale è possibile dimostrare che tutti i momenti di ordine dispari sono identicamente nulli, mentre i momenti di ordine pari sono esprimibili in funzione di σ^2 .

È inoltre possibile dimostrare che una **qualsiasi distribuzione** di concentrazione soddisfacente l'equazione (3.13-a) è tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

è di tipo gaussiano.

Infine, è importante osservare che la varianza della nuvola σ^2 cresce **linearmente** con il tempo t e con $\mathcal{D}$:

$$\sigma^2 = 2\mathcal{D}t, \quad \frac{d\sigma^2}{dt} = 2\mathcal{D}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{\mathcal{M}_0} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 c \, dx \\ &= \frac{4\mathcal{D}t}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta = \frac{4\mathcal{D}t}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Tale risultato verrà utilizzato nello studio della dispersione di inquinante in un corso d'acqua (con $\mathcal{D}$ e c sostituiti, rispettivamente, dal coefficiente di dispersione longitudinale K e dalla concentrazione media sulla sezione $\mathcal{C}$), e consentirà di individuare la regione a valle dell'immissione dove il comportamento della nuvola di inquinante può essere con buona approssimazione descritto da una distribuzione di concentrazione di tipo gaussiano (Capitolo xxxx).

3.3.3 Pura diffusione di una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata

Consideriamo il caso della pura diffusione ($\vec{u} = 0$) in un dominio fluido unidimensionale infinitamente esteso ($x \rightarrow \pm\infty$) di un soluto avente una assegnata distribuzione della concentrazione $c(x, 0)$. Il problema può essere così formulato

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \\ c(x, 0) &= c_0(x) & -\infty < x < \infty \\ c(\pm\infty, t) &= c_{\pm\infty} & t > 0 \end{aligned}$$

dove $c_{\pm\infty}$ è il valore, limitato, che la concentrazione assume infinitamente a monte/valle. Tale problema può essere risolto utilizzando la soluzione fondamentale

e applicando la sovrapposizione degli effetti. La soluzione può essere infatti ottenuta come somma delle distribuzioni di concentrazione risultanti dall'immissione istantaneamente in ξ di una massa

$$dM = c_0(\xi) dV = c_0(\xi) (d\xi \cdot 1 \cdot 1)$$

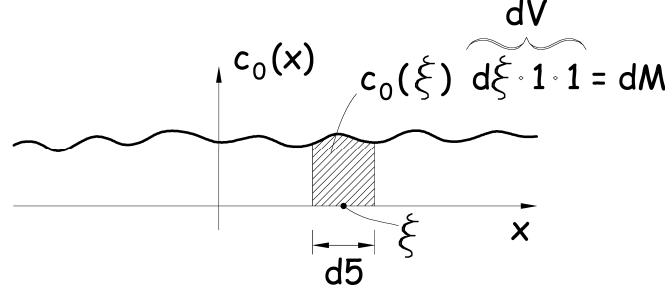


Figura 3.4: Distribuzione di concentrazione iniziale assegnata.

Spostando l'origine delle ascisse in ξ (i.e., $\hat{x} = x - \xi$) e utilizzando la soluzione fondamentale si ottiene:

$$\hat{c}(x, t, \xi) = \frac{dM}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \exp\left(-\frac{\hat{x}^2}{4\mathcal{D}t}\right) = \frac{c_0(\xi) d\xi}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\mathcal{D}t}\right]$$

Sommando i valori di $\hat{c}$ dovuti a tutte le masse dM , ovvero integrando su ξ (convoluzione), otteniamo:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\mathcal{D}t}\right] d\xi$$

È facile verificare che, non avendo considerato alcuna reazione, la massa si conserva:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4\mathcal{D}t)} d\xi \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0(\xi)}{\sqrt{\pi}} d\xi \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4\mathcal{D}t)} d\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Prima di analizzare alcuni esempi di soluzione per assegnate distribuzioni iniziali di concentrazione, è utile richiamare le definizioni e le proprietà della **funzione errore** e della **funzione errore complementare** che, come vedremo, entrano in gioco in tali soluzioni. La **funzione errore** (Figura 3.5) è definita come

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta \quad (3.20)$$

e gode delle seguenti proprietà

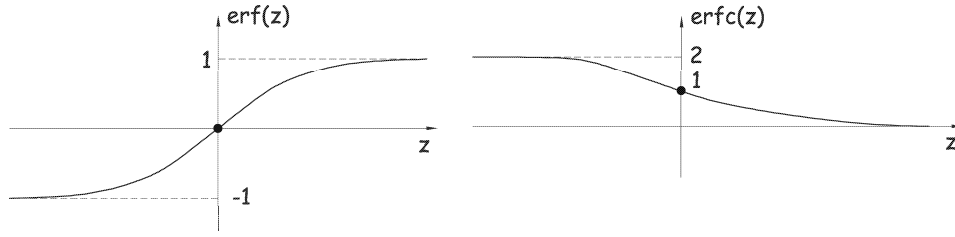


Figura 3.5: Tipici andamenti della funzione errore, $\text{erf}z$, e della funzione errore complementare, $\text{erfc}z$.

$$\begin{aligned}\text{erf}(-z) &= -\text{erf}(z) \\ \text{erf}(0) &= 0 \\ \text{erf}(\infty) &= 1 \\ \text{erf}(-\infty) &= -1\end{aligned}$$

La **funzione errore complementare** è invece definita come (Figura 3.5):

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \quad (3.21)$$

e gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\text{erfc}(z) &= 1 - \text{erf}(z) \\ \text{erfc}(0) &= 1 \\ \text{erfc}(-\infty) &= 2 \\ \text{erfc}(\infty) &= 0\end{aligned}$$

Possiamo ora considerare i casi di **distribuzione a gradino** illustrati nella Figura 3.6. Nel caso di Figura 3.6a avremo che:

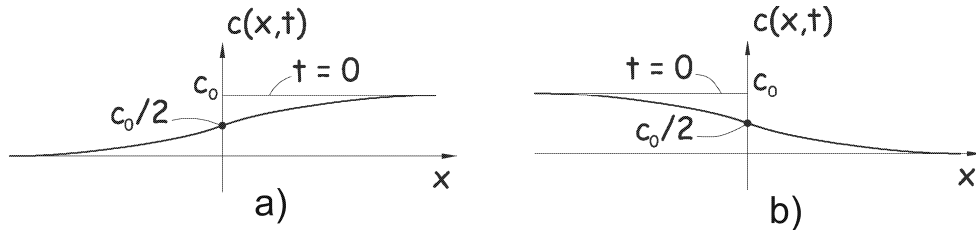


Figura 3.6: Pura diffusione monodimensionale per una distribuzione iniziale di concentrazione costante negli intervalli spaziali a) $x \geq 0$ e b) $x \leq 0$.

$$c(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$c(x, t) = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4Dt)} d\xi$$

$$\eta = \frac{x - \xi}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi = 0 & \eta = x/\sqrt{4\mathcal{D}t} \\ \xi \rightarrow \infty & \eta \rightarrow -\infty \\ d\xi = -\sqrt{4\mathcal{D}t}d\eta \end{cases}$$

$$c(x, t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^{x/\sqrt{4\mathcal{D}t}} e^{-\eta^2} d\eta \right)$$

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right]$$

Si noti come, per $t > 0$, il fronte di concentrazione venga subito smussato e la concentrazione nell'origine si mantenga costantemente pari a $c_0/2$.

Nel caso illustrato in Figura 3.6b è facile dimostrare che la distribuzione di concentrazione diventa:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right)$$

Consideriamo ora i casi di distribuzione iniziale illustrati nella Figura 3.7. Nel caso di distribuzione costante all'interno di un intervallo x finito (Figura 3.7a) si ha che:

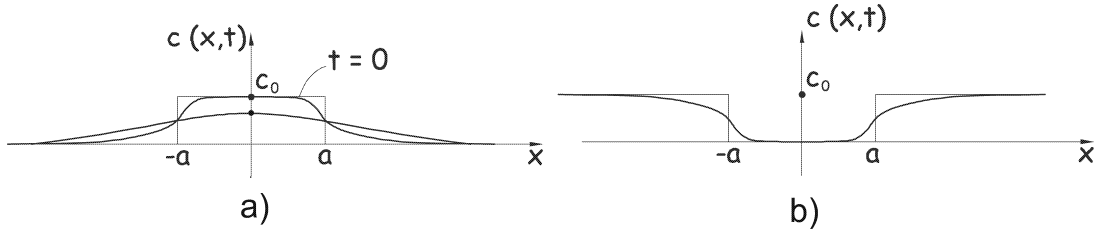


Figura 3.7: Pura diffusione monodimensionale per una distribuzione iniziale di concentrazione costante negli intervalli spaziali a) $x \in [-a, a]$ e b) $x \in]-a, a[$.

$$c(x, 0) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ c_0 & |x| \leq a \end{cases}$$

La distribuzione di concentrazione risultante può essere vista come la differenza tra la distribuzione generata da una concentrazione iniziale c_0 costante per $x \geq -a$ e quella dovuta a una concentrazione iniziale c_0 costante per $x \geq a$:

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] - \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] \\ &= \frac{c_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{a-x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] \end{aligned}$$

I processi diffusivi tendono ancora una volta a smussare i fronti di concentrazione inizialmente localizzati in $x = \pm a$. Tuttavia in tale caso, al procedere del tempo, la concentrazione nell'origine si riduce progressivamente secondo la relazione:

$$c(0, t) = c_0 \operatorname{erf} \left(\frac{a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right),$$

annullandosi per $t \rightarrow \infty$.

Il caso di distribuzione costante all'esterno di un intervallo x finito (Figura 3.7b) comporta che che:

$$c(x, 0) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ c_0 & |x| \geq a \end{cases}$$

La distribuzione di concentrazione può essere vista come la somma di una distribuzione generata da una concentrazione iniziale c_0 costante per $x \leq -a$ e quella dovuta a una concentrazione iniziale c_0 costante per $x \geq a$:

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] + \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] \\ &= \frac{c_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{a-x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] \end{aligned}$$

Anche in tal caso, per $t > 0$ i processi diffusivi tendono a eliminare i fronti di concentrazione inizialmente localizzati in $x = \pm a$. Inoltre, dopo un tempo sufficientemente lungo, la concentrazione in $x = 0$ tende a crescere progressivamente, tendendo asintoticamente al valore c_0 , i.e.,

$$c(0, t) = c_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right)$$

3.3.4 Concentrazione nota in un punto e costante nel tempo

Consideriamo ora il caso della pura diffusione ($\vec{u} = 0$) in un dominio fluido unidimensionale infinitamente esteso ($x \rightarrow \pm\infty$) di un soluto immesso con continuità nell'origine con concentrazione c_0 costante nel tempo. Il problema può essere così formulato

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \\ c(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty \\ c(0, t) &= c_0 & t > 0 \end{aligned}$$

La soluzione sarà del tipo

$$\frac{c}{c_0} = f(\eta),$$

con $\eta = x/\sqrt{4\mathcal{D}t}$. Utilizzando la regola di derivazione di una funzione di funzione avremo:

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \eta \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{4\mathcal{D}t} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

e, quindi,

$$-\frac{1}{2t} \eta \frac{df}{d\eta} - \mathcal{D} \frac{1}{4\mathcal{D}t} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

Semplificando e riordinando

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0$$

Integrando

$$\frac{df}{d\eta} = k_1 e^{-\eta^2}, \quad f = k_1 \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi + k_2 = k_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) + k_2$$

e utilizzando le condizioni iniziali e al contorno

$$\begin{aligned} f(0) = 1 & \Rightarrow k_2 = 1 \\ \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} f = 0 & \Rightarrow k_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\pm\infty) + 1 = 0 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} k_1 &= -2/\sqrt{\pi} & x > 0 \\ k_1 &= 2/\sqrt{\pi} & x < 0 \end{aligned}$$

e, quindi

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad c(x, t) = c_0 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) = c_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \\ x < 0 & \quad c(x, t) = c_0 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{|x|}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) = c_0 \operatorname{erfc} \frac{|x|}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \end{aligned}$$

È importante osservare come, in tale esempio, data la continuità con cui l'inquinante viene immesso per garantire una concentrazione costante in $x = 0$, la **massa** di inquinante contenuta nel fluido **aumenta** nel tempo con $\sqrt{t}$. Infatti

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} c dx = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) dx = c_0 \sqrt{4\mathcal{D}t} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(\eta) d\eta$$

e, quindi,

$$M = 1.1284 c_0 \sqrt{4\mathcal{D}t}, \quad \frac{dM}{dt} = 0.5642 c_0 \sqrt{\frac{4\mathcal{D}}{t}}$$

essendo dM/dt la **massa** per unità di tempo che deve essere **immessa** nel sistema per mantenere costante e pari a c_0 la concentrazione nell'origine.

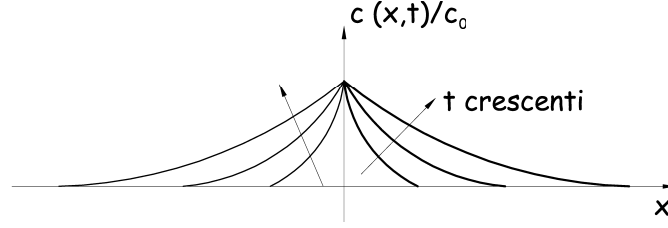


Figura 3.8: Andamento della distribuzione di concentrazione nel caso di una immissione di soluto in $x = 0$, costante nel tempo.

3.3.5 Concentrazione nota in un punto e variabile nel tempo

Consideriamo il caso della pura diffusione ($\vec{u} = 0$) in un dominio fluido unidimensionale infinitamente esteso ($x \rightarrow \pm\infty$) di un soluto immesso con continuità nell'origine con concentrazione $c_0(t)$ che può in generale variare nel tempo. Il problema può essere così formulato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \\ c(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty \\ c(0, t) &= c_0(t) & t > 0 \end{aligned}$$

Posto $t = \tau + d\tau$ e sviluppando in serie di Taylor, si avrà:

$$c_0(\tau + d\tau) = c_0(\tau) + \left. \frac{dc_0}{d\tau} \right|_{\tau} d\tau + \dots$$

con $d\tau = t - \tau$. La distribuzione di concentrazione che si ottiene per $t > \tau$ immettendo nell'origine una concentrazione costante pari a $dc_0/d\tau|_{\tau} d\tau$ è:

$$dc(x, \tau) = \frac{dc_0}{d\tau} d\tau \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}(t - \tau)}}\right)$$

Sommando i vari contributi ($\int_{-\infty}^t dc$) si ottiene:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{dc_0}{d\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathcal{D}(t - \tau)}}\right) d\tau$$

Pertanto, nota la variazione temporale di c_0 nella sezione di immissione (i.e., $dc_0/d\tau$), è immediato determinare la distribuzione spazio-temporale della concentrazione. È infine utile osservare che la soluzione per una immissione di una concentrazione costante c_0 nell'origine si ottiene imponendo che $dc_0/d\tau = c_0\delta(\tau)$.

3.3.6 Soluzione fondamentale bi- e tridimensionale

Nel caso di un campo fluido bidimensionale (2-D) la concentrazione c è definita come massa per unità di superficie (concentrazione areale, M/L^2):

$$c(x, y, t) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x \Delta y}$$

La soluzione fondamentale 2-D è quella che si ottiene dal seguente problema:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (3.22)$$

$$c(x, y, 0) = M \delta(x) \delta(y) \quad (3.23)$$

$$c(x, y, t) = 0 \quad x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty \quad (3.24)$$

Esso può essere facilmente risolto **separando le variabili**, ovvero ponendo $c = c_1(x, t)c_2(y, t)$ e sostituendo nell'equazione (3.22):

$$\left[\frac{\partial c_1}{\partial t} - \mathcal{D} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} \right] c_2 + c_1 \left[\frac{\partial c_2}{\partial t} - \mathcal{D} \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right] = 0$$

Imponendo che le equazioni tra parentesi quadre siano identicamente nulle, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial t} - \mathcal{D} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = 0 & \Rightarrow c_1 = \frac{k_1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{-x^2/(4\mathcal{D}t)} \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} - \mathcal{D} \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} = 0 & \Rightarrow c_2 = \frac{k_2}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{-y^2/(4\mathcal{D}t)} \end{aligned}$$

e, quindi

$$c = \frac{k_1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \frac{k_2}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{-(x^2+y^2)/(4\mathcal{D}t)}$$

Le costanti di integrazione k_1 e k_2 si ottengono imponendo la conservazione della massa

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} c dx = M \quad \Rightarrow \quad M = k_1 k_2$$

ottenendo infine

$$c = \frac{M}{4\pi\mathcal{D}t} e^{-(x^2+y^2)/(4\mathcal{D}t)}$$

Tale metodologia di risoluzione può essere facilmente estesa al caso in cui i coefficienti di diffusione nelle direzioni x e y siano diversi ($\mathcal{D}_x \neq \mathcal{D}_y$). Si ottiene:

$$c = \frac{M}{4\pi t \sqrt{\mathcal{D}_x \mathcal{D}_y}} e^{-[x^2/(4\mathcal{D}_x t) + y^2/(4\mathcal{D}_y t)]}$$

Il caso tri-dimensionale (3-D) si tratta in modo del tutto analogo e, nel caso più generale in cui i coefficienti di diffusione nelle tre direzioni siano diversi ($\mathcal{D}_x \neq \mathcal{D}_y \neq \mathcal{D}_z$), si ottiene:

$$c = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{\mathcal{D}_x \mathcal{D}_y \mathcal{D}_z}} e^{-[x^2/(4\mathcal{D}_x t) + y^2/(4\mathcal{D}_y t) + z^2/(4\mathcal{D}_z t)]}$$

3.3.7 Avvezione uniforme e diffusione longitudinale

Consideriamo il caso dell'avvezione-diffusione in un dominio fluido unidimensionale infinitamente esteso ($x \rightarrow \pm\infty$) di un soluto avente una assegnata distribuzione della concentrazione iniziale $c(x, 0)$. Ipotizzando che la concentrazione sia inizialmente costante e pari a c_0 per $x \leq 0$ (Figura 3.9a), il problema può essere così formulato:

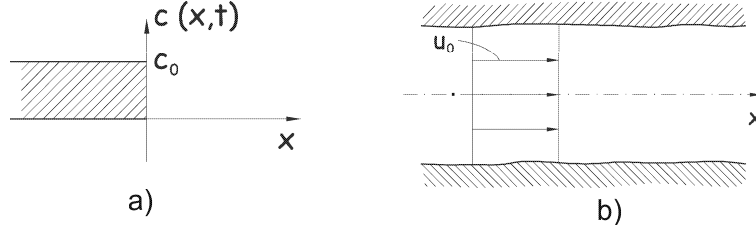


Figura 3.9: a) Distribuzione iniziale della concentrazione e b) distribuzione uniforme della velocità in un campo fluido 1D.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

$$c(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ c_0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$c(x, t) = \begin{cases} 0 & x \rightarrow \infty \\ c_0 & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.27)$$

Tale problema ammette una semplice soluzione analitica nell'ipotesi che la velocità sia uniformemente distribuita nel campo fluido (Figura 3.9b), ovvero che $u(x) = u_0 = \text{cost}$. Sotto tale ipotesi, infatti è possibile utilizzare un **sistema di riferimento mobile** con velocità u_0 , effettuando il cambio di coordinata $\xi = x - u_0 t$. Ciò equivale a trasformare il problema di avvezione-diffusione in un problema di pura diffusione relativamente ad un osservatore che si muove solidale alla corrente e, quindi, segue la nuvola di inquinante nel suo movimento medio. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Osservando che all'istante iniziale $c(x, 0) \equiv c(\xi, 0)$, ne consegue che per un osservatore in moto con la nuvola la soluzione è identica a quella ottenuta per una distribuzione iniziale a gradino

$$c(\xi, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

Ritornando alla coordinata originaria x si ottiene infine (3.10):

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - u_0 t}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - u_0 t}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \right)$$

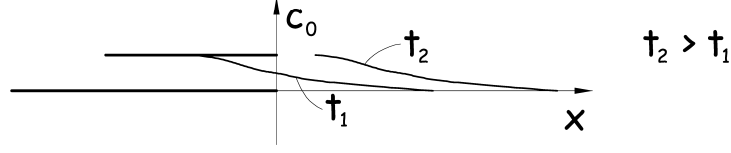


Figura 3.10: Distribuzione spaziale della nuvola di inquinante a diversi istanti di tempo nel caso di avvezione uniforme e diffusione longitudinale 1D.

3.3.8 Avvezione uniforme e diffusione bidimensionale

Consideriamo un campo 1-D di fluido ideale in cui è presente una piastra che, come illustrato in Figura (3.11), delimita uno strato superiore di acqua pulita da uno strato inferiore in cui è presente una concentrazione costante di inquinante, pari a c_0 . Supponiamo inoltre, che il campo di moto sia caratterizzato da una distribuzione uniforme della velocità, ovunque pari a u_0 . Il problema differenziale che controlla la dinamica della concentrazione nel semipiano a valle della piastra può essere così formulato:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] \quad (3.28)$$

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \quad y > 0, \\ c_0 & x \leq 0, \quad y < 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$c(\infty, y, t) = c_\infty \quad (3.30)$$

essendo c_∞ il valore finito della concentrazione areale (M/L^2) che si realizza infinitamente a valle.

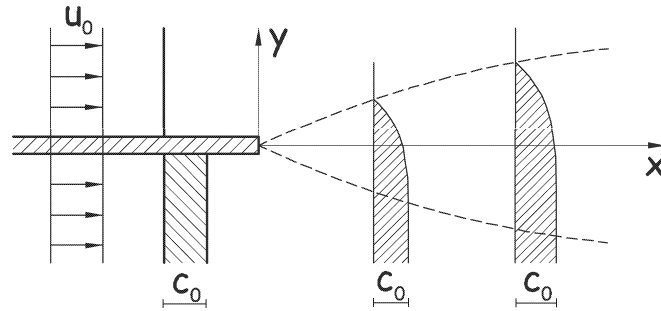


Figura 3.11: Esempio di avvezione uniforme e diffusione bidimensionale

Osserviamo innanzitutto che nel caso di diffusione molecolare l'effetto connesso alla diffusione longitudinale è decisamente inferiore a quello indotto dall'avvezione. Infatti:

$$\frac{\mathcal{D}\partial^2 c/\partial x^2}{u_0\partial c/\partial x} \sim \frac{\mathcal{D}/L_x^2}{u_0/L_x} = \frac{\mathcal{D}}{u_0 L_x} = \frac{\mathcal{D}}{\nu} \frac{\nu}{u_0 L_x}$$

ovvero

$$\frac{\mathcal{D}}{u_0 L_x} = P_e^{-1} = S_c^{-1} R_e^{-1} \ll 1$$

Essendo $\mathcal{D} \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ e $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ il numero di Schmidt S_c risulta $\sim 10^{-1}$. Quindi, per valori del numero di Reynolds R_e tipici dei corsi d'acqua, $\sim 10^6$, il numero di Peclet P_e risulta $\simeq 10^5$. L'equazione della avvezione-diffusione può essere pertanto semplificata come segue:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Tralasciando il transitorio e, quindi, considerando la distribuzione di concentrazione che si realizza a regime, in **condizioni stazionarie**, tale equazione diventa:

$$u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica introducendo la sostituzione $\tau = x/u_0$. Si ottiene così il problema differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} &= \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ c(y, 0) &= \begin{cases} 0 & y > 0 \\ c_0 & y \leq 0 \end{cases} \\ c(\pm\infty, t) &= c_\infty \end{aligned}$$

già formalmente incontrato in precedenza (cfr. Figura 3.6b), la cui soluzione, illustrata in Figura 3.12, porge

$$c = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\mathcal{D}\tau}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4\mathcal{D}x/u_0}} \right)$$

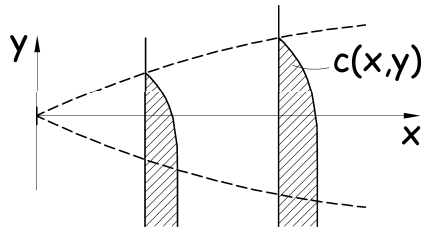


Figura 3.12: Esempio della distribuzione a regime della concentrazione a valle della piastra di Figura 3.11, conseguente ad avvezione uniforme e diffusione bidimensionale

3.3.9 Avvezione uniforme e diffusione tri-dimensionale

Consideriamo un campo tridimensionale (3D) di fluido ideale in cui, in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento, è localizzata una sorgente puntuale di inquinante che, nell'unità di tempo, immette continuamente nel sistema una massa di inquinante pari a $\dot{M}$. Supponiamo che il campo di moto sia caratterizzato da una distribuzione uniforme della velocità, ovunque pari a u_0 . L'equazione differenziale che controlla la dinamica della concentrazione risulta:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right]$$

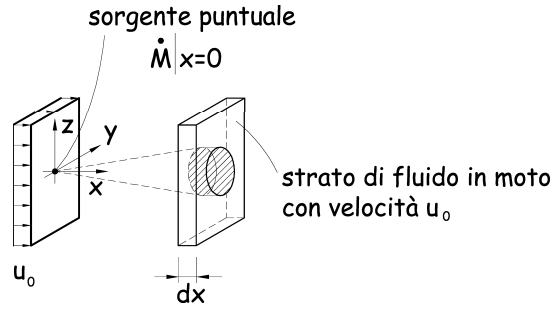


Figura 3.13: Esempio di avvezione uniforme e diffusione tridimensionale per una immissione continua in $\vec{x} = 0$ di una portata di inquinante per unità di tempo pari a $dM/dt = \dot{M}$.

Al fine di determinare la soluzione consideriamo uno strato di fluido di spessore dx , in moto con velocità u_0 (Figura 3.13). Quando tale strato fluido attraversa l'origine in esso viene iniettata una massa $\dot{M}dx/u_0$, essendo dx/u_0 il tempo impiegato dallo strato fluido per attraversare l'origine. Tale massa diffonde all'interno dello strato dando luogo ad una distribuzione di concentrazione areale $\hat{c}(y, z)$ identicamente uguale a quella che si ottiene dalla soluzione fondamentale 2-D immettendo istantaneamente nell'origine una massa $\dot{M}dx/u_0$:

$$\hat{c}(y, z) = \frac{\dot{M}dx}{u_0} \frac{1}{4\pi\mathcal{D}t} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{4\mathcal{D}t}\right)$$

Osservando che la concentrazione volumetrica è legata a quella areale dalla relazione:

$$c = \frac{\hat{c}}{\Delta x}$$

e che lo strato di fluido percorre una distanza x dopo un tempo $t = x/u_0$, si ottiene infine:

$$c(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi\mathcal{D}x} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{4\mathcal{D}x} u_0\right)$$

Capitolo 4

Diffusione turbolenta

4.1 L'equazione differenziale della diffusione turbolenta

L'equazione (2.6) è a rigori valida per qualsiasi campo di moto, sia esso laminare o turbolento. Tuttavia, la sua applicazione richiede la conoscenza del vettore velocità $\vec{u}$. Come illustrato nel paragrafo 2.5, la distribuzione spazio-temporale di $\vec{u}$ è descritta dalle equazioni di Navier Stokes (1.50). Tali equazioni ammettono soluzioni analitiche per bassi numeri di Reynolds (e.g., campi di moto laminari), o numeriche per numeri di Reynolds relativamente elevati (campi di moto turbolenti) e domini relativamente semplici. Nel caso tuttavia dei campi di moto turbolenti che solitamente caratterizzano i problemi di dinamica degli inquinanti, i numeri di Reynolds sono talmente elevati da comportare un onere di calcolo eccessivamente elevato anche per gli attuali computers (vedi paragrafo 1.6).

In tali applicazioni, è quindi necessario rinunciare a conoscere la distribuzione spaziale dei valori istantanei della velocità $\vec{u}$, accontentandosi di determinare i cosiddetti valori mediati sulla turbolenza, $\langle \vec{u} \rangle$. Tali valori risultano dall'approccio di Reynolds, in base a cui la velocità istantanea viene decomposta in una componente media e in una componente fluttuante. Il prezzo da pagare a fronte di questa decomposizione è legato alla necessità di introdurre delle opportune relazioni di chiusura che leghino i termini fluttuanti che compaiono nelle equazioni (i cosiddetti termini aggiuntivi di Reynolds) ai valori mediati sulla turbolenza. In altre parole, è necessario formulare un cosiddetto **modello di chiusura della turbolenza** (cfr. paragrafo 1.6.2).

Seguendo l'approccio di Reynolds, e ricordando che la media sulla turbolenza può essere definita come una media temporale per turbolenza stazionaria o, più in generale come media probabilistica (cfr. paragrafo 1.7.5), introduciamo le seguenti decomposizioni:

$$\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}', \quad c = \langle c \rangle + c' \quad (1.1)$$

Ricordando inoltre che, per la definizione stessa di media,

$$\langle c' \rangle = \langle \vec{u}' \rangle = 0, \quad \langle \langle c \rangle \rangle = \langle c \rangle, \quad \langle \langle \vec{u} \rangle \rangle = \langle \vec{u} \rangle \quad (1.2)$$

sostituiamo la (1.1) nell'equazione della diffusione molecolare (2.6), scritta in forma conservativa, e operiamo la media sulla turbolenza. Otteniamo:

$$\left\langle \frac{\partial(\langle c \rangle + c')}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\langle c \rangle + c') (\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}') \right] \right\rangle = \mathcal{D} \nabla^2 (\langle c \rangle + c')$$

D'altra parte, la **linearità degli operatori** $\partial \dots / \partial t$, $\nabla^2 \dots$ e $\langle \dots \rangle$ comporta che:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a + b) = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t}, \quad \nabla^2(a + b) = \nabla^2 a + \nabla^2 b, \quad \langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$$

e, quindi, ricordando le (1.2),

$$\left\langle \frac{\partial(\langle c \rangle + c')}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle c' \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t}$$

$$\left\langle \nabla^2 (\langle c \rangle + c') \right\rangle = \nabla^2 \langle c \rangle + \nabla^2 \langle c' \rangle = \nabla^2 \langle c \rangle$$

Il termine non lineare $\nabla \cdot (\vec{u}c) = \nabla \cdot (\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}')(\langle c \rangle + c')$, invece, porge:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla \cdot \left[(\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}')(\langle c \rangle + c') \right] \right\rangle &= \nabla \cdot (\langle \vec{u} \rangle \langle c \rangle) + \nabla \cdot \langle \vec{u}' c' \rangle \\ &+ \nabla \cdot \langle \vec{u}' \langle c \rangle \rangle + \nabla \cdot \langle \langle \vec{u} \rangle c' \rangle \\ &= \nabla \cdot (\langle \vec{u} \rangle \langle c \rangle) + \nabla \cdot \langle \vec{u}' c' \rangle \end{aligned}$$

L'equazione di conservazione della massa di soluto, mediata sulla turbolenza, diventa quindi:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \langle \vec{u} \rangle) = \mathcal{D} \nabla^2 \langle c \rangle - \nabla \cdot \langle \vec{u}' c' \rangle \quad (1.3)$$

Tale equazione è formalmente simile alla (2.6), se si eccettua il termine $\langle \vec{u}' c' \rangle$. Esso rappresenta il **flusso turbolento** di soluto, $\vec{q}_m^{T'}$, indotto dalle fluttuazioni turbolente del campo fluido. Analogamente a quanto accade per la soluzione di un campo di moto turbolento (cfr. paragrafo 1.7), è necessario introdurre una **relazione di chiusura** che consenta di esprimere il termine $\vec{q}_m^T$ in funzione delle grandezze medie $\langle c \rangle$ e $\langle \vec{u} \rangle$.

A tale scopo viene introdotta l'**ipotesi di Taylor** che, in analogia con la legge di Fick adottata per la diffusione molecolare, postula:

$$\vec{q}_m^{T'} = \langle c' \vec{u}' \rangle = -E \cdot \nabla \langle c \rangle \quad (1.4)$$

ovvero che il flusso turbolento di soluto sia **proporzionale** al gradiente della concentrazione media C attraverso il **tensore della diffusività turbolenta**

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

L'introduzione di tale tensore è legata al fatto che il processo di diffusione turbolenta è in generale **anisotropo** (ovvero, in ogni punto, dipende dalla direzione considerata). E si riduce ad uno scalare solo nel caso ideale di **turbolenza omogenea e isotropa**.

Sostituendo la (1.4) nella (1.3) si ottiene infine l'**equazione della diffusione turbolenta**:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \langle \vec{u} \rangle) = \mathcal{D} \nabla^2 \langle c \rangle + \nabla \cdot (\mathbf{E} \cdot \nabla \langle c \rangle) \quad (1.5)$$

Nel caso in cui si scelga un sistema di riferimento coincidente con gli **assi principali del tensore $\mathbf{E}$** , i termini extradiagonali e_{ij} , $i \neq j$ si annullano e, quindi,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{pmatrix}$$

Ne deriva la classica forma dell'equazione differenziale utilizzata per lo studio della **diffusione turbolenta** nei corpi idrici (**corsi d'acqua, laghi, lagune**):

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \langle \vec{u} \rangle) = \mathcal{D} \nabla^2 \langle c \rangle + \frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}) \quad (1.6)$$

Tale equazione, nel caso di fluido incompressibile ($\nabla \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0$), può essere riscritta anche nella forma:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla \langle c \rangle = \mathcal{D} \nabla^2 \langle c \rangle + \frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}) \quad (1.7)$$

È importante osservare che, di norma,

$$\mathcal{D} \ll \min(e_x, e_y, e_z)$$

Pertanto, quando si considerano grandezze mediate sulla turbolenza ($\langle c \rangle$, $\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle$) è ragionevole trascurare la diffusione molecolare rispetto a quella turbolenta. La rinuncia a conoscere il comportamento dei valori istantanei c e $\vec{u}$, d'altra parte, pone il problema di esprimere E (i.e., e_x, e_y, e_z) in funzione delle caratteristiche del **moto mediato sulla turbolenza**. Tale problema richiede l'utilizzo di **strumenti di tipo probabilistico**, che verranno esaminati in quanto segue.

4.2 Analisi statistica della diffusione turbolenta

Consideriamo una **nuvola di un soluto passivo, non-reattivo** immessa puntualmente in un campo fluido caratterizzato da un **moto turbolento unidirezionale e uniforme**. Essendo assenti, in termini di valori mediati sulla turbolenza, gradienti di velocità, l'inquinante sarà trasportato verso valle e la nuvola da esso formata crescerà progressivamente per effetto della diffusione turbolenta (Figura 4.1). In particolare, i) i vortici di grande scala contribuiscono all'ampliamento complessivo della nuvola mentre ii) i vortici di piccola scala determinano la sua distorsione.

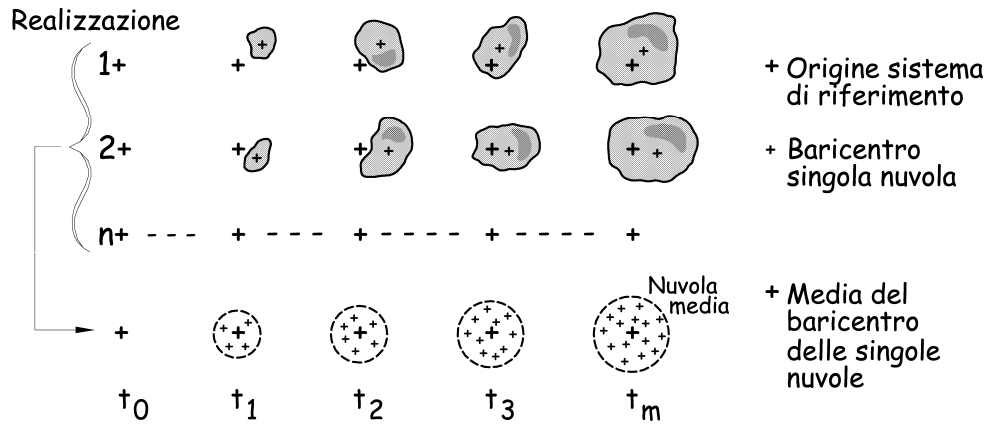


Figura 4.1: Dinamica delle singole nuvole di soluto e della nuvola media.

Consideriamo un sistema di riferimento mobile, con l'origine inizialmente localizzata nel punto di immissione della nuvola. Tale sistema, coincidente con il baricentro della **nuvola media** (insieme delle singole nuvole), si muove con la corrente di **moto unidirezionale uniforme**. Il **baricentro della singola nuvola varia per ogni realizzazione** e, quindi, in genere **non coincide** con il **baricentro della nuvola media**, ovvero con il centro del sistema di riferimento mobile (Figura 4.2).

È possibile distinguere tre diverse fasi nella dinamica della nuvola di soluto. Per tempi **molto piccoli** il comportamento di ogni singola nuvola è controllato dalle **condizioni iniziali**. Il **baricentro della singola nuvola non coincide** con il baricentro dell'insieme (**nuvola media**) delle singole nuvole. La velocità con cui cresce la nuvola media dipende dalla **viscosità** e dalla **separazione iniziale** delle particelle. Come vedremo, i coefficienti di diffusione turbolenta dipendono linearmente dal tempo.

Per tempi **relativamente piccoli**, la nuvola è cresciuta a sufficienza da perdere memoria delle sue condizioni iniziali; la dimensione della nuvola, tuttavia, rimane inferiore a quella caratterizzante i macrovortici. Il **baricentro di una singola nuvola continua a non coincidere** con il baricentro della **nuvola media**, ovvero con l'origine del sistema di riferimento mobile. La dinamica della concentrazione (non osservabile sperimentalmente) deve essere studiata operando la media d'insieme della concentrazione delle singole nuvole, dopo aver sovrapposto i centri di massa di ogni nuvola. Essa è retta da una equazione della diffusione i cui coefficienti variano con una potenza $4/3$ della scala spaziale caratteristica della nuvola media (e, quindi, cambiano nel tempo).

Per tempi **sufficientemente grandi** le dimensioni della nuvola sono aumentate a tal punto da non risentire più dell'azione dei macrovortici. I **baricentri** delle singole nuvole e il baricentro della nuvola media tendono a **coincidere**. Il comportamento della nuvola è descritto da una **equazione della diffusione** con coefficienti di diffusione **costanti**.

Il problema, data la sua complessità, deve essere studiato **probabilisticamente**. Indicata con $p(c|\vec{x}, t)$ la **probabilità** che nel punto $\vec{x}$ all'istante t la concentrazione sia compresa nell'intervallo $c - c + dc$, la **media probabilistica** della concentrazione è definita come:

$$\langle c(\vec{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c p(c|\vec{x}, t) dc$$

4.2.1 Proprietà statistiche della singola nuvola e della nuvola media

Indicata con $c(\vec{x}, t)$ la concentrazione nel punto $\vec{x}$, ed essendo $d\vec{x} = dx_1 dx_2 dx_3$, la **massa** M , il baricentro $\vec{x}_G$ e la varianza $\vec{\sigma}^2$ della **singola nuvola** sono definiti come:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{-\infty}^{\infty} c(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ x_{Gi} &= \frac{1}{M} \iiint_{-\infty}^{\infty} x_i c(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ \sigma_i^2 &= \frac{1}{M} \iiint_{-\infty}^{\infty} (x_i - x_{Gi})^2 c(\vec{x}, t) d\vec{x} \end{aligned}$$

Analogamente, è possibile definire la concentrazione media $\langle c \rangle$, il baricentro $\vec{X}_G$ e la varianza $\vec{\Sigma}^2$ della **nuvola media**:

$$\begin{aligned} \langle c(\vec{x}, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\vec{x}, t) p(c|\vec{x}, t) dc \\ X_{Gi} &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i C(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ \Sigma_i^2 &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - X_{Gi})^2 C(\vec{x}, t) d\vec{x} \end{aligned}$$

Le componenti σ_i e Σ_i degli scarti quadratici medi sopra definiti caratterizzano la dimensione nella direzione i -esima, rispettivamente, della singola nuvola e della nuvola media.

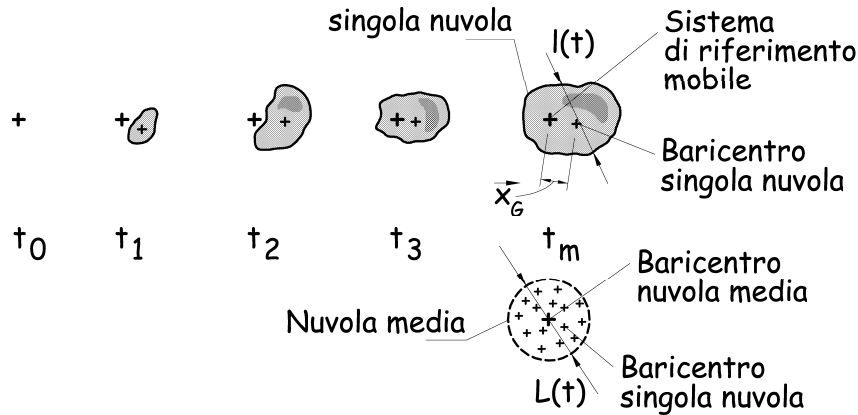


Figura 4.2: Proprietà caratteristiche della singola nuvola e della nuvola media

Possiamo quindi definire come dimensioni caratteristiche della singola nuvola, ℓ e della nuvola media L (Figura 4.2) le seguenti quantità:

$$\ell(t) = \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} \right)^{1/2}, \quad L(t) = \left(\frac{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2}{3} \right)^{1/2}.$$

Al fine di determinare la relazione tra ℓ e L diventa quindi fondamentale analizzare come σ_i^2 e Σ_i^2 sono legate tra loro. Osserviamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i^2 + x_{Gi}^2 - 2x_i x_{Gi}) c(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 c(\vec{x}, t) d\vec{x} + \frac{x_{Gi}^2}{M} \int_{-\infty}^{\infty} c(\vec{x}, t) d\vec{x} - 2 \frac{x_{Gi}}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i c(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 c(\vec{x}, t) d\vec{x} + \frac{x_{Gi}^2}{M} M - 2 \frac{x_{Gi}}{M} M x_{Gi} \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 c(\vec{x}, t) d\vec{x} - x_{Gi}^2 \end{aligned}$$

e, facendo la media d'insieme,

$$\langle \sigma_i^2 \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} - \langle x_{Gi}^2 \rangle \quad (2.8)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \Sigma_i^2 &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} + \frac{X_{Gi}^2}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} - 2 \frac{X_{Gi}}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} + \frac{X_{Gi}^2}{M} M - 2 \frac{X_{Gi}}{M} M X_{Gi} \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} - X_{Gi}^2 \end{aligned}$$

Sottraendo quest'ultima relazione dalla (2.8) si ottiene pertanto:

$$\langle \sigma_i^2 \rangle = \Sigma_i^2 + X_{Gi}^2 - \langle x_{Gi}^2 \rangle$$

Ma:

$$\langle (x_{Gi} - X_{Gi})^2 \rangle = \langle x_{Gi}^2 - 2x_{Gi}X_{Gi} + X_{Gi}^2 \rangle = \langle x_{Gi}^2 \rangle - X_{Gi}^2$$

e, in definitiva,

$$\Sigma_i^2 = \langle \sigma_i^2 \rangle + \langle (x_{Gi} - X_{Gi})^2 \rangle \quad (2.9)$$

La **varianza della nuvola media** Σ_i^2 è **maggiore** della **media della varianza di ciascuna nuvola** $\langle \sigma_i^2 \rangle$, la differenza essendo data dalla media del quadrato della differenza $\langle (x_{Gi} - X_{Gi})^2 \rangle$ tra il baricentro di ciascuna nuvola, x_{Gi} , e il baricentro della nuvola media, X_{Gi} . Dalla relazione (??) consegue che:

$$\begin{aligned}
L^2(t) &= \frac{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2}{3} \\
&= \frac{\langle \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \rangle}{3} + \frac{\langle (x_{G1} - X_{G1})^2 + (x_{G2} - X_{G2})^2 + (x_{G3} - X_{G3})^2 \rangle}{3}
\end{aligned}$$

ovvero

$$L^2(t) = \langle \ell^2 \rangle + \frac{\langle x'_{G1}^2 + x'_{G2}^2 + x'_{G3}^2 \rangle}{3}$$

essendo $x'_{Gi} = x_{Gi} - X_{Gi}$. La dimensione della **nuvola media**, quindi, **eccede** sempre la media delle dimensioni della singole nuvole.

Al fine di quantificare meglio la crescita nel tempo della nuvola media è **opportuno** studiare il problema dal **punto di vista lagrangiano**. A tale scopo, con riferimento ad una singola particella di soluto, definiamo le seguenti quantità:

posizione iniziale ($t = 0$) della particella, $\vec{X}$

velocità (lagrangiana) della particella, $\vec{v}$

traiettoria della particella, $\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{Y}(\vec{X}, t)$

vettore dello spostamento della particella: $\vec{Y}(\vec{X}, t)$

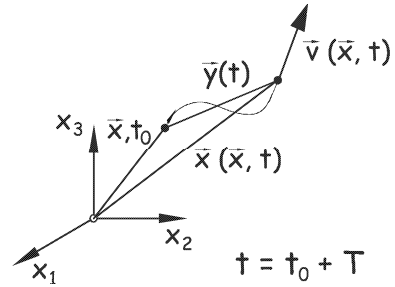
fluttuazioni del vettore spostamento: $\vec{Y}' = \vec{Y} - \langle \vec{Y} \rangle$

fluttuazioni della velocità della particella: $\vec{v}' = \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle$

È immediato osservare che:

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \int_0^t \vec{v}(\vec{X}, \tau) d\tau,$$

$$\vec{Y}(\tau) = \int_0^\tau \vec{v}(\vec{X}, \tau) d\tau$$



Conviene inoltre definire anche la **probabilità** dal punto di vista **lagrangiano**, ovvero la **probabilità** $p(\vec{x}|\vec{X}, t)$ che una particella, localizzata nel punto $\vec{X}$ all'istante iniziale $t = 0$, all'istante generico t sia compresa nell'intorno $\vec{x} + d\vec{x}$ del punto $\vec{x}$. Indicate con M la massa totale della nuvola, con m la massa associata ad una singola particella fluida, ed essendo M/m il numero totale di particelle, si ottiene che

$$\langle c(\vec{x}, t) \rangle = \frac{M}{m} m p(\vec{Y}|\vec{X}, t) = M p(\vec{Y}|\vec{X}, t)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
X_{Gi} &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \langle c(\vec{X}, t) \rangle d\vec{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(\vec{Y}|\vec{X}, t) d\vec{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (X_i + Y_i) p(\vec{Y}|\vec{X}, t) d\vec{Y} \\
&= X_i + \langle Y_i \rangle
\end{aligned}$$

Ricordando che $x_i = X_i + y_i$ e sottraendo membro a membro:

$$x_i - X_{Gi} = y_i - \langle Y_i \rangle$$

La **varianza della nuvola media** perciò risulta

$$\begin{aligned}
\Sigma_i^2 &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - X_{Gi})^2 \langle c(\vec{x}, t) \rangle d\vec{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Y_i'^2 p(\vec{Y}|\vec{X}, t) d\vec{Y} \\
&= \langle Y_i'^2 \rangle
\end{aligned}$$

e, in definitiva,

$$L^2(t) = \frac{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2}{3} = \frac{\langle Y_1'^2 + Y_2'^2 + Y_3'^2 \rangle}{3}$$

Nel caso in cui l'inquinante non venga immesso puntualmente, ma formi una nuvola che inizialmente occupa un volume V_0 con una determinata concentrazione iniziale $\langle c \rangle_0$ si ottiene

$$L^2(t) = L^2(0) + \frac{\langle Y_1'^2 + Y_2'^2 + Y_3'^2 \rangle}{3}$$

La **dimensione** caratteristica della **nuvola media** è dunque legata alla covarianza delle fluttuazioni degli spostamenti $D_{ij}(t)$:

$$D_{ij}(t, \vec{X}) = \langle Y_i'(\vec{X}, t) Y_j'(\vec{X}, t) \rangle$$

ovvero

$$L^2(t) = L^2(0) + \frac{D_{11} + D_{22} + D_{33}}{3}$$

Al fine di determinare il comportamento di D_{ij} (e, quindi, di L) è utile osservare che:

$$D_{ij}(t, \vec{X}) = \left\langle \int_0^t v_i'(\vec{X}, \tau_1) d\tau_1 \int_0^t v_j'(\vec{X}, \tau_2) d\tau_2 \right\rangle$$

è necessario distinguere tre diversi intervalli di tempo

- I) $t < T_L$
 II) $T_L < t < a T_L$
 III) $t > a T_L$

dove a è un coefficiente maggiore di 1, spesso posto pari a 5, e T_L è la macroscale temporale Lagrangiana:

$$T_L = \max \left(\int_0^\infty R_{ii}(\vec{X}, \tau) d\tau \right)$$

I) Per tempi sufficientemente **piccoli** (i.e., $t \simeq 0$) la particella di soluto si trova ancora in un intorno del punto di immissione $\vec{X}$. È quindi possibile ipotizzare che la sua velocità non vari significativamente e sia approssimativamente uguale alla velocità euleriana in $\vec{X}$, ovvero:

$$\vec{v}(\vec{X}, t) \simeq \vec{v}(\vec{X}, 0) = \vec{u}(\vec{X}, 0)$$

Osservando che:

$$\vec{Y} = \int_0^t v(\tau, \vec{X}) d\tau \simeq \vec{u} t, \quad \vec{Y}' = \vec{Y} - \langle \vec{Y} \rangle \simeq [\vec{u} - \langle \vec{u} \rangle] t = \vec{u}' t$$

consegue che:

$$D_{ij}(\vec{X}, t) = \langle u'_i(\vec{X}, 0) u'_j(\vec{X}, 0) \rangle t^2 = Q_{ij}(\vec{X}, 0) t^2$$

e, quindi,:

$$L^2(t) \rightarrow L^2(0) + \frac{Q_{11}(\vec{X}, 0) + Q_{22}(\vec{X}, 0) + Q_{33}(\vec{X}, 0)}{3} t^2$$

La funzione di correlazione $Q_{ij}(\vec{X}, 0)$ dipende in generale dalla posizione $\vec{X}$ al tempo iniziale $t = 0$; essa è **indipendente da $\vec{X}$** nel caso di turbolenza **omogenea**; è **indipendente da t** nel caso di turbolenza **stazionaria**; risulta **costante** nel caso di turbolenza **omogenea e stazionaria**.

Nel caso di **turbolenza stazionaria** (quale, ad esempio, quella prodotta in galleria del vento) è sufficiente misurare la **velocità nel punto $\vec{X}$** per un tempo sufficientemente lungo al fine di determinare la funzione di correlazione. Le misure effettuate da Simmons e Salter (1938) e Townsend (1947) a valle di una griglia, in particolare, indicano una distribuzione di **densità di probabilità** delle componenti fluttuanti del moto molto prossima a una distribuzione **Gaussiana**.

III) Per tempi grandi ($t > a T_L$) è possibile studiare la struttura di D_{ij} solo nell'ipotesi di **turbolenza omogenea e stazionaria**. In tal caso, infatti:

$$Q_{ij}^L(\vec{X}, t_0, t) = Q_{ij}^L(t), \quad R_{ij}^L(\vec{X}, t_0, t) = R_{ij}^L(t)$$

avendo al solito posto $t_0 = 0$. Ne consegue che:

$$\begin{aligned}
D_{ij}(t) &= \langle Y'_i(\vec{X}, \tau_1) Y'_j(\vec{X}, \tau_2) \rangle \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle v'_i(\vec{X}, \tau_1) v'_j(\vec{X}, \tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^t \int_0^t Q_{ij}^L(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

Introducendo le variabili $\varphi = \tau_2 - \tau_1$, $\psi = (\tau_1 + \tau_2)/2$ e osservando che $d\tau_1 d\tau_2 = J d\varphi d\psi$, con $J = 1$ lo Jacobiano della trasformazione di coordinate, si ottiene:

$$\begin{aligned}
D_{ij}(t) &= \int_0^t d\varphi \int_{\varphi/2}^{t-\varphi/2} [Q_{ij}^L(\psi) + Q_{ji}^L(\psi)] d\psi \\
&= \int_0^t (t - \varphi) [Q_{ij}^L(\varphi) + Q_{ji}^L(\varphi)] d\varphi \\
&= \int_0^t (t - \varphi) [Q_{ij}^L(\varphi) + Q_{ji}^L(\varphi)] d\varphi
\end{aligned}$$

Nel caso di $i = j$ di nostro interesse si ha quindi

$$D_{ii}(t) = 2 \int_0^t (t - \varphi) Q_{ii}^L(\varphi) d\varphi = 2 \left(t \int_0^t Q_{ii}^L(\varphi) d\varphi - \int_0^t \varphi Q_{ii}^L(\varphi) d\varphi \right)$$

Si noti che nel derivare tale relazione è **sufficiente** che il campo di moto sia **omogeneo nella sola direzione x** , come avviene per molti campi di moto di interesse pratico (e.g. per il moto all'interno di **tubazioni e canali**). Per valori grandi di t ($> aT_L$) è d'altra parte ragionevole assumere che la correlazione $R_{ii}^L(t) \rightarrow 0$ in modo sufficientemente rapido da poter definire

$$\int_0^t R_{ii}^L(\varphi) d\varphi \simeq T_{Li} \quad \int_0^t \varphi R_{ii}^L(\varphi) d\varphi = R_i$$

con T_{Li} scala temporale integrale (lagrangiana) della correlazione e R_i valore finito. Ne consegue la **relazione asintotica**

$$D_{ii}(\tau) \approx 2 \sigma_{ui}^2 (T_{Li} t - R_i)$$

ovvero, per tempi sufficientemente grandi

$$D_{ii}(\tau) \approx 2 \sigma_{ui}^2 T_{Li} t$$

Per **tempi sufficientemente lunghi** la **varianza dello spostamento** delle particelle tende dunque a **crescere linearmente** con il tempo, e, quindi,

$$L^2(t) \rightarrow L^2(0) + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{2}{3} (T_{Li} \sigma_{ui}^2) \right] t$$

Tale comportamento avviene solo dopo che le particelle hanno **perso memoria** della loro velocità iniziale e, quindi **la dimensione della nuvola media** L eccede non solo la distanza che una particella deve percorrere per perdere memoria delle sue condizioni iniziali, ma anche quella caratterizzante i macrovortici, individuata dalla **macroscala spaziale integrale lagrangiana**,

$$L_L^2 = \frac{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2 + \sigma_{u3}^2}{3} T_L$$

In modo del tutto analogo, per **tempi sufficientemente grandi** si ottiene la seguente espressione per D_{ij} :

$$D_{ij}(t) \approx \sqrt{\sigma_{ui}^2 \sigma_{uj}^2} T_{ij} t \quad \text{con} \quad T_{ij} = \int_0^\infty [R_{ij}^L(\tau) + R_{ji}^L(\tau)] d\tau$$

La **varianza degli spostamenti** delle particelle D_{ij} tende dunque **crescere linearmente con il tempo**. Tale risultato è del tutto **analogo** a quello che si ottiene nello studio del **moto Browniano** che determina la diffusione molecolare.

4.3 Coefficienti di diffusione turbolenta

I risultati descritti nel precedente paragrafo possono essere utilizzati per determinare le espressioni dei coefficienti di diffusione turbolenta per tempi prossimi a quello di immissione ($t \leq T_L$) e sufficientemente grandi ($t \geq a T_L$). Ricordando il comportamento della **varianza della nuvola nel caso della diffusione molecolare**:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2\mathcal{D}$$

poniamo **per analogia**

$$\frac{dD_{ii}}{dt} = 2e_i$$

essendo e_i il termine diagonale del tensore della diffusività turbolenta scritto secondo gli assi principali.

I) Per tempi prossimi a quello di immissione ($\tau \leq T_L$) i coefficienti di diffusione turbolenta **crescono linearmente con il tempo**:

$$e_i = \frac{1}{2} \frac{dD_{ii}}{dt} = t Q_{ii}(\vec{X}, 0)$$

Il comportamento della nuvola è fortemente influenzato dalle **condizioni iniziali** (posizione e velocità) delle particelle fluide (i.e, dalla funzione di correlazione $Q_{ii}(\vec{X}, 0)$). La nuvola ha dimensioni inferiori a quelle dei macrovortici turbolenti, ovvero alla scala spaziale integrale.

III) Per **tempi sufficientemente grandi** ($t > a T_L$) i coefficienti di diffusione turbolenta sono **costanti**:

$$e_i = \frac{1}{2} \frac{dD_{ii}}{dt} = \sigma_{ui}^2 T_{Li} \quad \Rightarrow \quad e_i = \langle u_i'^2 \rangle T_{Li}$$

La nuvola, infatti, è cresciuta a tal punto da **perdere memoria** delle condizioni di immissione e la sua estensione è **molto maggiore** dei macrovortici che caratterizzano il campo di moto, le cui dimensioni sono associate alla **macroscala spaziale lagrangiana**

$$L_{Li} = \sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} T_{Li}$$

Utilizzando tale scala possiamo scrivere:

$$e_i = \sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} L_{Li}$$

I coefficienti di diffusione turbolenta dunque dipendono unicamente dall'**intensità della turbolenza**, $\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} \propto u_*$ e dalla lunghezza scala $L_{Li} \propto D_0$, essendo u_* la velocità di attrito della corrente e D_0 la scala tipica dei macrovortici del campo di moto considerato (ad esempio la profondità di una corrente a pelo libero).

II) Per **valori intermedi del tempo** ($T_L < t < aT_L$) la dipendenza di D_{ii} dal tempo diventa più complessa ed è strettamente associata alla forma della funzione di autocorrelazione R_{ii}^L . Tuttavia, nel caso in cui tale funzione **si mantenga ovunque positiva** la varianza D_{ii} risulta dipendere essenzialmente dalla intensità turbolenta σ_{ui}^2 e dal tempo scala T_{Li} e solo debolmente da R_{ii}^L .

Tale comportamento si realizza quando la nuvola è cresciuta in modo tale che le particelle fluide abbiano **perso memoria** delle condizioni iniziali, ma risulta ancora **inferiore** alla scala spaziale dei **macrovortici**. È il caso delle **circolazioni oceaniche** e di quelle che si instaurano in **laghi o estuari di grandi dimensioni**.

L'evoluzione della **nuvola media** può essere descritta da una equazione di diffusione, con diffusività proporzionale alla **potenza 4/3 della dimensione caratteristica della nuvola** purchè la turbolenza sia schematizzabile come omogenea, ovvero sufficientemente lontano da pareti. Si noti come il comportamento della **singola nuvola può scostarsi molto** da quello della nuvola media.

4.4 Coefficienti di diffusione turbolenta in un corso d'acqua

Il fatto che per tempi sufficientemente lunghi dopo l'immissione $e_i = \sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} L_{Li}$, associato all'analogia di Reynolds, consente di determinare agevolmente la struttura dei coefficienti di diffusione turbolenta verticale in una corrente a pelo libero. Osserviamo innanzitutto che, in una corrente a pelo libero $\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} \propto u_*$ mentre $L_{Li} \propto D_0$, essendo u_* la velocità di attrito e D_0 la profondità della corrente. Ne consegue che $e_z \propto u_* D_0$, analogamente a quanto accade per la viscosità cinematica turbolenta, $\nu_T \propto u_* D_0$. Sfruttando tale analogia, Reynolds postula che $e_z = \nu_T$. D'altra parte, l'andamento di ν_T può essere determinato facendo un semplice bilancio di forze su un prisma fluido di altezza $\zeta = D_0 - z$ e larghezza pari alla profondità della corrente. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_0 = \gamma D_0 i_f \quad u_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = g D_0 i_f \quad i_f = \frac{u_*^2}{g D_0} \\ \Rightarrow \quad \tau = \gamma \zeta i_f \quad \frac{\tau_0}{\rho} = g \zeta i_f \quad \frac{\tau}{\rho} = u_*^2 \frac{\zeta}{D_0} \end{aligned}$$

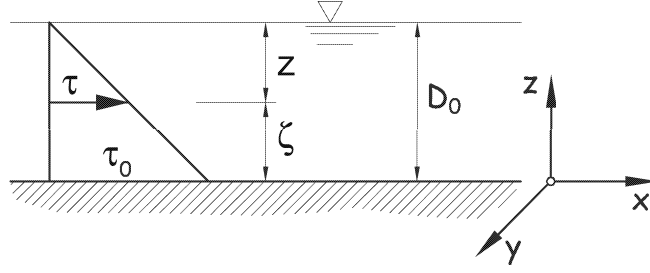


Figura 4.3: Distribuzione triangolare dello sforzo tangenziale complessivo in una corrente a pelo libero e relative notazioni.

D'altra parte, lo sforzo complessivo τ è dato dalla somma di sforzi viscosi τ_μ e turbolenti τ_T (Figura 4.4):

$$\tau = \tau_\mu + \tau_T = \mu \frac{d\langle u_x \rangle}{dz} - \rho \langle u'_x u'_z \rangle = \mu \frac{d\langle u_x \rangle}{dz} + \rho \nu_T \frac{d\langle u_x \rangle}{dz}$$

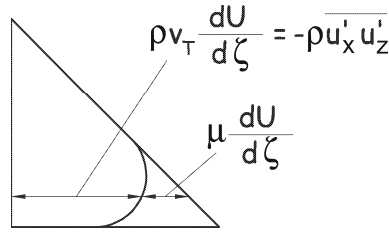


Figura 4.4: Andamento verticale dello sforzo tangenziale complessivo τ e degli sforzi viscosi τ_μ e turbolenti τ_T in una corrente a pelo libero.

Osservando che il contributo a τ degli sforzi viscosi diventa importante solo molto vicino alle pareti (nel cosiddetto sottostrato viscoso) possiamo scrivere che $\tau \simeq \tau_T$ e, quindi,

$$\nu_T = \frac{\tau/\rho}{d\langle u_x \rangle/dz} \quad \Rightarrow \quad \nu_T = \frac{u_*^2}{d\langle u_x \rangle/dz} \frac{D_0 - z}{D_0} \quad (4.10)$$

La distribuzione verticale di ν_T è dunque associata al gradiente verticale della velocità mediata sulla turbolenza. Tale gradiente può essere determinato considerando il profilo di velocità che deriva dall'assumere in modello di chiusura della turbolenza proposto da Prandtl, descritto nel paragrafo 1.6.2. Ricordando che esso è basato sulle seguenti assunzioni:

$$\tau = -\rho \langle u'_x u'_z \rangle \cong \tau_0$$

$$|u'_x| = \ell \left| \frac{d\langle u_x \rangle}{dz} \right|$$

$$|u'_x| \sim |u'_z|$$

$$u'_x > 0 \quad \Rightarrow \quad u'_z < 0$$

$$\ell = kz$$

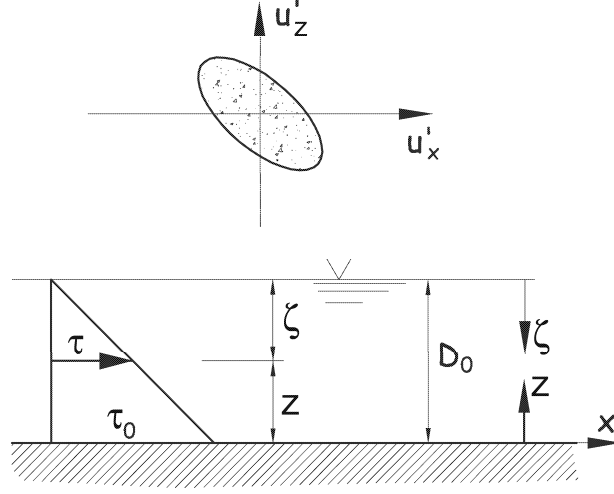


Figura 4.5: Distribuzione delle fluttuazioni turbolente in una corrente a pelo libero.

con k costante di Von Karman. Si noti come la quarta ipotesi tiene conto del fatto che, come illustrato in Figura 4.5, le fluttuazioni u'_x e u'_y sono statisticamente localizzate nel II e IV quadrante e, quindi, il prodotto $u'_x u'_y$ è mediamente negativo. Si avrà quindi:

$$\tau_0 = \rho (kz)^2 \left(\frac{d\langle u_x \rangle}{dz} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = kz \frac{d\langle u_x \rangle}{dz}$$

ovvero:

$$\frac{d\langle u_x \rangle}{dz} = \frac{u_*}{kz} \quad (4.11)$$

Sostituendo tale espressione nella (4.10) e, riordinando i vari termini,

$$\nu_T = k u_* D_0 \frac{z}{D_0} \left(1 - \frac{z}{D_0} \right) \quad (4.12)$$

La viscosità cinematica turbolenta in una corrente a pelo libero ha dunque un andamento parabolico e si annulla in corrispondenza del fondo e della superficie libera.

4.4.1 Diffusione turbolenta verticale

In base all'analogia di Reynolds, per cui $e_z = \nu_T$, il coefficiente di diffusione turbolenta verticale in una corrente a pelo libero risulta dunque (Figura 4.6):

$$e_z = k u_* D_0 \frac{z}{D_0} \left(1 - \frac{z}{D_0} \right) \quad (4.13)$$

come confermato sperimentalmente da numerosi esperimenti.

Gli esperimenti mostrano inoltre (Jobson e Sayre, 1970) che il profilo verticale di concentrazione è poco sensibile alla distribuzione verticale di e_z e, quindi, ai fini pratici, è in molti problemi possibile utilizzare il valore medio e_{z0} ottenuto mediando sulla verticale:

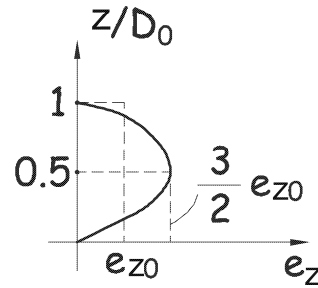


Figura 4.6: Andamento del coefficiente di diffusione turbolenta verticale e_z in una corrente a pelo libero.

$$e_{z0} = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} e_z dz = \frac{k}{6} u_* D_0$$

e, ricordando che la costante di von Karman $k = 0.4$,

$$e_{z0} = 0.067 u_* D_0$$

In talune situazioni è conveniente stimare il valore del coefficiente di diffusione turbolenta verticale tramite indagini di campo. Tali indagini diventano fondamentali **i)** nel caso di un inquinante che ha un peso specifico diverso da quello dell'acqua oppure **ii)** nel caso di un corso d'acqua fortemente irregolare (in cui le circolazioni secondarie influenzano sensibilmente il mescolamento verticale). Le metodologie utilizzabili a tale scopo sono quelle basate sull'uso della **lunghezza di mescolamento verticale** e della **distribuzione della concentrazione**.

Nel primo caso una certa quantità di soluto viene immessa puntualmente in una corrente e si misura la distanza L_z a valle del punto di immissione per cui il rapporto P_m tra la concentrazione minima e massima sulla verticale raggiunge un determinato valore (e.g., 0.98) prossimo a all'unità. In tal caso, il valore medio del coefficiente di mescolamento turbolento verticale risulta

$$e_{z0} = \beta \frac{U_0 D_0^2}{L_z}$$

dove β è una costante di proporzionalità che dipende da localizzazione della sorgente di soluto e dal grado di mescolamento iniziale. Ad esempio per una sorgente puntuale localizzata a mezz'acqua ed un rapporto $P_m = 0.98$, si può dimostrare, tramite il metodo dei punti immagine che $\beta = 0.134$.

La seconda metodologia si basa sul fatto che, in assenza di significativi gradienti trasversali della velocità e della concentrazione la concentrazione mediata trasversalmente

$$\bar{C}(x, z) = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} C(x, y, z) dy$$

soddisfa l'equazione:

$$U_0 \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(e_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right)$$

Tale condizione è spesso soddisfatta nella zona centrale di molti corsi d'acqua ma, ovviamente non è mai rispettata in prossimità delle sponde dove i gradienti di velocità non sono più trascurabili. Se e_z è assunto indipendente dalla profondità, nel caso di una sorgente puntuale posta in $(x, z) = (0, z_0)$ posta in un canale infinitamente largo la soluzione risulta

$$\bar{C}(x, z) = \frac{m}{B\sqrt{4\pi e_z x U_0}} \exp \left[-\frac{U_0 (z - z_0)^2}{4 e_z x} \right] \quad (4.14)$$

Chiaramente tale soluzione risulta valida se il soluto non ha ancora raggiunto le il fondo o la superficie libera. Essa può essere utilizzata per determinare e_z a partire da misure della distribuzione della concentrazione $C(x, y, z)$, osservando che

$$\bar{C}_{max}(x) = \frac{m}{B\sqrt{4\pi e_z x U_0}}$$

Il valore di e_z può essere facilmente stimato osservando che il grafico di $\bar{C}_{max}$ in funzione di $1/x^{1/2}$ è dato da una retta avente pendenza $m/(B\sqrt{4\pi e_z U_0})$. Tale modo di procedere, dunque, consente di determinare e_z noti m , B e U_0 .

È tuttavia possibile stimare e_z anche prescindendo dalla conoscenza di m , riscrivendo la (4.14) come

$$\ln \left(\frac{\bar{C}_{max}}{\bar{C}} \right) = \frac{U_0 (z - z_0)^2}{4 e_z x}$$

ed osservando che il grafico di $[\ln(\bar{C}_{max}/\bar{C})]^{1/2}$ in funzione di z ha una pendenza $U_0/(4 e_z x)$.

È importante osservare che tale metodologia tende a sovrastimare del 10 – 20% nel caso in cui la sorgente di soluto sia localizzata troppo vicino alla superficie libera o al fondo (Nokes, 1986).

4.4.2 Diffusione turbolenta longitudinale

Le strutture vorticosi presenti in una corrente turbolenta a pelo libero sono caratterizzate da una lunghezza scala simile nelle direzioni x e z . Effettuando il bilancio degli sforzi su un generico elemento fluido (Hintze, 1959) è infatti possibile dimostrare che gli sforzi turbolenti sono tali per cui $\tau_{xz}' \sim \tau_{xx}'$. Sfruttando l'analogia di Reynolds Possiamo dunque scrivere che

$$e_x = e_z = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} e_z dz = \frac{k}{6} u_* D_0$$

4.4.3 Diffusione turbolenta trasversale

Non esiste una trattazione teorica che consenta di determinare e_y in una corrente turbolenta a pelo libero. Infatti, procedendo come nel caso della diffusione turbolenta verticale, i.e., utilizzando l'analogia di Reynolds e la teoria della lunghezza di mescolamento di Prandtl, indicata con ℓ_y la **lunghezza di mescolamento trasversale**, si avrebbe:

$$e_y = \ell_y^2 \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}$$

Tuttavia, in un **moto piano**, quale quello che si sviluppa in un canale prismatico molto largo, essendo $\partial \langle u_x \rangle / \partial y = 0$, si arriverebbe all'assurdo che $e_y = 0$.

Bisogna quindi procedere **sperimentalmente**. I dati di letteratura, in particolare, indicano per e_y i seguenti intervalli di variazione:

1) canale **rettilineo molto largo** (correnti secondarie praticamente assenti) :

$$0.10 < \frac{e_y}{u_* D_0} < 0.26$$

2) canale **rettilineo prismatico** (deboli correnti secondarie):

$$0.15 < \frac{e_y}{u_* D_0} < 0.30$$

3) canale **debolmente meandriforme**:

$$0.30 < \frac{e_y}{u_* D_0} < 0.90$$

Tali stime sperimentali indicano che $e_y \approx 2e_z$. Ne consegue che il **mescolamento trasversale** è di due ordini di grandezza **più lento** del mescolamento verticale. Infatti:

$$T_z \propto \frac{L_z^2}{e_z}, \quad T_y \propto \frac{L_y^2}{e_y},$$

e, osservando che $L_z = D_0$ e $L_y \sim B$ (con D_0 e B , rispettivamente, profondità locale e larghezza della corrente):

$$\frac{T_y}{T_z} \propto \left(\frac{L_y}{L_z} \right)^2 \frac{e_z}{e_y} \cong \left(\frac{B}{D_0} \right)^2 \frac{1}{2} = O(10^2)$$

4.4.4 Trascurabilità della diffusione turbolenta longitudinale

I risultati fino ad ora ottenuti relativamente ai coefficienti di diffusione turbolenta verticale e longitudinale in una corrente a pelo libero indicano chiaramente che il contributo alla dinamica della concentrazione fornito dalla **diffusione longitudinale** è **generalmente trascurabile** rispetto al contributo dovuto alla avvezione.

Si consideri, per semplicità, l'equazione del bilancio di massa, mediata sulla turbolenza, nel caso di moto unidirezionale piano e fluido incomprimibile. Trascurando la diffusione molecolare si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}}_{O(\frac{U_0}{L_x})} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x})}_{O(\frac{e_x}{L_x^2})} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z})}_{O(\frac{e_z}{D_0^2})}$$

dove U_0 e D_0 sono la velocità e la profondità della corrente, mediate sulla sezione, mentre L_x è la lunghezza scala delle variazioni longitudinali di C . È immediato osservare che il rapporto tra il termine avvevativo e quello responsabile della diffusione turbolenta longitudinale risulta:

$$\frac{U_0/L_x}{e_x/L_x^2} = \frac{U_0 L_x}{e_x} \propto \frac{U_0 L_x}{u_* D_0} \gg 1$$

Infatti, per gli alvei naturali:

$$\frac{L_x}{D_0} \simeq \frac{10^2 - 10^3 m}{1 - 10 m} \simeq 10 - 100$$

Inoltre, ricordando che

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad U_0 = \chi \sqrt{D_0 i_f}, \quad \tau_0 = \gamma D_0 i_f$$

si ottiene

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{\chi}{\sqrt{g}} \simeq 10 - 15$$

con χ coefficiente di Chezy.

Capitolo 5

Dispersione idrodinamica

La dispersione idrodinamica è strettamente correlata all'azione combinata della **convezione non uniforme** e della **diffusione verticale e trasversale**.

Consideriamo il caso di un corso d'acqua in cui viene immesso un inquinante passivo e, per il momento, non reattivo. Come illustrato in Figura 5.1, è possibile individuare tre diverse regioni, il cui studio può essere effettuato utilizzando modelli con diverso grado di approssimazione.

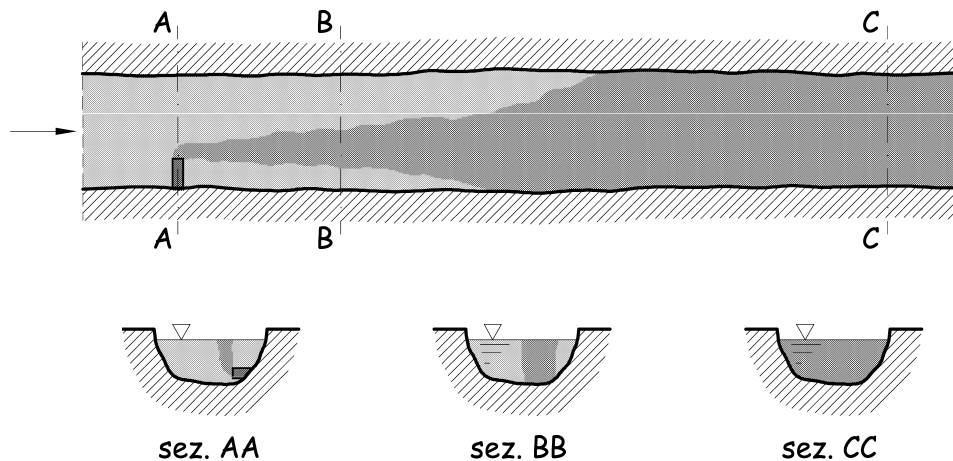


Figura 5.1: Definizione delle tre diverse zone che caratterizzano la dinamica di un soluto immerso in un corso d'acqua.

Nel **campo vicino** ($x \leq 20 - 50 D_0$) il mescolamento è condizionato dalla quantità di moto e dagli effetti di galleggiamento: è in tal caso necessario usare un **modello 3D**, ovvero risolvere l'equazione della diffusione turbolenta trattata nel paragrafo 4.1.

Nel **campo intermedio**, ($20 - 50 D_0 < x < 100 - 300 B$), dopo che l'inquinante si è diffuso sulla verticale, l'evoluzione della concentrazione può essere descritta utilizzando un modello 2D: la concentrazione mediata sulla verticale evolve in direzione longitudinale e trasversale per effetto del trasporto da parte della corrente e dei processi di mescolamento longitudinale e trasversale. Il mescolamento longitudinale, in particolare, è controllato dalla avvezione

non-uniforme associata ai gradienti verticali della velocità e al mescolamento turbolento verticale.

Nel **campo lontano** ($x > 100 - 300 B$), dopo che il mescolamento trasversale è completato, la distribuzione della concentrazione sulla sezione è pressochè uniforme. In tal caso è sufficiente usare un **modello 1D** che descriva il comportamento della concentrazione media sulla sezione. Il coefficiente di dispersione che compare in questo modello è il risultato dell'azione concomitante della avvezione non uniforme associata ai gradienti trasversali della velocità mediata sulla verticale e del mescolamento trasversale.

L'effetto della **pura convezione non uniforme** (i.e., in assenza di diffusione molecolare/turbolenta, cfr. Figura 5.2) è quello di far sì che un soluto inizialmente contenuto in una striscia rettilinea di spessore infinitesimo, tenda ad assumere un andamento simile a quello del profilo di velocità. La rapidità con cui aumenta la distanza delle particelle di soluto è superiore a quella in cui l'unico meccanismo è quello dovuto alla diffusione.

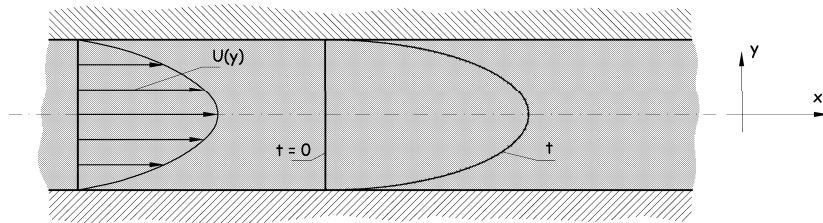


Figura 5.2: Pura convezione non uniforme in un campo di moto laminare.

L'effetto della **pura diffusione** (i.e., in assenza di gradienti di velocità, cfr. Figura 5.3) comporta che una distribuzione di concentrazione inizialmente variabile tende a evolvere verso una **concentrazione distribuita uniformemente** sull'intera sezione. In un tempo sufficientemente lungo ogni particella di soluto visita l'intera sezione e la velocità media di ciascuna molecola di soluto, essendo assoggettata all'azione convettiva caratteristica di ciascun punto della sezione, risulta dunque pari alla velocità media nella sezione. La posizione della particella diventa inoltre **indipendente da quella iniziale**.

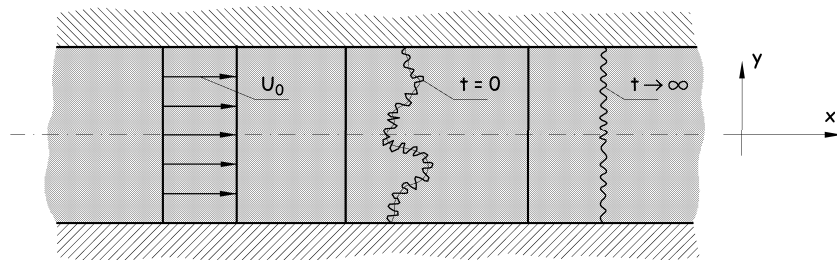


Figura 5.3: Esempio di pura diffusione trasversale.

La **dispersione idrodinamica** è data dall'**effetto combinato** della convezione non-uniforme e della diffusione molecolare/turbolenta. Rispetto ad un osservatore

in moto con la velocità media del fluido (ovvero della nuvola) la molecola di soluto compie una serie di movimenti casuali che, se osservati su un periodo sufficientemente lungo, sono del tutto simili a quelli di un processo di **random walk**, analogo a quello che si realizza in un processo diffusivo. Ne consegue una **diffusione** con diffusività efficace assai **diversa** (molto maggiore) da quella molecolare/turbolenta.

Da quanto sopra riportato risulta evidente come la dispersione idrodinamica entri in gioco nel momento in cui, l'equazione del bilancio di massa viene mediata spazialmente, ovvero sulla verticale (moto 2D) o sull'intera sezione (moto 1D) di un determinato corpo idrico.

Nel primo caso (campo intermedio di Figura 5.1) l'interazione tra avvezione non uniforme associata ai gradienti verticali della velocità mediata sulla turbolenza e la diffusione turbolenta verticale, quantificata da e_z determina un mescolamento longitudinale e trasversale quantificato dai coefficienti k_x e k_y .

Nel secondo caso (campo lontano di Figura 5.1) l'interazione tra l'avvezione non uniforme associata alle variazioni trasversali della velocità mediata sulla verticale e il mescolamento trasversale, quantificato da k_y , determina una dispersione longitudinale quantificata dal coefficiente di dispersione K .

5.1 Equazione 2D del bilancio di massa

L'equazione 2D del bilancio di massa è ottenuta **integrando lungo la verticale z** l'equazione della diffusione turbolenta (1.6):

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \langle \vec{u} \rangle) = \mathcal{D} \nabla^2 \langle c \rangle + \frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}) \quad (1.1)$$

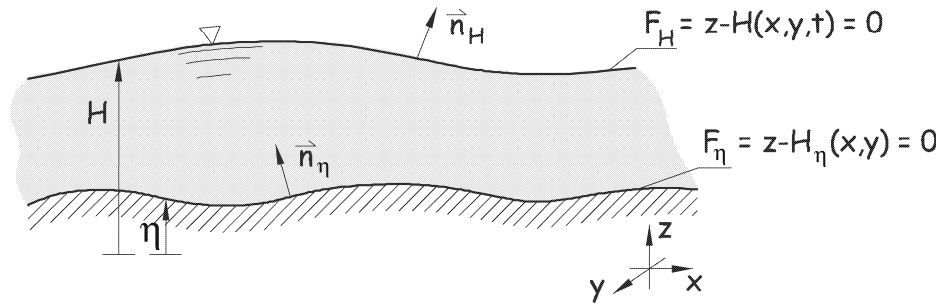


Figura 5.4: Notazioni utilizzate per ottenere l'equazione 2D del bilancio di massa.

Indicate con $\eta(x, y)$ e $H(x, y, t)$ la quota del fondo e quella della superficie libera (Figura 5.4), è innanzitutto utile ricordare:

la regola di derivazione sotto il segno di integrale (Leibnitz)

$$\int_{\eta}^H \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H f dz - f|_H \frac{\partial H}{\partial x} + f|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

la **condizione cinematica sulla superficie libera**, intesa come superficie materiale ($dF_H/dt = 0$, con $F_H = z - H$)

$$\left[\frac{\partial H}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial H}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial H}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right]_{z=H} = 0$$

la **condizione cinematica al fondo**, inteso come superficie materiale ($dF_\eta/dt = 0$, con $F_\eta = z - \eta$)

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \eta}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \eta}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right]_{z=\eta} = 0$$

le **condizioni dinamiche** sulla superficie libera e sul fondo che, in assenza di sorgenti/pozzi, comportano l'annullamento del flusso di inquinante attraverso tali contorni:

$$[\vec{q}^T \cdot \vec{n}]_{z=H} = 0, \quad [\vec{q}^T \cdot \vec{n}]_{z=\eta} = 0,$$

Queste ultime condizioni possono essere riscritte in forma estesa osservando che il versore $\vec{n}$ della **normale esterna** ad una generica superficie $F = 0$ risulta

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

e, quindi:

$$\vec{n}_H = \frac{(-\partial H/\partial x, -\partial H/\partial y, 1)}{\sqrt{1 + (\partial H/\partial x)^2 + (\partial H/\partial y)^2}}, \quad \vec{n}_\eta = \frac{(-\partial \eta/\partial x, -\partial \eta/\partial y, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \eta/\partial x)^2 + (\partial \eta/\partial y)^2}}$$

Ricordando l'espressione del flusso turbolento di soluto

$$\vec{q}^T = \left(e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}, e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}, e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right)$$

le condizioni dinamiche sulla superficie e sul fondo possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \left[-e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} - e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right]_{z=H} &= 0 \\ \left[-e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right]_{z=\eta} &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione della diffusione turbolenta, mediata sulla verticale, pertanto porge:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_\eta^H \langle c \rangle dz &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_\eta^H \langle c \rangle \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^H \langle c \rangle \langle u_y \rangle dz \\ &- \left[\langle c \rangle \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial H}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial H}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=H} \\ &+ \left[\langle c \rangle \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \eta}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \eta}{\partial y} - \langle u_z \rangle \right) \right]_{z=\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} dz \\
&\quad - \left[e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} - e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right]_{z=H} \\
&\quad + \left[e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right]_{z=\eta}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \langle c \rangle dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \langle c \rangle \langle u_x \rangle dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H \langle c \rangle \langle u_y \rangle dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} dz$$

Definendo:

$$\begin{aligned}
D(x, y) &= H - \eta & C &= \frac{1}{D} \int_{\eta}^H \langle c \rangle dz, \\
\overline{\langle c \rangle \langle u_x \rangle} &= \frac{1}{D} \int_{\eta}^H \langle c \rangle \langle u_x \rangle dz, & \overline{\langle c \rangle \langle u_y \rangle} &= \frac{1}{D} \int_{\eta}^H \langle c \rangle \langle u_y \rangle dz, \\
\overline{e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}} &= \frac{1}{D} \int_{\eta}^H e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} dz & \overline{e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}} &= \frac{1}{D} \int_{\eta}^H e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} dz
\end{aligned}$$

si ottiene infine:

$$\frac{\partial(DC)}{\partial t} + \frac{\partial(D \overline{\langle c \rangle \langle u_x \rangle})}{\partial x} + \frac{\partial(D \overline{\langle c \rangle \langle u_y \rangle})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \overline{e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \overline{e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}} \right) \quad (1.2)$$

Introduciamo ora, con un ragionamento analogo a quello seguito per ottenere le equazioni di Reynolds, la decomposizione

$$\langle c \rangle = C + \hat{C}, \quad \langle u_x \rangle = U_x + \hat{U}_x, \quad \langle u_y \rangle = U_y + \hat{U}_y,$$

$$e_x = E_x + \hat{E}_x, \quad e_y = E_y + \hat{E}_y,$$

dove C , U_x , U_y , E_x , E_y rappresentano i valori medi sulla verticale mentre $\hat{C}$, $\hat{U}_x$, $\hat{U}_y$, $\hat{E}_x$, $\hat{E}_y$ sono gli scostamenti rispetto alla media (Figura 5.5).

Sostituendo tali decomposizioni nella (1.2) si ottengono i seguenti termini

$$\begin{aligned}
\overline{\langle c \rangle \langle U_x \rangle} &= C U_x + \overline{\hat{C} U_x} + \overline{C \hat{U}_x} + \overline{\hat{C} \hat{U}_x} \\
\overline{C V} &= C U_y + \overline{\hat{C} U_y} + \overline{C \hat{U}_y} + \overline{\hat{C} \hat{U}_y} \\
\overline{e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}} &= E_x \frac{\partial C}{\partial x} + \overline{\hat{E}_x \frac{\partial C}{\partial x}} + \overline{E_x \frac{\partial \hat{C}}{\partial x}} + \overline{\hat{E}_x \frac{\partial \hat{C}}{\partial x}} \\
\overline{e_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}} &= E_y \frac{\partial C}{\partial y} + \overline{\hat{E}_y \frac{\partial C}{\partial y}} + \overline{E_y \frac{\partial \hat{C}}{\partial y}} + \overline{\hat{E}_y \frac{\partial \hat{C}}{\partial y}}
\end{aligned}$$

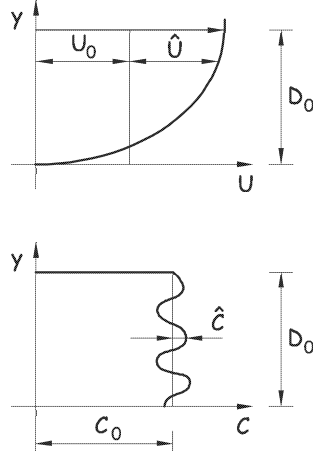


Figura 5.5: Decomposizione dei profili verticali di velocità e di concentrazione.

e, quindi, l'equazione 2D del bilancio di massa assume la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(DC)}{\partial t} + \frac{\partial(DCU_x)}{\partial x} + \frac{\partial(DCU_y)}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} D \left[E_x \frac{\partial C}{\partial x} + \overline{\hat{E}_x \frac{\partial \hat{C}}{\partial x}} - \overline{\hat{C} \hat{U}_x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} D \left[E_y \frac{\partial C}{\partial y} + \overline{\hat{E}_y \frac{\partial \hat{C}}{\partial y}} - \overline{\hat{C} \hat{U}_y} \right] \end{aligned}$$

Tale equazione può tuttavia essere semplificata osservando che (Taylor, 19xx) per tempi sufficientemente lunghi dopo l'immissione ($t > D_0^2/e_z$), ovvero dopo che l'inquinante si è mescolato sulla verticale, tende a stabilirsi un **bilancio** tra avvezione (convezione) non uniforme, associata ai gradienti verticali di velocità, e diffusione turbolenta verticale che produce un comportamento simile a quello diffusivo, ma con diffusività efficace molto maggiore di quella turbolenta ($k_x \gg E_x$). Tale comportamento è modellabile ponendo:

$$\overline{\hat{E}_x \frac{\partial \hat{C}}{\partial x}} - \overline{\hat{C} \hat{U}_x} = k_x \frac{\partial C}{\partial x}$$

e, per analogia

$$\overline{\hat{E}_y \frac{\partial \hat{C}}{\partial y}} - \overline{\hat{C} \hat{U}_y} = k_y \frac{\partial C}{\partial y}$$

In definitiva l'equazione 2D del bilancio di massa, (mediata sulla verticale), risulta:

$$\frac{\partial(DC)}{\partial t} + \frac{\partial(DU_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(DU_y C)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (Dk_y \frac{\partial C}{\partial y}) \quad (1.3)$$

Tale equazione può essere scritta in una forma equivalente ricordando l'equazione di continuità mediata sulla verticale (7.85)

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(DU_x)}{\partial x} + \frac{\partial(DU_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

che sostituita nella (1.3), porge:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} + U_y \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} (D k_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial y} (D k_y \frac{\partial C}{\partial y}) \quad (1.5)$$

Le equazioni (1.3) e (1.5) sono utilizzate per studiare la dinamica di un soluto passivo in un corso d'acqua, **sufficientemente a valle** della zona di immissione, quando l'inquinante si è mescolato lungo la verticale. La forma (1.3) è detta conservativa, ed è di norma utilizzata quando l'equazione viene risolta numericamente in quanto garantisce una corretta riproduzione della propagazione di fronti di concentrazione. La forma (1.5), invece, evidenzia il carattere convettivo del secondo e terzo termine a primo membro e viene spesso utilizzata nella derivazione di soluzioni di tipo analitico o semi-analitico.

Il **problema** che si pone a questo punto è quello di determinare **coefficienti di mescolamento** longitudinale k_x , e trasversale k_y in funzione dei parametri idrodinamici del moto. Tale problema è stato risolto da Taylor (1953, 1954) nel caso del moto (sia laminare sia turbolento) entro condotte in pressione e da Elder (1954) nel caso di una corrente piana a pelo libero.

5.2 Coefficiente di mescolamento longitudinale

Si consideri il moto turbolento, **unidirezionale e uniforme**, che si realizza in un canale **rettangolare molto largo** ($B \gg D_0$). Come illustrato in Figura 5.6, siano x l'asse longitudinale, posto sul fondo del canale e coincidente con l'asse del medesimo, y l'asse trasversale e z l'asse normale al fondo.

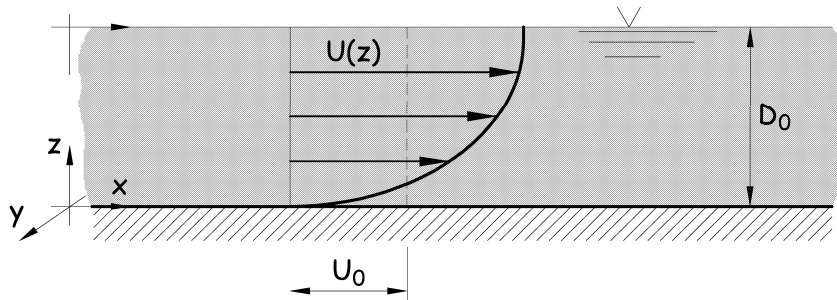


Figura 5.6: Mescolamento longitudinale in un moto piano.

In base alle ipotesi fatte avremo:

$$\langle \vec{u} \rangle = [\langle u_x \rangle(z), 0, 0] \quad \langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla \langle c \rangle = \langle u_x \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}$$

Trascurando il contributo della diffusione molecolare, l'equazione della diffusione turbolenta diventa pertanto:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}) \quad (2.6)$$

A tale equazione vanno associate le **condizioni al contorno** che impongono l'annullamento del flusso di massa sul fondo e sulla superficie libera,

$$e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} = 0 \quad z = 0, D_0. \quad (2.7)$$

Inoltre, introducendo l'**analogia di Reynolds** e ricordando che $e_x \simeq e_z$, possiamo scrivere:

$$e_x = \nu_T(z) = k u_* D_0 \frac{z}{D_0} \left(1 - \frac{z}{D_0}\right), \quad E_x = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} e_z dz = 0.067 u_* D_0$$

Vogliamo dimostrare (**Elder, 1959**) che la dinamica della concentrazione, mediata sulla verticale è governata da una equazione della avvezione-diffusione con **coefficiente di diffusione longitudinale** efficace

$$k_x = 5.86 u_* D_0$$

A tale scopo poniamo

$$\epsilon = \frac{E_x}{k_x} = \frac{0.067}{5.86} \ll 1$$

e introduciamo un sistema di riferimento mobile con la nuvola di soluto, ovvero in moto con velocità

$$U_x = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} \langle u_x \rangle(z) dz$$

Indicata con $\xi = x - U_x t$ la nuova coordinata longitudinale, e osservando che, essendo ora $\langle c \rangle = \langle c \rangle(\xi(x, t), z, t)$:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} - U_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \xi},$$

l'equazione (2.6) nel sistema di riferimento mobile diventa

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + [\langle u_x \rangle - U_x] \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}) \quad (2.8)$$

Un osservatore in moto con la nuvola vede la concentrazione media del soluto diminuire per effetto dell'azione combinata dell'avvezione non-uniforme (che tende a incrementare i gradienti di concentrazione) e il mescolamento verticale (che, viceversa, tende a rendere uniforme la concentrazione). Tale azione combinata, per un osservatore in moto con la nuvola, si traduce in una dinamica della concentrazione simile a quella indotta dalla diffusione turbolenta longitudinale, ma con coefficiente di diffusività ben maggiore.

Al fine di risolvere il problema posto dalla (2.8) associata alle condizioni al contorno (2.7), è opportuno analizzare l'**ordine di grandezza** dei **vari termini** che compaiono in tale equazione, riferiti al termine di diffusione verticale, ricordando

inoltre che i **tempi scala** T_0 , T_1 e T_2 associati, rispettivamente, al **mescolamento verticale**, alla **convezione** non uniforme, operante alla scala della nuvola di inquinante L_0 , e alla **dispersione** idrodinamica longitudinale sono:

$$T_0 = \frac{D_0^2}{E_x}, \quad T_1 = \frac{L_0}{U_0}, \quad T_2 = \frac{L_0^2}{k_x}$$

dove D_0 e U_0 rappresentano le scale tipiche della profondità e della velocità. Otteniamo

$$\frac{\partial \langle c \rangle / \partial t}{\partial / \partial z (e_z \partial \langle c \rangle / \partial z)} \sim \frac{k_x / L_0^2}{E_z / D_0^2} = \frac{T_0}{T_2}$$

$$\frac{U \partial \langle c \rangle / \partial \xi}{\partial / \partial z (e_z \partial \langle c \rangle / \partial z)} \sim \frac{U_0 / L_0}{E_z / D_0^2} = \frac{T_0}{T_1}$$

$$\frac{\partial / \partial \xi (e_x \partial \langle c \rangle / \partial \xi)}{\partial / \partial z (e_z \partial \langle c \rangle / \partial z)} \sim \frac{E_x / L_0^2}{E_z / D_0^2} = \left(\frac{D_0}{L_0} \right)^2$$

È facile dimostrare che, nei corsi d'acqua, i tre rapporti sopra riportati sono comunque piccoli, essendo tipicamente:

$$T_0 \ll T_1 \ll T_2$$

Infatti, sfruttando il fatto che ϵ è una quantità piccola, e assumendo che:

$$\epsilon = \frac{T_0}{T_1} \quad \epsilon^2 = \frac{T_0}{T_2}$$

ne consegue che le tre scale temporali T_0 , T_1 e T_2 risultano ben distinte tra loro se

$$\frac{D_0}{L_0} = \epsilon^{3/2}, \quad P_e = \frac{U_0 D_0}{E_x} = \epsilon^{-1/2}$$

Tali condizioni risultano soddisfatte quando la nuvola di inquinante ha raggiunto lunghezze dell'ordine delle centinaia di metri e per le velocità che generalmente si realizzano nei corsi d'acqua. Pertanto avremo che:

$$\underbrace{\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t}}_{O(\epsilon^2)} + \underbrace{[\langle u_x \rangle - U_x] \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \xi}}_{O(\epsilon)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (e_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x})}_{O(\epsilon^3)} + \frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z})$$

L'analisi degli **ordini di grandezza** sopra condotta, inoltre, suggerisce uno sviluppo perturbativo della soluzione del tipo:

$$\langle c \rangle = C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + O(\epsilon^3)$$

che, sostituito nella (2.8), ai vari **ordini di approssimazione** comporta i seguenti problemi differenziali al contorno:

$$O(\epsilon^0)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(e_z \frac{\partial C_0}{\partial z}) &= 0 & 0 \leq z \leq D_0 \\ e_z \frac{\partial C_0}{\partial z} &= 0 & z = 0, D_0\end{aligned}\quad (2.9)$$

$O(\epsilon)$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e_z \frac{\partial C_1}{\partial z}) = [\langle u_x \rangle - U_x] \frac{C_0}{\partial \xi} \quad 0 \leq z \leq D_0 \quad (2.10)$$

$$e_z \frac{\partial C_1}{\partial z} = 0 \quad z = 0, D_0 \quad (2.11)$$

$O(\epsilon^2)$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e_z \frac{\partial C_2}{\partial z}) = \frac{\partial C_0}{\partial t} + [\langle u_x \rangle - U_x] \frac{\partial C_1}{\partial \xi} \quad 0 \leq z \leq D_0 \quad (2.12)$$

$$e_z \frac{\partial C_2}{\partial z} = 0 \quad z = 0, D_0 \quad (2.13)$$

5.2.1 Il problema all'ordine $O(\epsilon^0)$

La soluzione di tale problema (2.9) è facilmente derivabile e comporta che la C_0 **non dipenda da z** , ovvero,

$$C_0 = C_0(\xi, t)$$

5.2.2 Il problema all'ordine $O(\epsilon)$

Il problema posto dalla (2.10) indica che, a tale ordine di approssimazione, esiste un **bilancio** tra **avvezione non-uniforme** e **diffusione turbolenta verticale**. Tale problema può essere risolto assumendo

$$C_1 = N(z) \frac{\partial C_0}{\partial \xi}$$

in modo da ricondursi a un problema al contorno alle derivate ordinarie,

$$\begin{aligned}\langle u_x \rangle - U_x &= \frac{d}{dz}(e_z \frac{dN}{dz}) & 0 \leq z \leq D_0 \\ e_z \frac{dN}{dz} &= 0 & z = 0, D_0.\end{aligned}$$

Integrando una prima volta e imponendo condizioni di flusso nullo sul fondo, si ha:

$$e_z \frac{dN}{dz} = \int_0^z [\langle u_x \rangle(z') - U_x] dz'$$

Integrando una seconda volta, si ottiene:

$$N(z) = \int_0^z \frac{dz'}{e_z} \int_0^{z'} [\langle u_x \rangle(z'') - U_x] dz'' + N_0$$

con $N_0 = N(0)$ **costante di integrazione** da determinare imponendo che la concentrazione C_0 sia uguale al valor medio sulla verticale a meno di termini di ordine $O(\epsilon^2)$, ovvero,

$$\frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} \langle c \rangle dz = C_0 + O(\epsilon^2) \Rightarrow \int_0^{D_0} C_1 dz = \frac{\partial C_0}{\partial x} \int_0^{D_0} N dz = 0 \Rightarrow \int_0^{D_0} N dz = 0$$

Ne consegue che:

$$N_0 = -\frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} dz \int_0^z \frac{dz'}{e_z} \int_0^{z'} [\langle u_x \rangle(z'') - U_x] dz''$$

5.2.3 Il problema all'ordine $O(\epsilon^2)$

Sostituendo i risultati del problema all'ordine precedente,

$$C_1 = N \frac{\partial C_0}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial C_1}{\partial \xi} = N(z) \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2}$$

nella (2.12):

$$\frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial C_2}{\partial z}) = \frac{\partial C_0}{\partial t} + N(z) [\langle u_x \rangle(z) - U_x] \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2}$$

e integrando lungo la verticale:

$$D_0 \frac{\partial C_0}{\partial t} + \int_0^{D_0} N(z) [\langle u_x \rangle(z) - U_x] dz \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2} = 0$$

si ottiene:

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2} \tag{2.14}$$

con k_x **coefficiente di dispersione longitudinale** pari a:

$$k_x = \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} N(z) [U_x - \langle u_x \rangle(z)] dz \tag{2.15}$$

È a questo punto possibile riscrivere la (2.12) come

$$\frac{\partial}{\partial z} (e_z \frac{\partial C_2}{\partial z}) = \{k_x + N(z) [\langle u \rangle - U_x]\} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2}$$

Ponendo:

$$C_2 = M(z) \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi^2}$$

si ottiene il problema al contorno differenziale ordinario:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(e_z \frac{dM}{dz} \right) &= k_x + N(z) [\langle u \rangle - U_x] & 0 \leq z \leq D_0 \\ e_z \frac{dM}{dz} &= 0 & z = 0, D_0 \end{aligned}$$

che può essere risolto in modo del tutto analogo a quello seguito per il problema all'ordine $O(\epsilon)$. In particolare, affinché la concentrazione C_0 sia uguale, a meno di termini di ordine ϵ^3 , alla concentrazione mediata sulla verticale è necessario imporre che $\int_0^{D_0} M(z) dz = 0$. Ciò garantisce che le **variazioni della concentrazione** sulla verticale sono **piccole**, ovvero di ordine $O(\epsilon^3)$.

Per i nostri scopi, non risulta necessario calcolare M . Infatti, ritornando al sistema di riferimento fisso originario, la (2.14) fornisce l'equazione che governa la dinamica della concentrazione media sulla verticale:

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + U_x \frac{\partial C_0}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + O(\epsilon^3)$$

corretta fino all'ordine $O(\epsilon^3)$.

5.2.4 Il coefficiente di mescolamento longitudinale k_x

Il coefficiente di dispersione longitudinale (2.15) è facilmente calcolabile ricordando l'andamento del profilo di velocità (6.66) e della diffusività verticale in un moto piano turbolento (4.13):

$$\langle u_x \rangle - U_x = \frac{u_*}{k} [1 + \ln(\zeta)], \quad e_z = u_* D_0 k \zeta (1 - \zeta), \quad \zeta = \frac{z}{D_0}$$

Ne consegue che:

$$\begin{aligned} N(z) - N_0 &= \int_0^z \frac{dz'}{e_z(z')} \int_0^{z'} [\langle u_x \rangle(z'') - U_x] dz'' \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^z \frac{dz'}{u_* D_0 \zeta' (1 - \zeta')} \int_0^{z'} u_* [1 + \ln(\zeta'')] dz'' \\ &= \frac{D_0}{k^2} \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{\zeta' (1 - \zeta')} \int_0^{\zeta'} [1 + \ln(\zeta'')] d\zeta'' \\ &= -\frac{D_0}{k^2} \int_0^\zeta \frac{(1 - \zeta') \ln(\zeta')}{\zeta' (1 - \zeta')} d\zeta' \\ &= -\frac{D_0}{k^2} \int_0^\zeta \frac{\ln(\zeta')}{\zeta'} d\zeta' \end{aligned}$$

e, risolvendo l'integrale per serie

$$N(z) = \frac{D_0}{k^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n^2} - 0.648 \right]$$

Il coefficiente di mescolamento longitudinale per un moto piano risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{1}{D_0} \int_0^{D_0} N(z) [U_x - \langle u_x \rangle(z)] dz \\
 &= \frac{D_0 u_*}{k^3} \int_0^1 \left\{ \underbrace{\left(\int_0^{\zeta'} \frac{\ln(1 - \zeta'')}{\zeta''} d\zeta'' \right)}_{Nk^2/D_0} \underbrace{[1 + \ln(1 - \zeta)]}_{[U - U_0]k/u_*} \right\} d\zeta' \\
 k_x &= 5.86 u_* D_0
 \end{aligned}$$

Il coefficiente di dispersione k_x risulta un **ordine di grandezza maggiore** del coefficiente di diffusione turbolenta longitudinale e_x e, quindi, comporta un contributo preponderante alla dinamica della concentrazione mediata sulla verticale. Infatti, integrando lungo la verticale il primo termine a secondo membro della (2.8) e ricordando che $C = C_0(x, t) + O(\epsilon^3)$, a meno di termini $O(\epsilon^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_0^{D_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(e_x(z) \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \right) dz &= \int_0^{D_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(e_x(z) \frac{\partial C_0}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} \int_0^{D_0} e_x(z) dz \\
 &= \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} D_0 e_{x0} = 0.067 u_* D_0 \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

Tale contributo, sommato a quello dispersivo dovuto alla convezione non uniforme, porta ad un coefficiente di mescolamento longitudinale pari a $k_x = (5.86 + 0.067) u_* D_0 = 5.93 u_* D_0$. Riassumendo si ha che:

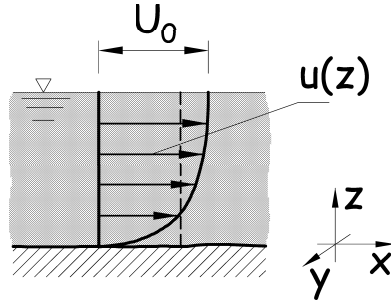


Figura 5.7: Andamento logaritmico del profilo di velocità in una corrente a pelo libero in moto turbolento.

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{1}{D} \int_0^D N(z) [U_x - \langle u_x \rangle(z)] dz, \\
 N(z) &= \int_0^z \frac{d\zeta}{e_z} \int_0^\zeta [\langle u_x \rangle(\zeta') - U_x] d\zeta' + N_0 \\
 k_x &= \frac{1}{D} \int_0^D [U_x - \langle u_x \rangle(z)] dz \left\{ \int_0^z \frac{d\zeta}{e_z} \int_0^\zeta [\langle u_x \rangle(\zeta') - U_x] d\zeta' + N_0 \right\},
 \end{aligned}$$

5.3 Il coefficiente di mescolamento trasversale

Il procedimento proposto da Elder per determinare k_x non può essere esteso al calcolo del coefficiente di mescolamento trasversale k_y , in quanto non esiste in un moto piano un profilo trasversale della velocità. È quindi necessario ricorrere a dati sperimentali di letteratura oppure a misure di campo

Nel caso di un **canale rettilineo** non è a tutt'oggi ancora chiaro il contributo relativo della **diffusione turbolenta** e delle **correnti secondarie** a k_y (Rutherford, 1994, p. 108). Sulla base ai **dati sperimentali**, si può in generale assumere che:

$$0.15 < \frac{k_y}{D_0 u_*} < 0.3$$

Nel caso di **canali con deboli curvature** il ruolo delle **correnti secondarie** diventa predominante. Possono essere classificati in tale categoria i canali in cui $BU_0/(r_0 u_*) < 2$, con B larghezza della sezione, U_0 velocità media nella sezione, u_* velocità di attrito media nella sezione e r_0 raggio di curvatura all'apice della curva. Sulla base dei dati disponibili (Rutherford, 1994; Lau and Krishnappan, 1981; Fisher et al., 1979) si può assumere che, in tali canali:

$$0.3 < \frac{k_y}{D_0 u_*} < 0.9$$

Aumentando il raggio di curvatura le correnti secondarie indotte dal moto in curva favoriscono il mescolamento trasversale e, quindi, in **canali con forti curvature** si ha:

$$1 < \frac{k_y}{D_0 u_*} < 3$$

il valore 3 potendo essere superato in presenza di curve con raggi di curvatura estremamente piccoli (Sayre, 1973).

Infine, è interessante osservare che, in condizioni di moto uniforme i dati sperimentali relativi a segmenti omogenei di canali prismatici suggeriscono una **distribuzione trasversale** di k_y tale per cui:

$$\frac{k_y(y)}{D(y) u_*(y)} = \frac{k_y(y)}{D(y) \sqrt{D(y) g i_f}} \simeq \text{cost}$$

con g accelerazione di gravità e i_f pendenza longitudinale del fondo. Ne consegue che

$$k_y(y) \propto D(y)^{3/2}$$

5.4 Dispersione longitudinale

La dispersione longitudinale è strettamente associata ad una trattazione monodimensionale della dinamica della concentrazione, ovvero controlla la distribuzione spazio-temporale della concentrazione media sulla sezione. È evidente come un modello monodimensionale possa essere utilizzato solo nel campo lontano, ovvero ad

una distanza dell'ordine di 100-300 B a valle della sezione di immissione, quando l'inquinante si è mescolato su tutta la sezione.

Integriamo dunque l'equazione 2D del bilancio di massa in direzione trasversale:

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial(DU_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(DU_y C)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(Dk_y \frac{\partial C}{\partial y})$$

assumendo che le **sponde** siano descritte dalla relazione:

$$F_B = y - \frac{B(x)}{2} = 0$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial(DC)}{\partial t} dy + \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial(DU_x C)}{\partial x} dy &= \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial}{\partial x}(Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) dy \\ -[DU_y C]_{B/2} + [DU_y C]_{-B/2} + [Dk_y \frac{\partial C}{\partial y}]_{B/2} - [Dk_y \frac{\partial C}{\partial y}]_{-B/2} & \end{aligned}$$

e, applicando la regola di derivazione sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-B/2}^{B/2} DC dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} DU_x C dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} (Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) dy \\ + \left[\frac{DC}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + U_x \frac{\partial B}{\partial x} - 2U_y \right) \right]_{B/2} - \left[\frac{DC}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + U_x \frac{\partial B}{\partial x} - 2U_y \right) \right]_{-B/2} & \\ + \left[D \left(k_y \frac{\partial C}{\partial y} - k_x \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right]_{B/2} - \left[D \left(k_y \frac{\partial C}{\partial y} - k_x \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right]_{-B/2} & \end{aligned}$$

Osservando che la **condizione cinematica sulle sponde** richiede

$$\frac{dF_B}{dt} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} U_x \frac{\partial B}{\partial x} - U_y \right]_{y=\pm B/2} = 0$$

e dovendo essere **nullo** alle pareti il **flusso dispersivo** di inquinante

$$\vec{q}^k = D \left(k_x \frac{\partial C}{\partial x}, k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)$$

ne consegue

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-B/2}^{B/2} (DC) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} (DU_x C) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} (Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) dy$$

D'altra parte, osservando che:

$$A = \int_{-B/2}^{B/2} D dy, \quad Q = \int_{-B/2}^{B/2} DU_x dy,$$

è evidente che la **media sulla sezione** di una generica grandezza f risulta definita come:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{A} \int_{-B/2}^{B/2} (Df) dy,$$

Pertanto:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{A} \int_{-B/2}^{B/2} DC dy \quad U = \frac{1}{A} \int_{-B/2}^{B/2} D U_x dy = \frac{Q}{A}$$

Introduciamo ora la seguente decomposizione:

$$C(y) = \mathcal{C} + \tilde{C}(y) \quad U_x(y) = U + \tilde{U}(y)$$

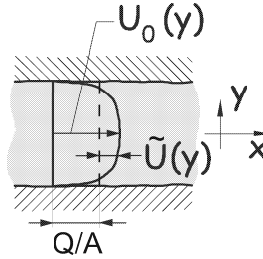


Figura 5.8: Gradienti trasversali della velocità mediata sulla verticale in un corso d'acqua.

che distingue tra valori medi sulla sezione e **variazioni in direzione trasversale** della concentrazione e della velocità, mediate sulla verticale. È immediato osservare che:

$$\begin{aligned} \int_{-B/2}^{B/2} (D U_x C) dy &= \int_{-B/2}^{B/2} (D U C) dy + \int_{-B/2}^{B/2} (D \tilde{U} \tilde{C}) dy \\ &= A U \mathcal{C} + \int_{-B/2}^{B/2} (D \tilde{U} \tilde{C}) dy \end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione del **bilancio di massa 1D** per una **corrente monodimensionale in moto vario** può essere scritta nella forma:

$$\frac{\partial(\mathcal{C}A)}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{C}Q)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K A \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right) \quad (4.16)$$

con K **coefficiente di dispersione longitudinale** definito come

$$K \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} = -\frac{1}{A} \int_{-B/2}^{B/2} D \left(\tilde{U} \tilde{C} + k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) dy$$

È importante osservare che il contributo alla dispersione longitudinale dovuto alla variazione trasversale di U_x e C è di gran lunga maggiore di quello associato al mescolamento longitudinale, ovvero

$$-\int_{-B/2}^{B/2} (D\tilde{U}\tilde{C}) dy \gg \int_{-B/2}^{B/2} (Dk_x \frac{\partial C}{\partial x}) dy$$

Consideriamo ora l'equazione di continuità 1D (7.104) scritta per un tubo di flusso :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Sostituendo tale equazione nella (4.16), l'equazione della avvezione-dispersione può infine porsi nella forma

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (K A \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}) \quad (4.17)$$

5.4.1 Osservazioni sulla dispersione longitudinale

Consideriamo la dispersione longitudinale in un canale in condizioni di **moto uniforme** (i.e., $\partial A/\partial x = \partial K/\partial x = 0$). Sotto tali ipotesi la (4.17) diventa

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2}, \quad U = Q/A \quad (4.18)$$

e, quindi, assume una **forma analoga** a quella della **avvezione-diffusione molecolare** unidirezionale. Risulta pertanto possibile studiare la dispersione longitudinale tramite un **modello fickiano**, sostituendo K a $\mathcal{D}$. Nel caso di una **immissione istantanea** di una massa M in $x = 0$ al tempo $t = 0$ si ottiene così la cosiddetta **soluzione di Taylor**:

$$\mathcal{C}(x, t) = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K t}} \exp \left[-\frac{(x - U t)^2}{4 K t} \right] \quad (4.19)$$

Essa, al pari della soluzione fondamentale ottenuta per la diffusione molecolare, comporta che:

- i) L'**andamento temporale** di $\mathcal{C}$ in una **fissata sezione** è **asimmetrico**, con una fase di crescita più rapida di quella di esaurimento.
- ii) L'**andamento spaziale** di $\mathcal{C}$ per un **fissato istante** è Gaussiano. Pertanto, come evidenziato nella discussione della **soluzione fondamentale**:
 - la **varianza** della nuvola **cresce linearmente con il tempo**

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2K$$

- i **momenti** di ordine **dispari** sono **nulli** (ovvero, la nuvola è perfettamente simmetrica rispetto a $x = 0$)

I **dati sperimentali**, d'altra parte, indicano che tale comportamento può essere raggiunto solo asintoticamente, sufficientemente a valle della zona dove avviene il rilascio accidentale di inquinante. In generale è infatti possibile distinguere tre diverse regioni caratterizzate da un particolare comportamento della nuvola, ovvero

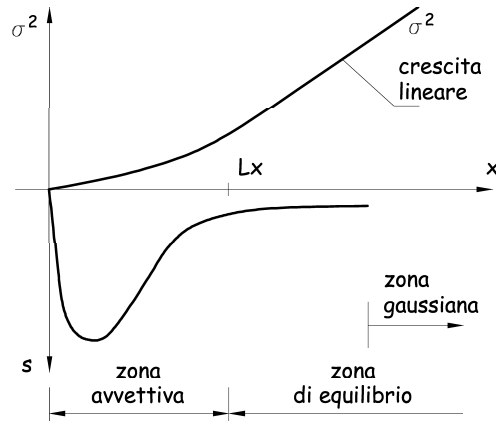


Figura 5.9: Tipico andamento sperimentale della varianza σ^2 e della skewness S calcolate con riferimento alla concentrazione media di una nuvola di inquinante passivo, non-reattivo.

zona avvevettiva ($x < L_x$)

zona di equilibrio ($x > L_x$)

zona Gaussiana ($x > a L_x$)

Nella **zona avvevettiva** la varianza della concentrazione non cresce linearmente e la distribuzione spaziale della concentrazione ad un fissato istante è fortemente asimmetrica: la nuvola di inquinante ha un fronte molto più ripido della coda. Tale **asimmetria**, che tende a raggiungere un massimo per poi decadere, è dovuta alla **avvezione-non uniforme** ed, eventualmente, alla **configurazione iniziale** della nuvola. La lunghezza L_x della **zona avvevettiva** è strettamente connessa al tempo scala euleriano, $\propto B^2/k_z$, che una particella impiega per visitare l'intera sezione, ovvero

$$L_x = k U \frac{B^2}{k_z} \quad 0.3 < k < 0.6$$

Nella **zona di equilibrio**, come evidenziato da Taylor, si stabilisce approssimativamente un **equilibrio** tra **avvezione trasversale non-uniforme** (che favorisce la dispersione longitudinale) e **mescolamento trasversale** (che, invece, contrasta la dispersione longitudinale). La varianza tende a crescere linearmente con il tempo mentre l'asimmetria della nuvola tende a diminuire progressivamente.

Infine, nella **zona Gaussiana** la distribuzione della concentrazione diventa Gaussiana. In tale regione, quindi, è possibile applicare alla **dispersione longitudinale** un modello **Fickiano**. La stima del coefficiente a che individua quanto è necessario spingersi all'interno della regione di equilibrio per avere una distribuzione di concentrazione gaussiana può avvenire sulla base di dati sperimentali. Quelli disponibili in letteratura, tuttavia, suggeriscono una notevole variabilità di a , in relazione alle particolari condizioni sperimentali considerate:

- $a = 2.5$ Fischer et al. (1979)

- $a = 4 - 5$ Denton (1990)
- $a = 10$ Sayre (1968)
- $a = 50$ Liu e Cheng (1980)

In particolare, α aumenta decisamente in presenza di **zone morte** poste in corrispondenza del fondo del corso d'acqua o in vicinanza delle sponde.

5.4.2 Il coefficiente di dispersione longitudinale

I **dati di letteratura** (Rutherford, 1994, p.201) indicano che K_x può variare entro un ampio intervallo di valori:

$$4 < \frac{K}{Bu_*} < 100$$

D'altra parte, ricordando che la velocità di attrito $u_* = \chi/\sqrt{g}$ (con χ coefficiente di Chezy), possiamo scrivere

$$4\sqrt{C_f} < \frac{K}{UB} < 100\sqrt{C_f}$$

dove $C_f = g/\chi^2$ è il coefficiente di resistenza, variabile, negli alvei naturali, nell'intervallo $\sim 0.1 \div 0.01$). La grande variabilità di K_x è connessa a cause quali:

- i gradienti trasversali di velocità dovuti alla particolare **geometria delle sezioni**
- i gradienti spaziali di velocità dovuti alle **variazioni di portata**
- le correnti secondarie indotte dalla **presenza di curve**
- l'effetto delle cosiddette **zone morte** (e.g., golene laterali)

Le **metodologie** utilizzate per calcolare K includono: i) le **formule semi-empiriche**; ii) la stima da misure del **campo di velocità**; iii) il **metodo dei momenti**; iv) il **metodo della calibrazione**; v) il **metodo di Chatwin** e Vi) altri **metodi grafici**.

i) Formule semi-empiriche

Le Formule semi-empiriche sono molto spesso determinate sulla base di opportune regressioni multiple dei dati sperimentali (e.g., Seo e Cheong, 1998; Kashefipour e Falconer, 2002). Tra tali formule si ricordano:

- *Formula di McQuivey and Keefer* (1974)

$$K_x = 0.058 \frac{Q}{i_f B}$$

con Q portata volumetrica; B larghezza dell'alveo; i_f : pendenza del fondo.

- *Formula di Liu* (1977)

$$K_x = \alpha \frac{U^2}{D u_*}, \quad \alpha = 0.18 \left(\frac{u_*}{U} \right)^{3/2}$$

con D profondità media sulla sezione; U velocità media sulla sezione; u_* velocità d'attrito media sulla sezione;

- *Formula di Seo e Cheong* (1998)

$$K_x = 5.195 u_* D \left(\frac{B}{D} \right)^{0.62} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{1.428}$$

- *Formula di Kashefipour e Falconer* (2002)

$$K_x = 10.612 U D \left(\frac{U}{u_*} \right)$$

ii) Metodo del campo di velocità

La stima di K noto il campo di velocità deriva dall'estensione della trattazione di Elder allo studio della dispersione indotta dai gradienti trasversali tipici dei corsi d'acqua naturali si ottiene (Fischer, 1967). Come si è visto nel paragrafo 5.2, il coefficiente di mescolamento longitudinale in una corrente piana, k_x , è legato al bilancio tra diffusione turbolenta verticale e avvezione differenziale connessa alla non-uniforme distribuzione della velocità (mediata sulla turbolenza) lungo la verticale. In analogia con la trattazione di Elder per la stima di k_x , Fischer (1967) osserva che, in un alveo naturale, la dispersione longitudinale è determinata da un bilancio tra **mescolamento trasversale** e **avvezione differenziale** connessa alla non-uniforme distribuzione trasversale della velocità mediata sulla verticale. Tale analogia comporta che:

$$K(x) = -\frac{1}{A} \int_0^B (\tilde{U}_x D) dy \int_0^y \frac{dy'}{k_y D} \int_0^{y''} (\tilde{U}_x D) dy''$$

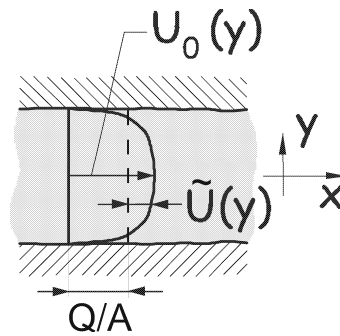


Figura 5.10: Variazioni trasversali della velocità U_x mediata sulla verticale.

dove, nell'ipotesi di un campo di moto stazionario, posto $U = Q/A$,

$$\tilde{U}_x(x, y) = U_x(x, y) - U; \quad U_x(x, y) = \frac{1}{D(x, y)} \int_0^{D(x, y)} \langle u_x \rangle(x, y, z) dz$$

È tuttavia importante osservare che tale procedura è a rigore applicabile solo **sufficientemente a valle** della sezione di immissione ($x > a L_x$), dove si stabilisce all'incirca un bilancio tra mescolamento trasversale e avvezione non-uniforme e, quindi, il comportamento della nuvola di inquinante può essere descritto da una distribuzione di concentrazione Gaussiana (cfr. Figura 5.9). Tale comportamento tende ad avvenire tanto più a valle della sezione di immissione quanto più irregolare è la geometria del corso d'acqua (Fischer, 1967).

iii) Metodo dei momenti

Il metodo dei momenti sfrutta la proprietà della soluzione fondamentale per cui:

$$\frac{d\sigma_x^2}{dt} = 2K$$

Tale relazione, discretizzata, porge:

$$K = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2(t_2) - \sigma_x^2(t_1)}{t_2 - t_1}$$

con

$$\sigma_x^2(t_i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_x(t_i)]^2 \mathcal{C}(x, t_i) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(x, t_i) dx}, \quad \mu_x(t_i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{C}(x, t_i) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(x, t_i) dx}$$

Un simile modo di procedere, però, si scontra operativamente con la **difficoltà di misurare l'andamento spaziale** della concentrazione ad un fissato istante, necessario per determinare $\sigma_x^2(t_i)$. Fischer (1966) ha tuttavia dimostrato che l'espressione per K può essere riscritta come:

$$K = \frac{1}{2} U_0 \frac{\sigma_t^2(x_2) - \sigma_t^2(x_1)}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1},$$

con

$$U_0 = \frac{x_2 - x_1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1} \quad \bar{t}_i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{C}(x_i, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(x_i, t) dt} \quad \sigma_t^2(x_i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t}_i)^2 \mathcal{C}(x_i, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(x_i, t) dt},$$

essendo $\bar{t}_i$ il **tempo di passaggio del centroide** della nuvola.

È in questo modo possibile determinare K nota la distribuzione temporale della concentrazione in due diverse sezioni. Anche tale modo di procedere presenta tuttavia delle **difficoltà pratiche** legate al calcolo accurato della varianza e alla misura della concentrazione.

Il calcolo della varianza σ_t^2 , infatti, presenta dei problemi nel caso di **distribuzioni temporali** di concentrazione **con lunghe code**, per le quali il campionamento della concentrazione dovrebbe proseguire per un lungo tempo dopo il passaggio del corpo della nuvola.

D'altra parte, **piccoli errori** nella **misurazione della basse concentrazioni** che caratterizzano la **testa** e la **coda** della nuvola di inquinante possono influenzare notevolmente il calcolo della varianza e, quindi di K

iv) Metodo della calibrazione

Prima di vedere in dettaglio le modalità del cosiddetto metodo della calibrazione è utile analizzare le proprietà spaziali e temporali della soluzione di Taylor:

$$\mathcal{C}(x, t) = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K t}} \exp \left[-\frac{(x - U t)^2}{4 K t} \right]$$

Per un **fissato tempo** t_n **il picco e il baricentro** della nuvola sono caratterizzati dalla stessa coordinata, $x_{max} = x_G$, ovvero

$$x_{max} = x_G = U t_n, \quad \mathcal{C}_{max} = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K t_n}} = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K x_{max}/U}}$$

In una **fissata sezione** x_n , d'altra parte, la **variazione temporale** della concentrazione **non è simmetrica**, il **picco** di concentrazione realizzandosi per

$$t_{max} = \sqrt{\frac{K^2}{U^4} + \frac{x_n^2}{U^2}} - \frac{K}{U}$$

Il **centroide** del profilo temporale di concentrazione si realizza dunque per

$$\bar{t} = \frac{\int_0^\infty \tau \mathcal{C}(x, \tau) d\tau}{\int_0^\infty \mathcal{C}(x, \tau) d\tau} = \frac{x_n}{U} + \frac{2K}{U^2}$$

Se l'**avvezione prevale sulla dispersione**, ovvero:

$$\frac{x}{U} \gg \frac{K}{U^2}$$

appare evidente che $t_{max} \simeq \bar{t} \simeq x_n/U$.

L'**approssimazione della nuvola congelata** sfrutta proprio quest'ultima relazione. Assumendo in prima approssimazione che $K \simeq 0$ essa consente di mettere in relazione l'**andamento temporale** della concentrazione in una fissata sezione con l'**andamento spaziale** a un fissato istante (e viceversa). Indicata con x_1 la sezione in cui è misurato l'andamento temporale della concentrazione, sia $\bar{t}_1$ il tempo in cui passa il centroide della nuvola. In base all'approssimazione della nuvola congelata si avrà che:

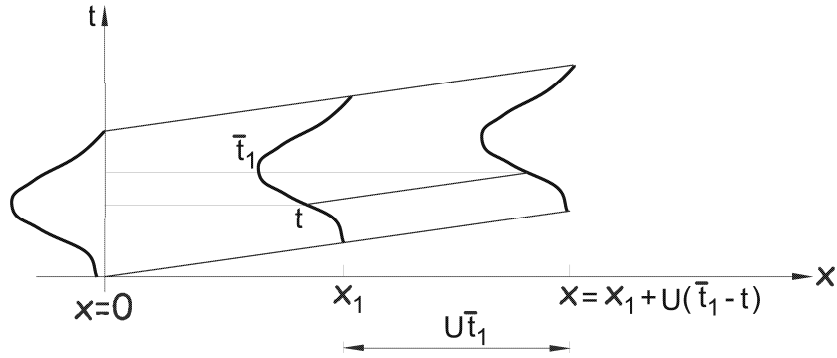


Figura 5.11: Significato fisico dell'approssimazione della nuvola congelata.

$$x = x_1 + U(\bar{t}_1 - t), \quad (\bar{t}_1 - t) = \frac{x - x_1}{U}$$

Pertanto, la concentrazione misurata in x_1 ad un generico tempo t sarà uguale alla concentrazione misurata al tempo $\bar{t}_1$ nella sezione $x_1 + U(\bar{t}_1 - t)$, ovvero:

$$\mathcal{C}(x_1, t) = \mathcal{C}[x_1 + U(\bar{t}_1 - t), \bar{t}_1],$$

Viceversa, la concentrazione misurata al tempo $\bar{t}_1$ nella generica sezione x sarà uguale alla concentrazione misurata nella sezione x_1 al tempo $(x_1 - x)/U$:

$$\mathcal{C}(x, \bar{t}_1) = \mathcal{C}\left(x_1, \frac{x_1 - x}{U}\right)$$

Supponiamo ora di aver misurato l'andamento temporale della concentrazione nelle sezioni x_1 e x_2 . Utilizzando come **condizione al contorno** la concentrazione in x_1 , vogliamo determinare i valori di K e U per cui la distribuzione temporale di concentrazione in x_2 , calcolata tramite la soluzione di Taylor, meglio approssima quella misurata. Utilizzando l'approssimazione della nuvola congelata si ha:

$$\mathcal{C}(x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(x_1, \tau) U}{\sqrt{4\pi K(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}} \exp\left[-\frac{U^2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1 - t + \tau)^2}{4K(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}\right] d\tau$$

$$\bar{t}_2 = \bar{t}_1 + \frac{x_2 - x_1}{U}$$

I valori di K e U vengono variati in modo tale che la concentrazione $\mathcal{C}(x_2, t)$ calcolata sia il più possibile rappresentativa di quella misurata. Per avere una **stima iniziale** della **velocità**, si osservi che il valore **medio nel tratto** considerato è:

$$\bar{U} = \frac{x_2 - x_1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}$$

È inoltre utile ricordare che la velocità media nella sezione è circa pari a $2/3$ della velocità superficiale, che può essere facilmente misurata tramite l'uso di galleggianti.

Un metodo alternativo è quello di utilizzare la cosiddetta **soluzione di Hayami**, che si ottiene moltiplicando la soluzione di Taylor per $x/U t$. Applicando la **sovrapposizione degli effetti**, è ancora possibile determinare l'andamento nel tempo della concentrazione nella sezione di valle x_2 , noto l'andamento temporale di C nella sezione di monte x_1 . Si tratta di sommare (**convoluzione**) le soluzioni fondamentali che derivano dall'immissione istantanea, al tempo generico τ e nella sezione x_1 , di una massa di inquinante pari a $S(x_1, t) A$. Si ottiene:

$$C(x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x_1, \tau) (x_2 - x_1)}{(t - \tau) \sqrt{4 \pi K (t - \tau)}} \exp \left[-\frac{(x_2 - x_1 - U (t - \tau))^2}{4 K (t - \tau)} \right] d\tau$$

È infine importante osservare che nonostante il metodo della calibrazione sia considerato come quello più affidabile per la stima di K e U , tuttavia esso richiede che: i) il **tracciante** sia **conservativo** (ovvero che non subisca reazioni significative di tipo chimico e biologico) e che ii) i profili di concentrazione nelle due sezioni siano monitorati anche durante **tutta la fase di decrescita** della concentrazione.

v) Metodo di Chatwin

Il metodo di Chatwin (1980) è basato su una riscrittura della soluzione di Taylor nella forma:

$$\exp \frac{(x - Ut)^2}{4 K t} = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K}} \frac{1}{C \sqrt{t}} = \frac{R}{C \sqrt{t}}$$

che, passando agli esponenziali,

$$\frac{x}{2 \sqrt{K}} - \frac{U t}{2 \sqrt{K}} = \sqrt{t \ln \frac{R}{C \sqrt{t}}} = C^*$$

porge la relazione:

$$C^* = -\frac{U}{2 \sqrt{K}} t + \frac{x}{2 \sqrt{K}},$$

rappresentante una retta nel piano C^*, t .

La costante R non è nota a priori, ma può essere tuttavia stimata in base alla relazione che fornisce la concentrazione massima C_{max} che si realizza al tempo t_{max}

$$C_{max} = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K}} \frac{1}{\sqrt{t_{max}}} = \frac{R}{\sqrt{t_{max}}} \Rightarrow R \simeq C_{max} \sqrt{t_{max}} \quad (4.20)$$

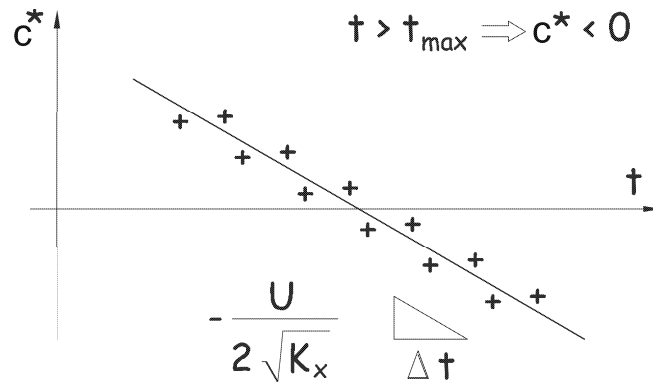


Figura 5.12: Rappresentazione grafica del metodo di Chatwin (1980).

Risulta pertanto immediato, nota la pendenza $(1/2\sqrt{K})$ e l'intercetta $(U/2\sqrt{K})$ della retta interpolatrice stimare K e U .

La stessa espressione (4.20), riscritta nella forma:

$$C_{max} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K}} \frac{1}{\sqrt{t_{max}}} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K}} \frac{1}{\sqrt{x_{max}/U}}$$

e rappresentata nel piano $(C_{max}, x_{max}^{-1/2})$, può essere utilizzata per stimare K noto il relativo coefficiente angolare e la velocità media della corrente.

È evidente come il **metodo di Chatwin** risulti molto utile per **esaminare visivamente** i dati ed effettuare una **stima preliminare** dei parametri. Tali stime possono essere poi utilizzate come **valori di primo tentativo** nel metodo della calibrazione.

vi) Metodi grafici

I metodi grafici illustrati in quanto segue derivano da opportune rielaborazioni della soluzione di Taylor. Posto:

$$R = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K}} \quad S = (x - UT)$$

otteniamo

$$C = \frac{R}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{S^2}{4K_x t}\right)$$

e, passando ai logaritmi:

$$\ln C = \ln R + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \frac{S^2}{4K_x t} \frac{1}{t}.$$

È a questo punto possibile ragionare in termini di t **fissato**, al variare di x , oppure di x **fissato**, al variare di t :

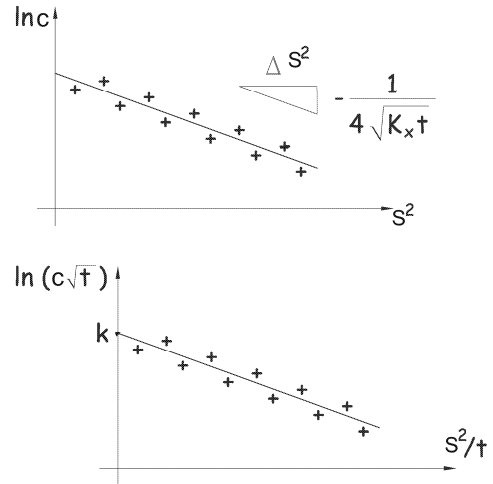
- t **fissato**, x variabile:
- t **variabile**, x fissato:

$$\ln C = -\frac{1}{4Kt} S^2 + k,$$

$$k = \left[\ln R + \ln \frac{1}{\sqrt{t}} \right] = \text{cost}$$

$$\ln(C \sqrt{t}) = -\frac{1}{4K} \frac{S^2}{t} + k$$

$$k = \ln R = \text{cost}$$



5.4.3 Traccianti e loro modalità di immissione

La scelta del **tracciante** da utilizzare per la determinazione di K tramite misure di campo è di fondamentale importanza. La sostanza utilizzata deve infatti essere **caratterizzato da**:

- trascurabili trasformazioni biochimiche;
- trascurabile adsorbimento da parte dei sedimenti e della vegetazione;
- scarsa tossicità;
- alta solubilità;
- peso specifico prossimo a quello dell'acqua;
- facile analisi chimica;
- forte potere colorante;
- costo possibilmente contenuto.

Tra le **sostanze** che possiedono gran parte di tali proprietà e che, quindi, sono generalmente utilizzate nelle campagne di misura si segnalano il **dicromato di sodio** e la **rodamina WT**.

Le modalità di immissione, d'altra parte, dipendono dalla grandezze che si vuole misurare. Al fine di determinare la **velocità media** in un tratto di corso d'acqua è opportuno utilizzare una immissione pressochè istantanea di una massa M oppure una immissione a gradino. I coefficienti di **mescolamento verticale e trasversale** sono stimati operando una immissione continua. Infine, la stima del **coefficiente di dispersione longitudinale** è ottenuta tramite una immissione pressochè istantanea di una assegnata massa di tracciante.

5.4.4 Esempi

Esempio1: Waikato River near Hamilton

Il Waikato River è un fiume neozelandese che, nei pressi di Hamilton, è caratterizzato dai seguenti valori dei parametri idraulici:

$$Q = 150 \, m^3/s, \quad D = 2.5 \, m, \quad B = 85 \, m, \quad i_f = 0.00013,$$

$$U = 0.70 \, m/s, \quad u_* = 0.057 \, m/s$$

e da un andamento planimetrico debolmente meandriforme. Al fine di valutare le conseguenze di un rilascio accidentale di inquinante sulla funzionalità di un impianto acquedottistico sono state fatte delle prove di dispersione in situ utilizzando come tracciante **Lissamina rossa 4B**, avente una concentrazione limite per l'analisi pari a 0.1 mg/m^3 .

Al fine di selezionare le sezioni dove effettuare il campionamento è stata innanzitutto stimata la distanza dal punto di rilascio, L_x , a valle della quale l'evoluzione della nuvola di inquinante può essere trattata con un modello 1D. Ipotizzando che il tracciante venga rilasciato in corrispondenza dell'asse del corso d'acqua, L_x può essere stimata in base alla relazione:

$$L_x = \alpha U \frac{(B/2)^2}{k_z}$$

Poichè l'andamento planimetrico è leggermente meandriforme, in base a quanto discusso nel paragrafo 4.4.3 possiamo assumere

$$0.3 < \frac{k_y}{D u_*} < 0.9$$

ovvero $k_y = 0.043 - 1.128 \text{ m}^2/\text{s}$; posto $\alpha = 0.3$ otteniamo dunque $L_x = 3.0 - 8.8 \text{ km}$.

Le 6 sezioni di campionamento (A,B,C,D,E,F) selezionate per la prova sono state pertanto poste rispettivamente a 3.7, 6.0, 8.4 10.9 17.6 e 22.8 km a valle della sezione di immissione, in modo che almeno le ultime e fossero poste al di fuori della zona avvertiva. La scelta di tali sezioni è stata anche condizionata dalla necessità di contenere le misure nell'arco di una giornata, durante le ore diurne. Infine, la quantità complessiva di Lissamina rossa 4B da iniettare (38 kg diluiti in acqua in proporzione di 100 kg/m^3) è stata scelta in modo tale che il picco di concentrazione nelle varie stazioni di misura fosse sempre almeno un ordine di grandezza maggiore della concentrazione limite per l'analisi. A tale scopo sono stati effettuati dei calcoli preliminari effettuati utilizzando la soluzione di Taylor e variando K e U negli intervalli $20 - 150 \text{ m}^2/\text{s}$ e $0.6 - 0.8 \text{ m/s}$ che hanno evidenziato come per i valori più elevati di K , la concentrazione massima nella sezione D ($x = 10.9 \text{ km}$) sia stimabile in 25 mg/m^3 , ben al di sopra del limite per l'analisi.

I risultati della campagna di misure, riportati nella figura 5.13, indicano per la sezione D una concentrazione massima pari a circa 50 mg/m^3 , circa il doppio di quella prevista dai calcoli preliminari. Nelle sezioni A e B la distribuzione temporale della concentrazione presenta **una forte asimmetria**, ben maggiore di quella che naturalmente caratterizza l'andamento della soluzione gaussiana per x fissato. L'asimmetria diminuisce progressivamente spostandosi nelle sezioni D, E e F poste più a valle.

È tuttavia importante osservare che anche nel campo lontano, dove la concentrazione media sulla sezione dovrebbe comportarsi gaussianamente, continuano a persistere dei gradienti in direzione trasversale, come illustrato nella Figura xxx (**inserire Fig. 4.3, p. 181 Rutherford**). Infatti, anche se c'è una forte tendenza dell'inquinante a mescolarsi sull'intera sezione per effetto della diffusione e del mescolamento trasversali, il fatto che la velocità tenda necessariamente a zero in corrispondenza delle sponde comporta che la corrente trasporti verso valle l'inquinante più lentamente vicino alle sponde rispetto a quanto avviene in corrispondenza della

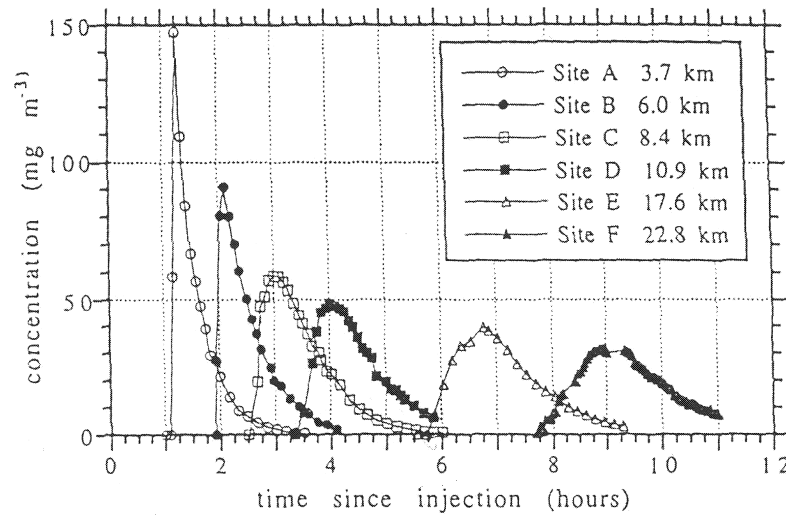


Figura 5.13: Evoluzione temporale della concentrazione media sulla sezione rilevata in varie sezioni del Waikato River (Nz), conseguentemente all'immissione di una assegnata massa di Lissamina rossa 4B.

porzione centrale del canale. I gradienti trasversali di concentrazione che conseguentemente permangono anche nel campo lontano (dell'ordine del 5-10 %) in molti casi di interesse pratico ed ecologico possono essere trascurati e, quindi, è possibile studiare il comportamento della concentrazione media.

Per valutare quando la soluzione tende effettivamente a diventare gaussiana, conviene applicare il metodo di Chatwin e graficare la concentrazione massima in una assegnata sezione, C_{max} , in funzione di $x_{max}^{-1/2} = (t_{max} U)^{-1/2}$: nel caso di un andamento gaussiano si deve infatti ottenere una retta del tipo:

$$C_{max} = \frac{M}{A \sqrt{4 \pi K_x}} \frac{1}{\sqrt{t_{max}}} = \frac{M \sqrt{U}}{A \sqrt{4 \pi K_x}} \frac{1}{\sqrt{x_{max}}}$$

I risultati illustrati in figura 5.14 confermano che **le sezioni A e B si trovano effettivamente all'interno della zona avvertiva** e, quindi non possono essere considerate nella stima di K . La regressione lineare ai minimi quadrati delle rimanenti sezioni C,D,E e F fornisce un coefficiente angolare della retta pari a $6260 \text{ mg m}^{-5/2}$. Ricordando che la massa di tracciante immessa è $M = 38 \text{ kg}$ e che $A = Q/U = 215 \text{ m}^2$ si ottiene quindi:

$$\frac{M \sqrt{U}}{A \sqrt{4 \pi K}} = \frac{38 \cdot 10^6 \sqrt{0.7}}{215 \sqrt{4 \pi K}} = 6260 \quad \Rightarrow \quad K = 45 \text{ m}^2/\text{s}$$

Il vantaggio di tale metodo è che esso richiede solo la conoscenza della concentrazione di picco. Tale valore di K è leggermente inferiore a quello risultante dal **metodo della calibrazione**, per cui $K = 52 - 67 \text{ m}^2/\text{s}$. In ogni caso, tali stime risultano sensibilmente inferiori a quelle ottenute utilizzando le varie formule empiriche, secondo cui:

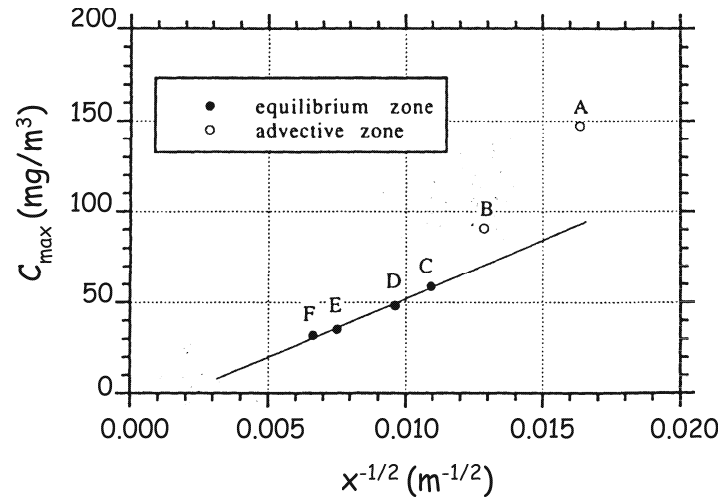


Figura 5.14: I valori della concentrazione media massima in determinate sezioni sono riportati in funzione della quantità $x_{max}^{-1/2} = (t_{max} U)^{-1/2}$, come suggerito da Chatwin

$$K = 0.058 \frac{Q}{i_f B} = 787 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K = 0.18 \left(\frac{u_*}{U} \right)^{1.5} \frac{Q^2}{u_* R_h^3} = 106 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K = 5.195 u_* D (B/D)^{0.62} (U/u_*)^{1.428} = 237 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K = 10.612 U D (U/u_*) = 228 \text{ m}^2/\text{s}$$

Esempio 2: Manawatu River

Il Manawatu River è un corso d'acqua della Nuova Zelanda in cui al fine di determinare il coefficiente di dispersione K è stata effettuata una campagna di misura immettendo istantaneamente una assegnata massa di Rodamina WT nella sezione $x = 0$. In figura 5.15 sono riportati gli andamenti temporali delle concentrazioni misurate nelle sezioni C e D poste, rispettivamente, $x = 5 \text{ km}$ e $x = 6.4 \text{ km}$ a valle della sezione di immissione.

I profili di concentrazione sono asimmetrici, con una fase di crescita più rapida di quella di decadimento. Essi possono essere utilizzati per determinare U e K tramite il metodo della calibrazione. La figura 5.16 illustra il risultato dell'applicazione del metodo della **nuvola congelata** per la determinazione della concentrazione nella sezione D.

La curva 1 si riferisce al calcolo di primo tentativo (effettuato con $U = 0.41 \text{ m/s}$ e $K = 22.6 \text{ m}^2/\text{s}$), ed evidenzia come la velocità sia leggermente sottostimata. **La curva 2** si riferisce al calcolo di secondo tentativo (effettuato con $U = 0.55 \text{ m/s}$ e $K = 20.0 \text{ m}^2/\text{s}$) che consente di riprodurre in modo soddisfacente la concentrazione misurata. In molti casi, tuttavia, la curva sperimentale presenta una coda più lunga di quella misurata (legata al fatto di non essere sufficientemente a valle della sezione di immissione).

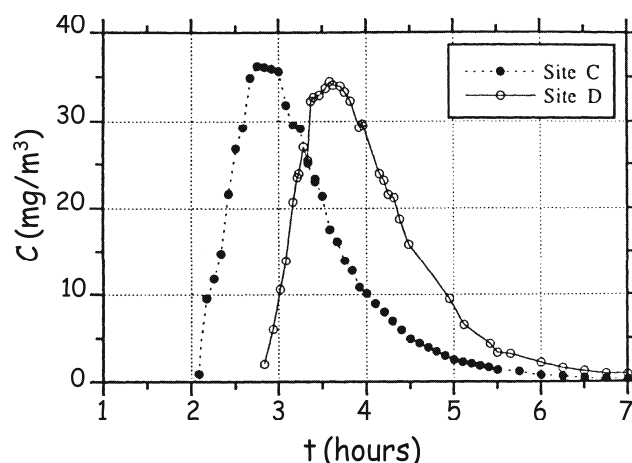


Figura 5.15: Andamento temporale della concentrazione media misurata in due diverse sezioni del Manawatu River (Nz) in seguito all'immissione di una assegnata massa di Rodamina WT.

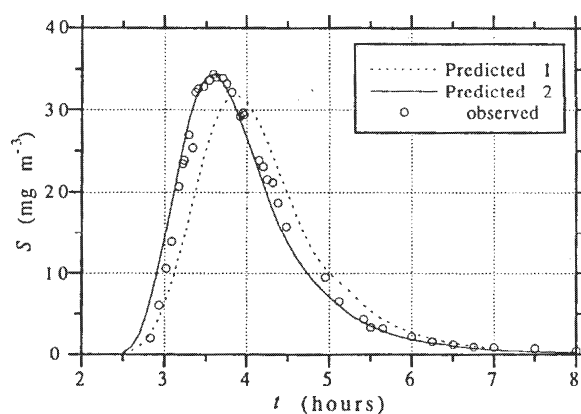


Figura 5.16: b) Confronto tra l'andamento temporale della concentrazione misurata nel Manawatu River (Nz) e quella stimata tramite il metodo della nuvola congelata.

La necessità di spostarsi a valle della zona avvertiva per osservare una distribuzione di concentrazione gaussiana è chiaramente evidenziata nella figura 5.17 che riporta l'andamento della variabile trasformata C^* introdotta da Chatwin, nella sezione B ($x = 2.7 \text{ km}$) oltre che nelle sezioni C ($x = 5 \text{ km}$) e D ($x = 6.4 \text{ km}$) precedentemente viste.

Risulta evidente come C^* tenda ad assumere un andamento rettilineo (indice di una distribuzione gaussiana) solo nelle sezioni C e D (pur mantenendo una certa deviazione dal comportamento rettilineo in corrispondenza della coda della nuvola). Nella sezione B la curvatura dei punti sperimentali è maggiore rispetto a quella che pure esiste nelle sezioni C e D, in corrispondenza della fase di esaurimento. In particolare si osserva che:

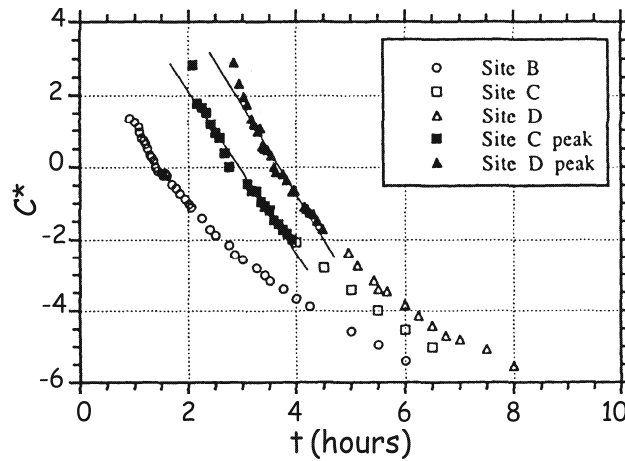


Figura 5.17: Andamento temporale della variabile C^* , definita nel metodo di Chatwin, per diverse sezioni del Manawatu River (Nz), in seguito all'immissione localizzata di una assegnata massa di tracciante.

Sez. C , $x = 5 \text{ km}$

$$t = 0 \Rightarrow \frac{x}{2K} = 6.83 \text{ h}^{1/2} \Rightarrow K = 37 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$-\frac{U}{2K_x} = 2.31 \text{ h}^{-1/2} \Rightarrow U = 0.47 \text{ m s}^{-1}$$

Sez. D , $x = 6.4 \text{ km}$

$$t = 0 \Rightarrow \frac{x}{2K} = 9.50 \text{ h}^{1/2} \Rightarrow K = 32 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$-\frac{U}{2K} = 2.56 \text{ h}^{-1/2} \Rightarrow U = 0.48 \text{ m s}^{-1}$$

Avendo stimato la velocità è possibile verificare se le sezioni si trovano a valle della zona avveviva.

$$L_x = \alpha U \frac{B^2}{k_z} \quad 0.3 < \alpha < 0.6$$

Dalle misure di campo si ha che:

$$B = 50 \text{ m}, \quad D = 1.9 \text{ m}, \quad i_f = 1.4862 \cdot 10^{-4}, \quad u_* = \sqrt{g D i_f} = 0.0526 \text{ m/s}$$

quindi:

$$k_z = 0.15 D u_* = 0.0150, \text{ m}^2/\text{s} \quad L_x = 0.3 U L_z^2/k_z \simeq 5 \text{ km}$$

Pertanto:

- La sezione B ($x = 2.7 \text{ km}$) si trova **all'interno** della zona avveviva

- La sezione C ($x = 5 \text{ km}$) si trova **all'inizio** della zona avvertiva
- La sezione D ($x = 6.4 \text{ km}$) si trova **a valle** della zona avvertiva

Esempio 3: Waikato River near Auckland

Nell'ambito del progetto dell'acquedotto della città di Auckland (NZ), che attinge acqua dal Waikato River, è stato necessario valutare il tempo che un inquinante rilasciato accidentalmente nel corso d'acqua (e.g., a causa dell'incidente occorso a un camion che trasporta materiale tossico) impiega a raggiungere la sezione dove viene attinta l'acqua e il periodo di tempo in cui le concentrazioni risultano superiori alla soglia di tolleranza.

Al fine di valutare il volume di un serbatoio di riserva sono state effettuate delle simulazioni utilizzando la soluzione di Taylor (4.19) e ipotizzando immissioni accidentali di inquinante in corrispondenza dei vari ponti posti a monte della sezione di prelievo dell'acqua.

Osservando che i parametri idraulici caratterizzanti il Waikato River nei pressi di Auckland sono:

$$Q = 250 \text{ m}^3/\text{s}, \quad D = 2.0 \text{ m}, \quad B = 200 \text{ m}, \quad i_f = 0.00007,$$

$$U = 0.625 \text{ m/s}, \quad u_* = 0.037 \text{ m/s}$$

consideriamo il caso di un ponte posto a 30 km dalla sezione di prelievo dell'acqua in corrispondenza del quale vengono accidentalmente rilasciati 500 kg di un inquinante che supponiamo creare problemi all'impianto di potabilizzazione dell'acqua quando la concentrazione supera i 5 mg/m^3 .

Assumendo $K = 75 \text{ m}^2/\text{s}$, in base alla stima ottenuta tramite misure in situ (si noti come tale valore sia circa il doppio di quello stimato nell'Esempio 1, relativo ad un tratto più a monte dello stesso fiume) si vuole determinare i tempi intercorsi dall'incidente per i quali la concentrazione inizia ad essere maggiore del valore critico $C_{cr} = 5 \text{ mg/m}^3$ (**tempo di arrivo**, t_a) e infine ritorna a essere inferiore a tale valore (**tempo di scomparsa**, t_s).

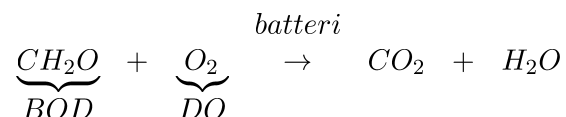
cfr pagina 207 Rutherford.

Capitolo 6

Dinamica degli inquinanti convenzionali nei corsi d'acqua

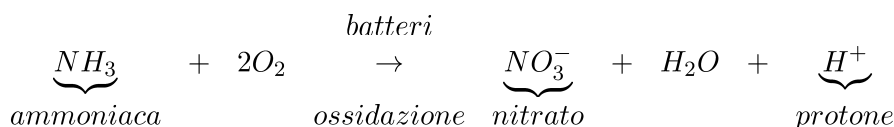
Gli inquinanti convenzionali all'interno di un corpo idrico sono quelli che determinano un consumo di ossigeno in seguito alle reazioni biochimiche ad essi associati. In particolare, possiamo distinguere il consumo d'ossigeno causato dalla decomposizione: i) dei composti organici (**BOD**); ii) dell'azoto ammoniacale (**NBOD**); iii) dei solidi sospesi totali (**TSS**).

- i) Il BOD rappresenta la **misura** della quantità di **materiale organico biodegradabile** presente nell'acqua e, quindi, fornisce **indirettamente** una misura della quantità di **ossigeno consumato** nel processo di degradazione microbica descritto dalla reazione

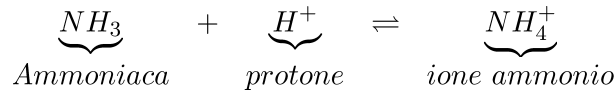


La quantità di **ossigeno disciolto** (DO) nella massa fluida è fondamentale per l'equilibrio **ecologico** di un corpo idrico. Un valore troppo **basso** di **DO** comporta moria di pesci e invertebrati, con conseguente diminuzione della biodiversità, nonché, cattivo odore. In genere, si dovrebbe fare in modo che sia **sempre** $DO > 4 \text{ mg/l}$ e, **mediamente**, $DO \geq 5 \text{ mg/l}$.

- ii) L'**azoto ammoniacale** è **tossico** anche alle basse concentrazioni e, quindi, va assolutamente limitato. I processi di **nitrificazione** comportano un **consumo** di ossigeno in base alla seguente reazione



In genere, nelle acque naturali, l'**ammoniaca** è in **equilibrio** con gli **ioni ammonio**:



Per gli intervalli di PH caratteristici delle acque naturali ($PH = 6 - 9$) tale reazione tende ad spostarsi verso destra e lo ione ammonio prevale (ho un **acido debole**). Gli standard di **qualità delle acque** di norma prevedono che

$$\underbrace{NH_3 - N}_{\text{azoto ammoniacale}} + \underbrace{NH_4^+ - N}_{\text{azoto ammonio}} < 2 \text{ mg/l}$$

- iii) I solidi sospesi totali influenzano la dinamica dell'ossigeno disciolto a causa della decomposizione delle sostanze organiche ad essi adsorbite. In particolare, i **sedimenti** che si depositano sul **fondo** subiscono dei processi di **ossidazione** che riducono l'ossigeno disciolto. Le particelle solide sospese nella colonna fluida, inoltre, **intorbidano** l'acqua e, quindi, diminuiscono la penetrazione della radiazione solare corta, con conseguenti effetti sull'ecosistema fluviale. Infine, i solidi sospesi totali, infine, possono **trasportare** agenti **patogeni** e **metalli pesanti**.

Come **indicatori** degli **agenti patogeni** presenti nell'acqua vengono spesso utilizzati i batteri coliformi, la cui concentrazione può essere modellata come una **reazione di decadimento del I ordine**. Si osservi come la costante di reazione risulta **più veloce** nelle **acque marine** rispetto alle acque dolci.

6.1 Modellazione monodimensionale

Al fine di modellare la **dinamica** del BOD , del $NBOD$, e dei TSS in un corso d'acqua è innanzitutto necessario scegliere un **modello di trasporto**. Nel caso di una **corrente monodimensionale** (i.e., 1D) la concentrazione di una generica sostanza è descritta dall'equazione della **avvezione-dispersione** a cui viene aggiunto un **termine di reazione**. Per una **reazione del primo ordine** si ha:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \mp rC \quad (1.1)$$

essendo r ($[T^{-1}]$) la costante di reazione a avendo indicato con il segno $\pm$, rispettivamente, una reazione di **produzione/decadimento**.

L'**equazione** (1.1) può essere **semplificata** in relazione all'importanza relativa dei termini di avvezione e dispersione. A tale scopo definiamo i seguenti parametri adimensionali:

$$P_e = \frac{U_0 L}{K_x} = \frac{L^2 / K_x}{L / U_0} = \frac{T_d}{T_a}$$

$$N_r = \frac{r K_x}{U_0^2} = r \frac{(L/U_0)^2}{L^2/K_x} = \frac{(T_a)^2}{T_r T_d}$$

Il primo parametro, P_e , detto **numero di Peclet**, rappresenta il rapporto tra i tempi scala caratteristici della dispersione, T_d , e dell'avvezione, T_a . Nel caso in cui $P_e \gg 1$ l'avvezione risulta dominante, mentre quando $P_e \ll 1$ domina la dispersione.

Il secondo parametro, N_r , detto **numero di reazione**, rappresenta il rapporto tra T_a^2 , e il prodotto di T_d per il tempo scala T_r caratteristico della reazione. Nel caso in cui $N_r < 0.1$ l'avvezione risulta dominante, mentre è la dispersione a dominare se $N_r > 10$. In quest'ultimo caso il sistema tende ad essere completamente mescolato.

6.1.1 Pura convezione e reazione del I ordine

Indicate con $\mathcal{C}$ e U la concentrazione e la velocità mediate sulla sezione e con K il coefficiente di dispersione, consideriamo il rilascio di una **concentrazione costante nota** $\mathcal{C}_0$ nella sezione iniziale $x = 0$. Si ottiene così il **problema al contorno**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \pm r \mathcal{C} &= 0 \\ \mathcal{C}(0, t) &= \mathcal{C}_0 \end{aligned}$$

che, nell'ipotesi di moto uniforme, introducendo il **sistema di riferimento mobile** $\xi = x - Ut$, diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \pm r \mathcal{C} &= 0 \\ \mathcal{C}\left(-\frac{\xi}{U}\right) &= \mathcal{C} \end{aligned}$$

Separando le variabili, determinando la costante di integrazione attraverso la condizione al contorno e passando agli esponenziali si ottiene:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \exp \left[\mp r \left(t + \frac{\xi}{U} \right) \right]$$

ovvero,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \exp \left[\mp r \frac{x}{U} \right]$$

dove i segni $\pm$ indicano una reazione di **produzione/decadimento**. Il **parametro adimensionale** rx/U è detto **costante temporale**. Come riportato nella tabella 6.1.1, nel caso di decadimento, dopo **tre costanti temporali** la concentrazione dell'inquinante risulta pari al 5% di quella iniziale.

Esempio. Il valore della **costante di decadimento** r può essere determinato utilizzando le concentrazioni di BOD rilevate nelle varie sezioni di un'asta fluviale riportate nella tabella 6.2 ed elaborandole come illustrato nella tabella 6.3. Il corso

Tabella 6.1: Andamento del rapporto C/C_0 al variare della costante temporale $r x/U$

$r x/U$	0	1	2	3
C/C_0	1.0	0.368	0.135	0.05

Tabella 6.2: Valori di BOC rilevati in un corso d'acqua

x (km)	0	5	10	20	30	50	100	200
BOD (mg/l)	10	9.4	9.1	8.4	7.6	6.4	4.2	1.9

d'acqua considerato nell'esempio è caratterizzato da un **moto uniforme** con velocità $U = 0.4 \text{ m/s}$.

È evidente che il **modello** utilizzato è **corretto** se nel piano $\ln(C/C_0)$ x/U_0 i punti si addensano su una **retta** del tipo $\ln(C/C_0) = -r x/U_0$, come illustrato in Figura 6.1. Nel caso considerato, la pendenza $-r$ di tale **retta**, determinata facendo una **regressione lineare ai minimi quadrati**, è pari a $r = 0.3 \text{ gg}^{-1}$.

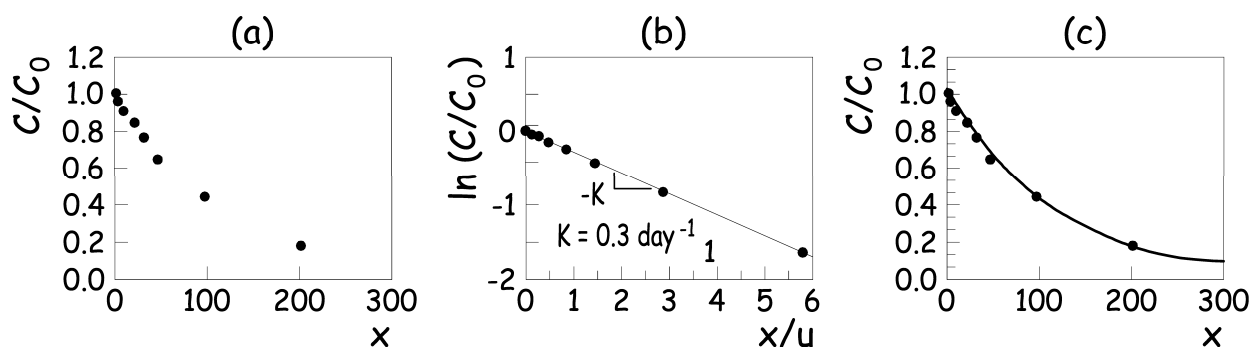


Figura 6.1: Esempio di determinazione della costante di reazione sulla base di dati di campo della concentrazione di BOD rilevata in varie sezioni di un corso d'acqua nell'ipotesi di moto uniforme.

Come specificato sopra, la soluzione ora trovata è valida per condizioni di **moto uniforme** (i.e., U costante nel tempo e nello spazio). Nel caso di **moto vario**, potendo la velocità può variare sia nel tempo sia nello spazio, i.e., $U = Q/A = U(x, t)$, è necessario introdurre un sistema di riferimento mobile definito come (cfr. Smith, 19xx):

$$\xi = \frac{1}{A_0} \int_0^x A dx' = U_0 \int_0^x \frac{1}{U} dx'$$

essendo U_0 e A_0 i valori della velocità e dell'area nella sezione $x = 0$. Ne consegue che, in generale, la costante di reazione risulta una **funzione dello spazio e del tempo**, i.e., $r = r(x, t)$.

6.2 Dinamica del BOD in un corso d'acqua

Streeter e Phelps (19xx) furono i primi a proporre un modello per descrivere come, a seguito di una immissione di sostanza organica in un corso d'acqua, la concentrazione di ossigeno disciolto diminuisca per effetto della domanda biochimica di

Tabella 6.3: Esempio di elaborazione di dati di concentrazione rilevati lungo un'asta fluviale al fine di determinare la costante di una reazione del primo ordine

x (km)	C/C_0	$\ln(C/C_0)$	x/U_0 (gg)
0	1.00	0	0
5	0.94	-0.062	0.145
10	0.91	-0.094	0.286
20	0.84	-0.174	0.579
30	0.76	-0.274	0.868
50	0.64	-0.446	1.447
100	0.42	-0.868	2.894
200	0.19	-1.661	5.787

ossigeno. Essi ipotizzarono innanzitutto che l'evoluzione nel tempo della concentrazione di BOD sia approssimabile mediante una **reazione del I ordine**, anche se esistono studi che suggeriscono che il processo dipenda sia dalla concentrazione di BOD stesso, sia da quella di ossigeno disciolto. Le equazioni di bilancio di massa conseguenti a tale ipotesi, nel caso di una corrente monodimensionale in moto uniforme con velocità U_0 porgono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} + U_0 \frac{\partial B}{\partial x} &= -r_d B \\ \frac{\partial O}{\partial t} + U_0 \frac{\partial O}{\partial x} &= -r_d B + r_a \tilde{O} \\ \frac{\partial \tilde{O}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \tilde{O}}{\partial x} &= r_d B - r_a \tilde{O}\end{aligned}$$

dove B , O , $\tilde{O}$ ($= O_s - O$) sono, rispettivamente, le concentrazioni di BOD, di ossigeno disciolto, e del deficit di ossigeno disciolto, aventi dimensioni $[M^3/L^3]$, O_s è la concentrazione di saturazione dell'ossigeno disciolto, mentre r_d e r_a sono, rispettivamente, le costanti di de-ossigenazione e di ri-aerazione, aventi dimensioni $[T^{-1}]$. Nel caso di **condizioni stazionarie** (i.e., $\partial \dots / \partial t = 0$) tali equazioni diventano

$$\begin{aligned}U_0 \frac{dB}{dx} &= -r_d B \\ U_0 \frac{dO}{dx} &= -r_d B + r_a \tilde{O} \\ U_0 \frac{d\tilde{O}}{dx} &= r_d B - r_a \tilde{O}\end{aligned}$$

Si noti come i) i processi di **deossigenazione** (dovuti alla decomposizione biochimica dei composti organici) e di **ri-aerazione** (associati allo scambio di ossigeno all'interfaccia) siano modellati come **reazioni del I ordine** e ii) risulti **equivalente** risolvere il problema in termini di O oppure di $\tilde{O}$.

È immediato osservare che la **soluzione** dell'equazione **per** B risulta:

$$B = B_0 \exp\left(-r_d \frac{x}{U_0}\right) \quad (2.2)$$

Sostituendo nella equazione per $\tilde{O}$ e dividendo per U_0 si ottiene:

$$\frac{d\tilde{O}}{dx} + \frac{r_a}{U_0} \tilde{O} = \frac{r_d B_0}{U_0} \exp \left[-r_d \frac{x}{U_0} \right] \quad (2.3)$$

Posto:

$$p = \frac{r_a}{U_0}, \quad q = \frac{r_d B_0}{U_0} \exp \left[-r_d \frac{x}{U_0} \right]$$

l'equazione (2.3) può essere riscritta nella forma canonica:

$$\frac{d\tilde{O}}{dx} + p \tilde{O} = q$$

la cui soluzione porge

$$\tilde{O} = \tilde{O}_0 e^{-\mathcal{P}} + e^{-\mathcal{P}} \int_0^x e^{\mathcal{P}} q d\xi \quad \mathcal{P} = \int_0^x p d\xi = r_a \frac{x}{U_0}$$

essendo $\tilde{O}_0$ il deficit di ossigeno in $x = 0$. Pertanto

$$\tilde{O} = \tilde{O}_0 \exp \left(-r_a \frac{x}{U_0} \right) + \frac{B_0 r_d}{r_a - r_d} \left[\exp \left(-r_d \frac{x}{U_0} \right) - \exp \left(-r_a \frac{x}{U_0} \right) \right] \quad (2.4)$$

ovvero, in termini di ossigeno disciolto,

$$O = O_s - (O_s - O_0) \exp \left(-r_a \frac{x}{U_0} \right) - \frac{B_0 r_d}{r_a - r_d} \left[\exp \left(-r_d \frac{x}{U_0} \right) - \exp \left(-r_a \frac{x}{U_0} \right) \right] \quad (2.5)$$

È immediato osservare come l'ossigeno disciolto (il deficit di ossigeno) presenti il tipico andamento con un minimo (massimo) in corrispondenza della **distanza critica** x_c dalla sezione di immissione. Il massimo di $\tilde{O}$, detto **deficit critico**, si ottiene imponendo che $d\tilde{O}/dx = 0$ nella (2.3). Esso risulta:

$$\tilde{O}_c = \frac{r_d}{r_a} B_0 \exp \left(-r_d \frac{x_c}{U_0} \right) \quad (2.6)$$

La **distanza critica** x_c , dipendente in generale da B_0 e $\tilde{O}_0$, è determinata sostituendo l'espressione (2.6) nella (2.4). Dividendo per B_0 , raccogliendo i termini con lo stesso esponente e passando ai logaritmi si ottiene:

$$x_c = \frac{U_0}{r_a - r_d} \ln \left[\frac{r_a}{r_d} \left(1 - \frac{r_a - r_d}{r_d} \frac{\tilde{O}_0}{B_0} \right) \right] \quad (2.7)$$

Ne consegue che x_c **non dipende** da B_0 nel caso in cui $\tilde{O}_0 = 0$

$$x_c = \frac{U_0}{r_a - r_d} \ln \frac{r_a}{r_d} \quad (2.8)$$

ovvero quando la corrente a monte della sezione di immissione del BOD sia caratterizzata da acqua pulita. Come illustrato in Figura 6.2, è importante osservare

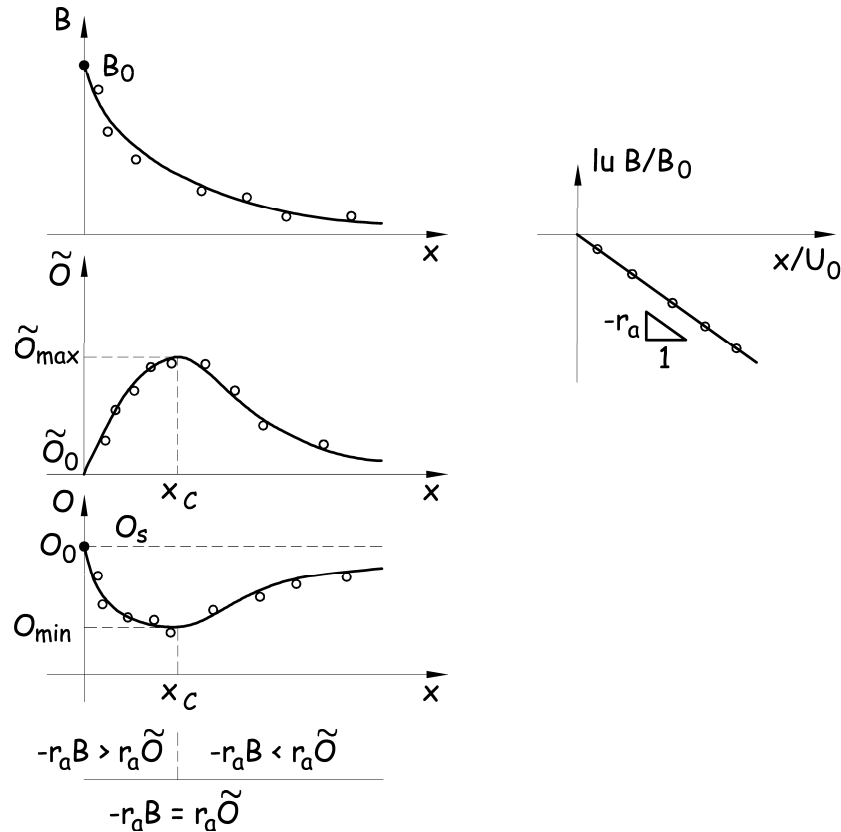


Figura 6.2: Andamento spaziale delle concentrazioni di BOD, del deficit di ossigeno, dell'ossigeno disciolto in seguito a una immissione costante di BOD nella sezione $x = 0$. I simboli indicano le concentrazioni misurate sperimentalmente mentre le linee continue si riferiscono alle soluzioni fornite dalle equazioni (2.2), (2.4) e (2.5). È importante osservare come il rapporto B/B_0 , riportato in un grafico logaritmico, sia ben approssimato da una retta con pendenza pari a $-r_a$.

che: i) la de-ossigenazione prevale sulla ri-aerazione ($r_a \tilde{O} < r_d B$) quando $x < x_c$; ii) la de-ossigenazione eguaglia la ri-aerazione ($r_a \tilde{O} = r_d B$) quando $x = x_c$; iii) la de-ossigenazione è inferiore alla ri-aerazione ($r_a \tilde{O} > r_d B$) quando $x > x_c$; iv) x_c è direttamente proporzionale al **rapporto di autopurificazione** r_a/r_d ; v) $\tilde{O}_c$ è inversamente proporzionale al rapporto di autopurificazione r_a/r_d e direttamente proporzionale a B_0 (cfr. Figura 6.3).

Anche la **temperatura**, Θ , influenza la dinamica di B e $\tilde{O}$. Infatti, all'aumentare di Θ , sia r_a sia r_d tendono ad aumentare ($r_a = r_{a,20} 1.024^{\Theta-20}$, $r_d = r_{d,20} 1.048^{\Theta-20}$), mentre O_s diminuisce. Tuttavia, poichè r_d tende a crescere più rapidamente di r_a , il rapporto r_a/r_d tenderà a diminuire all'aumentare della temperatura e quindi, in base alle (2.6), (2.7), $\tilde{O}_c$ aumenterà con la temperatura mentre x_c diminuirà (cfr. Figura 6.4)

L'**aumento della portata** del corso d'acqua influenza sia B_0 sia r_a . In particolare, un aumento della portata favorisce la diluizione dell'inquinante immesso e, quindi, comporta una diminuzione di B_0 a parità di massa rilasciata. D'altra parte

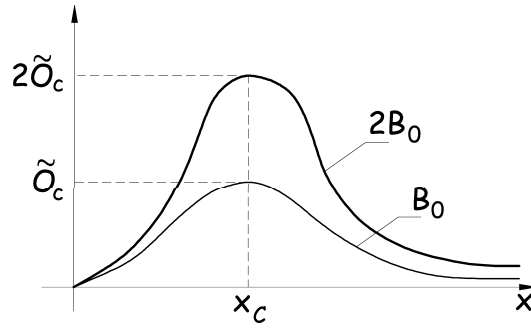


Figura 6.3: Effetto di un aumento della concentrazione iniziale di BOD sul deficit critico.

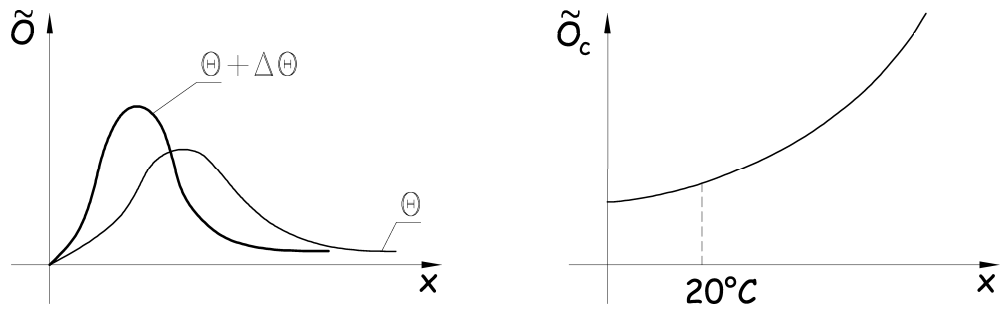


Figura 6.4: Effetto di un aumento della temperatura sul deficit critico di ossigeno e sulla distanza critica.

è ragionevole pensare che ad un aumento della velocità della corrente U_0 corrisponda un aumento dell'intensità dei flussi turbolenti in corrispondenza della superficie libera e, quindi di r_a . Viceversa, un aumento della profondità della corrente, D_0 , tende a sfavorire la ri-areazione e, quindi, favorisce la diminuzione di r_a . Non risulta pertanto intuitivo stabilire quale sia l'effetto di un aumento di portata su r_a . Tuttavia, possiamo assumere che $r_a \propto U_0^m / D_0^n$, con $m < 1$ e $n > 1$ opportuni esponenti, e fare riferimento alle **caratteristiche morfologiche** dei corsi d'acqua naturali (i.e., a fondo mobile). I dati di campo, infatti, suggeriscono che $D_0 \propto Q^{\alpha_D}$, $U \propto Q^{\alpha_U}$, $W_0 \propto Q^{\alpha_W}$, con $\alpha_D + \alpha_U + \alpha_W = 1$, essendo W_0 la larghezza media del corso d'acqua. Ne consegue che

Tabella 6.4: Esponenti morfologici

Fiumi	Estuari
$\alpha_D = 0.4$	0.2
$\alpha_U = 0.1$	0.05
$\alpha_B = 0.5$	0.7

$$r_a \propto \frac{U_0}{D_0} = \frac{Q^{m\alpha_U}}{Q^{n\alpha_D}} = Q^{(m\alpha_U - n\alpha_D)}$$

e, poichè $m\alpha_U - n\alpha_D < 0$, r_a tenderà a diminuire all'aumentare della portata. Tale diminuzione, tuttavia, non compensa quella di B_0 conseguente all'aumentata

diluizione iniziale della massa di inquinante immessa in $x = 0$. Il rapporto B_0/r_a dunque diminuisce al crescere della portata e quindi, in base alle (2.6), (2.7), $\tilde{O}_c$ e x_c tendono, rispettivamente, a diminuire e aumentare, come illustrato in Figura 6.5.

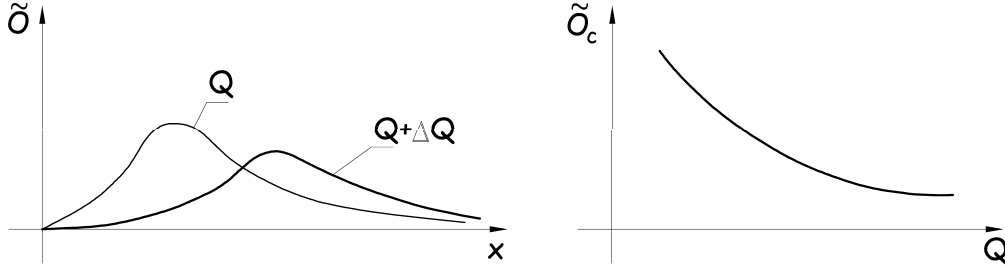


Figura 6.5: Effetto di un aumento di portata sul deficit critico di ossigeno e sulla distanza critica.

Al fine di valutare l'effetto del deficit iniziale di ossigeno Consideriamo la relazione 2.7 che fornisce la distanza critica. È immediato osservare che x_c diminuisce al crescere $\tilde{O}_0$. Ne consegue che il deficit di ossigeno in corrispondenza della distanza critica,

$$\tilde{O}_c = B_0 \frac{r_d}{r_a} \exp\left(-r_d \frac{x_c}{U_0}\right)$$

aumenta, come illustrato nella Figura 6.6.

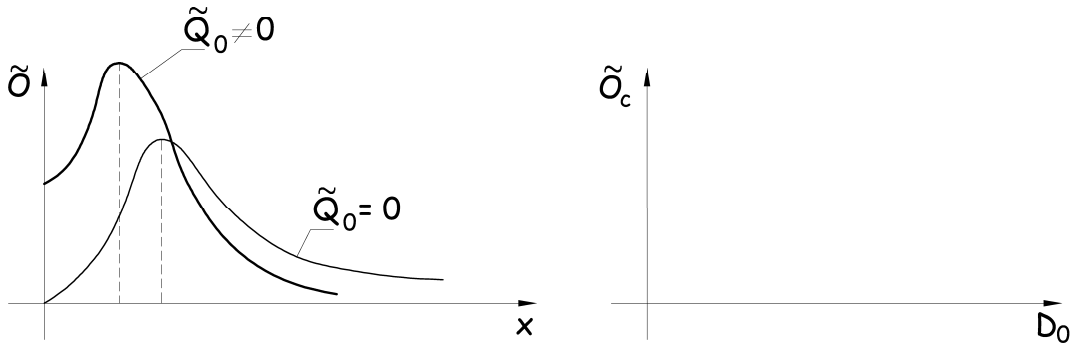


Figura 6.6: Effetto del deficit iniziale di ossigeno.

6.2.1 Stima di B_0

Nell'ipotesi di mescolamento istantaneo sulla sezione, ovvero trascurando le prime fasi del processo di diluizione in cui predominano gli effetti legati al mescolamento verticale e trasversale, è possibile determinare B_0 in base al semplice bilancio di massa illustrato in Figura 6.7. Indicate con: Q_w ($[m^3/s]$) la portata volumetrica di inquinante immessa nella sezione $x = 0$; Q ($[m^3/s]$) la portata volumetrica del corso d'acqua; B_w ($[kg/m^3]$) la concentrazione di BOD immessa in $x = 0$; B ($[kg/m^3]$) la concentrazione di BOD della corrente in arrivo, tale bilancio comporta che

$$B_0 (Q_w + Q) = Q_w B_w + Q B$$

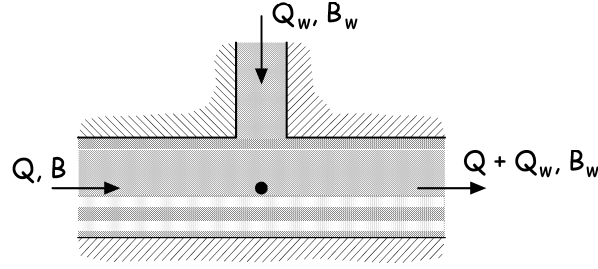


Figura 6.7: Bilancio di massa per la stima della concentrazione iniziale di BOD nel caso di semplice avvezione.

da cui

$$B_0 = \frac{\frac{Q_w B_w}{Q} + B}{1 + \frac{Q_w}{Q}}$$

Tale relazione si semplifica nel caso in cui $Q_w \ll Q$:

$$B_0 = \frac{Q_w B_w}{Q} + B$$

mostrando chiaramente come B_0 diminuisca al crescere di Q .

6.2.2 Determinazione della costante di ri-aerazione r_a

Esistono varie espressioni empiriche che consentono di determinare la costante di ri-aerazione in funzione delle caratteristiche della corrente liquida mediate sulla sezione (i.e., profondità D e velocità media U). Il primo modello, di interesse essenzialmente storico, è stato sviluppato da O'Connor e Dobbins sulla base della teoria di Danc-kwert inerente lo scambio di ossigeno in corrispondenza a un film liquido. Secondo tale teoria, il coefficiente r_L (L/T) che controlla il passaggio di massa attraverso il film risulta:

$$r_L = \sqrt{\mathcal{D} r} \coth \sqrt{\frac{r \ell^2}{\mathcal{D}}}$$

essendo $\mathcal{D}$ (L^2/T) il coefficiente di diffusione molecolare dell'ossigeno in acqua; ℓ (L) la lunghezza di mescolamento di Prandtl; r (T^{-1}) il tasso di rinnovamento. Quest'ultima quantità è legata al mescolamento turbolento sull'intera colonna fluida dell'acqua satura di ossigeno posta in prossimità della superficie libera. Indicato con T_z il tempo caratteristico di tale processo, con e_z il coefficiente di turbolento verticale e con χ il coefficiente di resistenza di Chezy, possiamo scrivere:

$$r \propto \frac{1}{T_z} = \left(\frac{D^2}{e_z} \right)^{-1} \propto \left(\frac{D^2}{u_* D} \right)^{-1} = \left(\frac{\chi}{\sqrt{g}} \frac{D}{U} \right)^{-1} \propto \frac{U}{D}$$

Sulla base di dati relativi al fiume Mississippi, O'Connor e Dobbins pongono

$$r = \frac{U}{D}, \quad \coth \sqrt{\frac{r \ell^2}{\mathcal{D}}} \simeq 1$$

da cui,

$$r_L = \sqrt{\mathcal{D} \frac{U}{D}}$$

Nell'ipotesi che la concentrazione di ossigeno disciolto sia uniformemente distribuita sulla verticale si avrà $r_a = r_L/D$ e, quindi

$$r_a = \sqrt{\mathcal{D}} \frac{U^{0.5}}{D^{1.5}}$$

con $\sqrt{\mathcal{D}} = 12.9$.

Numerose sono le formule empiriche sviluppate successivamente a quella di O'Connor e Dobbins. Tali formule, valide per specifici valori di velocità e profondità sono di norma espresse in unità anglosassoni, ovvero $[U] = ft/s$, $[D] = ft$, $[r_a] = gg^{-1}$, essendo $1 m = 0.3048 ft$. Tra esse ricordiamo:

- Formula di Owens, Edwards e Gibbs

$$r_a = 23 \frac{U^{0.73}}{D^{1.75}}$$

valida per $1 < D < 2.5$ $0.1 < U < 0.5$ $4 < Q < 36$

- Formula di Churchill, Elmore e Buckingham

$$r_a = 11 \frac{U}{D^{1.67}}$$

valida per $2 < D < 11$ $2 < U < 5$ $10^3 < Q < 1.7 \cdot 10^3$

- Formula USGS

$$r_a = 7.6 \frac{U}{D^{1.33}}$$

Di tali formule la più applicata è quella di Churchill, Elmore e Buckingham, nota anche come TVA.

6.2.3 Esempio

Si consideri una corrente in moto uniforme con profondità $D = 1.056 m = 1.056/0.3048 ft$, velocità $U = 0.3048 m/s$ (*i.e.*, $26.335 km/gg = 1 ft/s$) e coefficiente di deossigenazione $r_d = 0.6 gg^{-1}$. Sapendo che nella sezione di immissione $x = 0$ la concentrazione di BOD e il deficit di ossigeno sono, rispettivamente, $B_0 = 10 mg/l$ e $\tilde{O}_0 = 0$, si vogliono determinare i) la distribuzione spaziale del BOD, $B(x)$; ii) la distanza critica, x_c e il deficit critico di ossigeno, $\tilde{O}_c$.

Stimando il coefficiente di aerazione tramite la formula di O'Connor e Dobbins:

$$r_a = 12.9 \frac{1.0^{0.5}}{(1.056/0.3048)^{1.5}} = \frac{12.9}{3.4646^{1.5}} = 2 gg^{-1}$$

e ricordando le (2.2) e (2.4), si ottiene la tabella (6.5) che illustra le distribuzioni spaziali del BOD e del DO. La distanza critica e il deficit critico di ossigeno, calcolati tramite le relazioni (2.6) e (2.7), risultano $x_c = 22.65 km$ e $\tilde{O}_c = 1.8 mg/l$.

Tabella 6.5: Distribuzione spaziale del BOD e del deficit di ossigeno.

x	B	$r_d B$	$\tilde{O}$	$r_a \tilde{O}$
(km)	(mg/l)	(mg/l g)	mg/l	(mg/ l g)
0	10.0	6.0	0	0
8.0	8.33	5.0	1.24	2.48
16.1	6.94	4.16	1.71	3.42
22.65	6.0	3.60	1.80	3.60
24.13	5.78	3.47	1.79	3.58
32.2	4.81	2.89	1.69	3.38
48.27	3.33	2.00	1.32	2.64
64.36	2.31	1.39	0.96	1.92
80.45	1.60	0.96	0.68	1.36
120.67	0.64	0.38	0.27	0.54

6.3 Modifiche dell'equazione di Streeter-Phelps

Il modello di Streeter e Phelps assume che, in un corso d'acqua, la domanda biochimica di ossigeno sia dovuta essenzialmente alla decomposizione dei composti organici (**CBOD**) e che la principale sorgente di ossigeno sia data dalla ri-aerazione. Esistono, tuttavia, altri processi che comportano un consumo di O_2 , quali: i) la domanda biochimica di ossigeno dovuta all'ossidazione dell'**azoto** (**NBOD**); la domanda biochimica di ossigeno dovuta all'ossidazione delle sostanze adsorbite ai **Sedimenti** (**SOD**); al domanda biochimica di ossigeno associata a **sorgenti diffuse** (**BOD** di fondo). Bisogna inoltre tenere conto del **deficit iniziale** di Ossigeno Disciolto. Infine, una ulteriore sorgente di ossigeno disciolto è data dalla **produzione primaria netta** dovuta alla vegetazione acquatica.

6.3.1 NBOD

La concentrazione di **NBOD** è controllata dall'**ossidazione dei composti** contenenti **azoto**, in particolare l'**ammoniaca**. In genere si assume che la concentrazione di **NBOD** sia equivalente alla **concentrazione di ione ammonio**, NH_4^+ . In base alla relazione stechiometrica abbiamo:



La concentrazione di **NBOD** a quella di ione ammonio tramite la relazione: O_2 è possibile infatti legare

$$1\text{ mg } \underbrace{NH_4^+ - N}_{\text{batteri}} \rightarrow \frac{64}{14} = 4.57\text{ mg NBOD}$$

La **costante di de-ossigenazione** associata alla dinamica dall'**NBOD** è simile a quella caratterizzante la dinamica del **CBOD**, e ha un intervallo di variazione $r_d = 0.05 - 0.5\text{ g}^{-1}$.

6.3.2 SOD

La dinamica della concentrazione di **SOD** è controllata dai composti organici adsorbiti alle particelle solide sospese nella colonna fluida e ai sedimenti organici depositati sul fondo (e.g., alghe morte). In condizioni **anossiche**, i processi di **decomposizione dei sedimenti**, oltre alla produzione di **acidi organici**, i.e., di **CBOD**, comportano la liberazione di **ioni-ammonio**. Un ulteriore consumo di ossigeno è legato alla presenza nei sedimenti di **Ferro** e **Manganese**.

L'**SOD** rappresenta la **maggiore fonte di consumo** di ossigeno disciolto nei **fiumi fortemente inquinanti**, per i quali risulta dell'ordine di $5 - 10 \text{ g/m}^2 \text{ gg}$, mentre nel caso di corsi d'acqua **debolmente inquinati** esso varia nell'intervallo $0.1 - 1 \text{ g/m}^2 \text{ gg}$.

L'**SOD** viene misurato con il cosiddetto **respirometro bentonico**, ovvero una scatola dotata di una **flangia**, che viene infissa nei sedimenti, e di una **sonda** per il monitoraggio del consumo di O_2 .

6.3.3 BOD di fondo

La concentrazione del **BOD di fondo**, B_b , è determinata dalla presenza di **sorgenti diffuse** associate alle **acque di prima pioggia** e alle acque di scolo provenienti da strade e da terreni a uso **agricolo**. In genere, la presenza di **BOD** di fondo, lontano da scarichi di acque reflue, è evidenziata da un valore non nullo del deficit di ossigeno $\tilde{O}$. Il legame tra B_b e $\tilde{O}_b$ si ottiene osservando che

$$U \frac{d\tilde{O}_b}{dx} = -r_a \tilde{O}_b + r_d B_b$$

e, per condizioni uniformi (i.e., $d\tilde{O}_b/dx = 0$)

$$\tilde{O}_b = \frac{r_d}{r_a} B_b \quad (3.9)$$

Tipicamente si ha $\tilde{O}_b = 0.5 - 2 \text{ mg/l}$

6.3.4 Produzione primaria netta

La produzione primaria netta è data dalla differenza tra **produzione primaria lorda** P e **respirazione** R . Poichè, in molti corsi d'acqua la **biomassa algale** (alghe flottanti, alghe bentoniche, perifite, fitoplancton) risulta molto maggiore di quella di **pesci**, **piante acquatiche** e **macroinvertebrati**, si può, con buona approssimazione, determinare la **produzione primaria netta**, $P - R$ considerando solo la biomassa algale e quella del fitoplancton.

La produzione primaria lorda, nel corso della giornata, presenta una **variazione approssimativamente sinusoidale**, conseguente al processo di fotosintesi. Il valore massimo, P_m , dell'ordine di $\sim 10 - 40 \frac{\text{mg}}{\text{l gg}}$ si realizza approssimativamente alle 12 : 00. La respirazione, invece, si mantiene circa costante nell'arco della giornata e risulta approssimativamente pari a $R \sim 0.025 P$, essendo P la produzione media giornaliera. Ne consegue che, ai fini del deficit di ossigeno, la condizione peggiore si realizza in prossimità sorgere del sole, dopo che nel corso della notte la sola respirazione è rimasta attiva.

In tabella (6.3.4) sono riportati i **valori tipici** dei vari parametri che compaiono nel modello di Streeter-Phelps modificato e le relative modalità di stima. Tali valori sono stati stimati per una temperatura $\Theta = 20^\circ C$; nella tabella è riportata la costante κ che consente di correggere le stime dei vari parametri in funzione della **temperatura**, secondo la relazione $r_\Theta = r_{20^\circ} \kappa^{(\Theta - 20)}$.

Tabella 6.6: Intervalli di variazione delle varie costanti di reazione e dei vari parametri che compaiono nel modello di Streeter-Phelps modificato. r_d : costante di de-ossigenazione associata al *CBOD* presente in forma di soluto; r_s : costante di de-ossigenazione associata al *CBOD* presente sia in forma di soluto sia particellare; r_n : costante di de-ossigenazione associata all'*NBOD*; r_a : costante di ri-aerazione.

Parametro	Valori	κ	Metodo di stima
r_d	0.05-0.5 gg^{-1}	1.048	misure campo e/o lab.
r_s	0.5-5 gg^{-1}	1.040	misure campo
r_n	0.05-0.5 gg^{-1}	1.080	misure campo
r_a		1.024	calibrazione, isotopi
condizioni tipiche	0.1-0.4 gg^{-1}		formule empiriche
fiumi lenti e profondi	0.4-1.5 gg^{-1}		
fiumi rapidi e profondi	1.5-4.0 gg^{-1}		
fiumi rapidi e poco profondi	4.0-10.0 gg^{-1}		
S		1.065	calibrazione, respirometro
basso inquinamento	0.1-1.0 $g m^{-2} gg^{-1}$		
moderato/pesante inquinamento	5-10 $g m^{-2} gg^{-1}$		
$(P - R)_{media}$	0.5-10 $mg l^{-1} gg^{-1}$	1.066	calibrazione, misure campo
P_{max}	2-20 $mg l^{-1} gg^{-1}$		calibrazione, misure campo
R	1-10 $mg l^{-1} gg^{-1}$		calibrazione, misure campo
$\tilde{O}_b$	0.5-2 mg/l	-	calibrazione

Si noti come la costante di reazione r_s entri in gioco nel caso in cui il *CBOD* sia presente non solo in **forma di soluto**, ma anche in **forma particellare**, eliminata dalla colonna fluida tramite **sedimentazione**. La Figura 6.8 mostra come sia possibile stimare le costanti r_d e r_s sulla base dei **dati sperimentali**, rappresentando $\ln B$ in funzione del **tempo di viaggio** x/U .

Al fine di applicare il modello generalizzato di Streeter-Phelps ad un corso d'acqua, consideriamo un suo tratto in cui la caratteristiche geometriche e idrauliche possono ritenersi con buona approssimazione costanti (segmento omogeneo). Introduciamo quindi le seguenti grandezze, mediate sulla sezione: U , velocità; D , profondità; $\tilde{O}$, deficit di ossigeno; B , concentrazione di *CBOD*; N , concentrazione di *NBOD*; S , concentrazione di *SOD*; P , produzione primaria lorda; R , Respirazione. La Figura 6.9 mostra schematicamente come agiscono i **processi che governano il deficit di ossigeno** nel tratto di corso d'acqua considerato.

È importante osservare che i vari processi possono essere schematizzati con **reazioni del I ordine** e quindi, le corrispondenti **equazioni differenziali** risultano

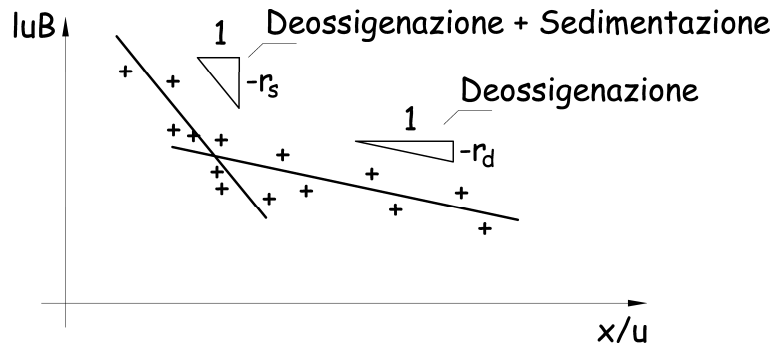


Figura 6.8: Stima del coefficiente di deossigenazione sulla base di dati sperimentali.

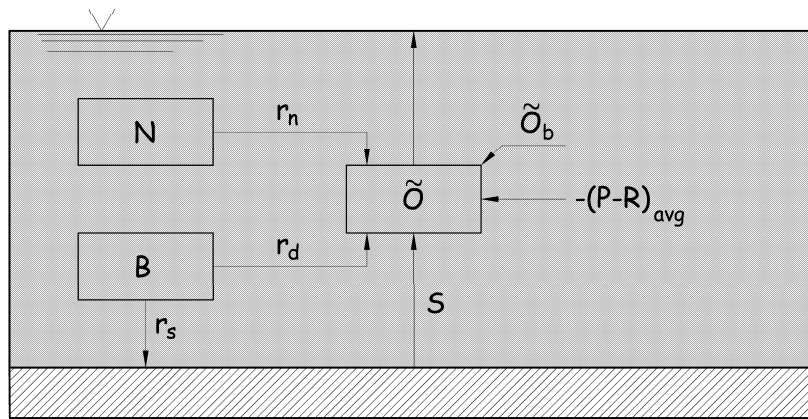


Figura 6.9: Schema dei processi fisici considerati nel modello di Streeter-Phelps generalizzato.

lineari. In presenza di **condizioni al contorno lineari** è quindi possibile applicare la **sovrapposizione degli effetti**, modellando ogni processo separatamente e sommando infine le corrispondenti equazioni differenziali.

L'equazione relativa al **bilancio di massa del deficit di ossigeno disciolto $\tilde{O}$** risulta pertanto:

$$\frac{\partial \tilde{O}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{O}}{\partial x} = -r_a \tilde{O} + r_d B + r_n N + \frac{S}{D} + (R - P) \quad (3.10)$$

essendo:

$$\frac{dB}{dt} + U \frac{dB}{dx} = r_s B \quad \frac{dN}{dt} + U \frac{dN}{dx} = r_n N$$

Si noti come r_s entri in gioco nella equazione del **CBOD** **ma non** in quella del **deficit di ossigeno**. Assumendo **condizioni stazionarie** ($\partial/\partial t = 0$) e indicato con $\tau = x/U$ il **tempo di viaggio**, la soluzione delle equazioni per B ed N porge

$$B = B_0 \exp(-r_s \tau), \quad N = N_0 \exp(-r_n \tau)$$

: e, quindi:

$$\frac{d\tilde{O}}{d\tau} + r_a \tilde{O} = r_d B_0 \exp(-r_s \tau) + r_n N_0 \exp(-r_n \tau) + \frac{S}{D} + R - \bar{P} + \frac{r_d}{r_a} B_b$$

essendo $\bar{P}$ la media giornaliera della produzione primaria lorda. La soluzione di tale equazione è facilmente determinabile ponendo:

$$p = r_a \quad q = r_d B_0 \exp(-r_s \tau) + r_n N_0 \exp(-r_n \tau) + \frac{S}{D} + R - \bar{P}$$

e porge

$$\tilde{O} = \tilde{O}_0 e^{-\mathcal{P}} + e^{-\mathcal{P}} \int q e^{-\mathcal{P}} d\tau \quad \mathcal{P} = \int p d\tau$$

con $\tilde{O}_0$ concentrazione iniziale del deficit di ossigeno. Sommando a tale soluzione quella relativa al **deficit di fondo** (equazione (3.9)), calcolata anch'essa per **condizioni uniformi**, infine otteniamo:

$$\begin{aligned} \tilde{O} &= \tilde{O}_0 \exp(-r_a \tau) + \frac{r_d}{r_a - r_s} B_0 [\exp(-r_s \tau) - \exp(-r_a \tau)] \\ &+ \frac{r_n}{r_a - r_n} N_0 [\exp(-r_n \tau) - \exp(-r_a \tau)] + \frac{S}{r_a D} [1 - \exp(-r_a \tau)] \\ &+ \frac{R - \bar{P}}{r_a} [1 - \exp(-r_a \tau)] + r_d \frac{B_b}{r_a} \end{aligned}$$

La Figura 6.10 mostra l'andamento dei vari contributi a $\tilde{O}$ in funzione del tempo di viaggio.

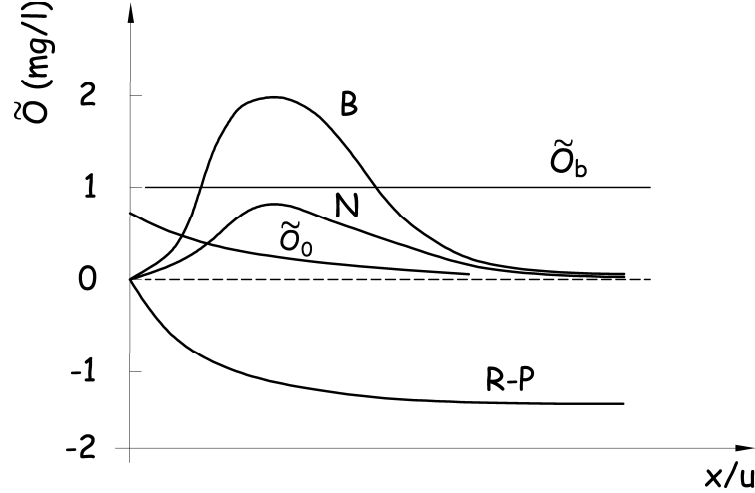


Figura 6.10: Contributi al deficit di ossigeno secondo il modello di Streeter-Phelps modificato, in funzione del tempo di viaggio, $\tau = x/U$.

Il modello sopra descritto si basa sulle ipotesi di: moto uniforme ($U, D = cost$); stazionarietà delle varie forzanti ($\partial \dots / \partial t = 0$); **mescolamento immediato a valle della sezione di immissione** (i.e., fenomeni dispersivi trascurabili).

Nel piano (x, t) , le curve di pendenza $dx/dt = U$ sono dette **linee caratteristiche** che, come illustrato in Figura 6.11 risultano rette nel caso di velocità U **costante**. In base alle (3.11), lungo le linee caratteristiche $\tilde{O}$ varia secondo la legge $d\tilde{O}/dt = f(x, t)$. Se $f(x, t) = 0$, l'andamento di $\tilde{O}$ osservato in $x = 0$ si ripete identicamente nella sezione generica x_i a partire dall'istante $\tau_i = x_i/U$ e, quindi, il sistema perde memoria della distribuzione spaziale di $\tilde{O}$ osservata per $t = 0$, quando $t > \tau_i$. Se il tratto di corso d'acqua è relativamente lungo e/o la velocità media della corrente è relativamente bassa, si ha che $L/U > 1$ *gg*: al fine di eliminare l'influenza della condizione iniziale è quindi necessario protrarre la simulazione per più di un giorno.

Il termine forzante relativo alla produzione primaria può essere schematizzata dalla relazione:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_{max}(x) \sin \left[\pi \frac{(t - t_{if})}{t_{df}} \right] & t_{if} < t < t_{if} + t_{df} \\ P(x, t) &= 0 & t < t_{if}, \quad t_{if} + t_{df} < t < 1 \end{aligned}$$

dove $P_{max}(x)$ è il massimo tasso di produzione primaria nella sezione generica sezione x (espresso in $mg/l \cdot gg$), t è il tempo, in giorni, t_{if} è l'ora di inizio del processo di fotosintesi e t_{df} è la sua durata.

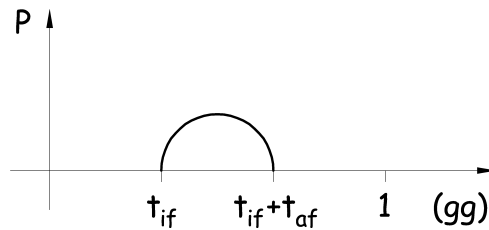


Figura 6.12: Andamento giornaliero delle produzione primaria lorda conseguente al processo di fotosintesi.

Il valore di $P_{max}(x)$, al pari di $R(x)$, va determinato sulla base di misure effettuate in varie sezioni lungo il tratto di corso d'acqua considerato. Alternativamente $P_{max}(x)$ e $R(x)$ possono essere determinati calibrando il modello sulla base delle misure effettuate per O in varie sezioni.

6.4 Assegnazione dei carichi inquinanti

Il modello di Streeter-Phelps generalizzato descritto nel precedente paragrafo consente di determinare i carichi inquinanti ammissibili, ovvero quelli che consentono di soddisfare il contenuto minimo di ossigeno disciolto previsto standard dagli standard di qualità delle acque:

$$\overline{O} > 5 \, mg/l \qquad O(t) > 4 \, mg/l$$

con $\overline{O}$ valore **medio giornaliero** e $O(t)$ valore **istantaneo**.

Nel **periodo estivo** le condizioni critiche per il rispetto degli standard di qualità in genere si realizzano per basse portate e prima del sorgere del sole (i.e., dopo una intera **notte** in cui $P = 0$). Anche il **periodo invernale** può comportare condizioni critiche qualora, oltre alla bassa portata, si abbia la formazione di ghiaccio sulla superficie libera, con conseguente impedimento dello scambio d'ossigeno ($r_a = 0$).

La **minima portata** da considerare nei calcoli è quella **tempo di ritorno di 10 anni** e **durata settimanale**.

6.4.1 Esempio

Lo Shenandoah River é un corso d'acqua australiano caratterizzato una **portata minima** con **tempo di ritorno 10 anni** e **durata settimanale** pari a $Q = 4.53 \text{ m}^3/\text{s}$.

In corrispondenza di una portata di magra estiva pari a $Q = 11.04 \text{ m}^3/\text{s}$ si è rilevato che P_{max} si realizza tra le 12:00 e le 16:00 mentre O_{max} , in seguito allo sfasamento tra produzione primaria e ri-aerazione, si realizza attorno alle 20:00. La distribuzione temporale di O , misurata nella sezione $x = 0$ presenta un minimo nelle prime ore della mattina (7:00-8:00) mentre il massimo si realizza attorno alle 20:00 (Figura 6.13).

L'obiettivo é quello di determinare le condizioni critiche per l'ossigeno disciolto, ovvero i valori minimi assunti dall'ossigeno disciolto nel tratto di corso d'acqua considerato. A tale scopo é necessario risolvere numericamente l'equazione (3.10) tramite le differenze finite o la teoria delle caratteristiche.

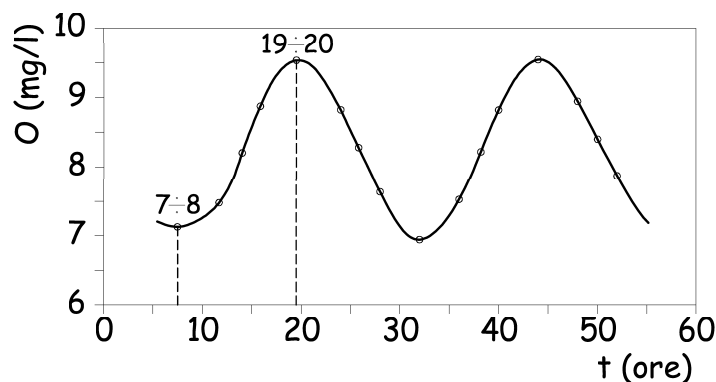


Figura 6.13: Andamento temporale dell'ossigeno disciolto misurato nella sezione iniziale.

In entrambe i casi, al fine di protrarre simulazione numerica per un tempo sufficientemente lungo da consentire al sistema di perdere memoria delle condizioni iniziali (da imporre arbitrariamente in quanto non note), é necessario estendere periodicamente sia la condizione al contorno nella sezione iniziale (Figura 6.12) sia la funzione che descrive l'andamento temporale della produzione primaria lorda (Figura 6.10).

A tale scopo é possibile semplicemente ripetere il segnale uguale a se stesso ogni 24 ore, oppure ricorrere alla **trasformata discreta inversa** di Fourier. In quest'ultimo caso la distribuzione temporale dell'ossigeno disciolto nella sezione di origine risulta:

$$O(0, t_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \left[a_k \cos(2\pi k \frac{t_j}{T}) + b_k \sin(2\pi k \frac{t_j}{T}) \right]$$

dove $t_j = j \Delta t$ é l'istante di tempo generico, T é il periodo (pari a 24 ore nel caso in questione) e N é il numero di valori di O_n rilevati in $x = 0$ nell'arco della giornata. I coefficienti della serie

$$a_0 = 2 \frac{\xi_k}{N}, \quad a_k = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\xi_{k+1}}{N} \right), \quad b_k = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\xi_{k+1}}{N} \right),$$

sono determinati in base alla **trasformata discreta diretta** di Fourier

$$\xi_k = \sum_{n=1}^N O_n \exp \left[-i 2 \pi (k-1) \frac{n-1}{N} \right] \quad 1 \leq k \leq N$$

Il vettore $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ rappresenta lo **spettro del segnale**; le sue componenti sono dette **componenti armoniche**.

Nel caso della funzione $P(x, t)$ illustrata in Figura 6.10 si ottiene:

$$P(x, t) = P_{max}(x) \left\{ \frac{2 t_{df}}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[2 \pi k (t - t_{if} - \frac{t_{df}}{2})] \right\}$$

$$a_k = \frac{4 \pi / t_{df}}{(\pi / t_{df})^2 - (2 \pi k)^2} \cos(k \pi t_{df})$$

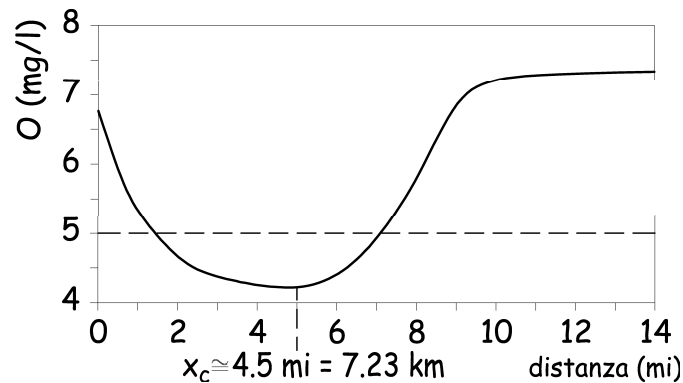


Figura 6.14: Andamento spaziale del massimo deficit di ossigeno ottenuto discretizzando alle differenze finite l'equazione (3.10) e risolvendola numericamente.

La risoluzione numerica dell'equazione (3.10), condotta tramite il metodo delle differenze finite é illustrata in Figura 6.14 che riporta il valore minimo dell'ossigeno disciolto registrato in ciascuna sezione del corso d'acqua. É immediato osservare che la concentrazione dell'ossigeno disciolto sia sempre maggiore del limite di legge, 4 mg/l. Anche la concentrazione media giornaliera, pari a, 7 mg/l, risulta superiore al valore limite di legge, 5 mg/l. I valori dei carichi di *CBOD* e di *NBOD* che garantiscono il soddisfacimento di tali condizioni (**carichi ammissibili**) sono $Q_{CBOD} = 1740 \text{ kg/gg}$ e $Q_{NBOD} = 644 \text{ kg/gg}$, rispettivamente. È tuttavia importante osservare che i valori minimi di ossigeno, che si realizzano in prossimità dell'alba per effetto della **respirazione notturna**, risultano prossimi alle condizioni limite.

6.5 Segmentazione

Il modello di Streeter-Phelps generalizzato precedentemente visto può essere facilmente applicato suddividendo il corso d'acqua in **segmenti omogenei**. Possibili cause di non omogeneità, sono: i) variazioni geometriche dell'alveo; ii) confluenze/-derivazioni di portata; iii) immissione di acque reflue; iv) presenza di traverse fluviali, rapide, etc.; v) variazioni della biomassa algale; vi) composizione dei sedimenti del fondo.

6.5.1 Confluenze e derivazioni

Con riferimento al ramo i -esimo ($i = 1, 2$) di due correnti che confluiscono a formare un unico corso d'acqua, siano: Q_i la portata fluente (m^3/s); Θ_i la temperatura dell'acqua ($^{\circ}C$); B_i la concentrazione di BOD (mg/l); O_i la concentrazione di ossigeno disciolto (mg/l); $\tilde{O}_i$ il deficit di ossigeno ($O_{si} - O_i$) (mg/l); B_0 la concentrazione di BOD conseguente alla confluenza (mg/l); O_0 la concentrazione di ossigeno disciolto conseguente alla confluenza (mg/l); $\tilde{O}_0$ il deficit di ossigeno conseguente alla confluenza (mg/l).

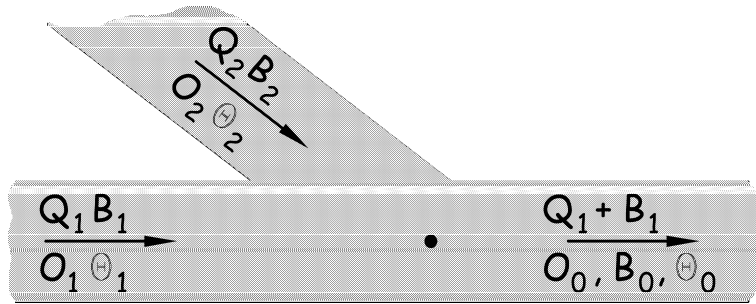


Figura 6.15: Schema di confluenza e notazioni.

Il valore di B_0 é facilmente ricavato operando un bilancio di massa e assumendo **mescolamento istantaneo**. Si ottiene:

$$B_0 = \frac{B_1 Q_1 + B_2 Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

Ai fini della determinazione di $\tilde{O}_0$ bisogna tenere conto della dipendenza dalla temperatura. Ipotizzando sempre mescolamento istantaneo si ottiene:

$$O_0 = \frac{O_1 Q_1 + O_2 Q_2}{Q_1 + Q_2}, \quad \Theta_0 = \frac{\Theta_1 Q_1 + \Theta_2 Q_2}{Q_1 + Q_2},$$

e, quindi,

$$\tilde{O}_0 = O_s(\Theta_0) - O_0$$

Il caso di una derivazione viene trattato in modo del tutto analogo.

6.5.2 Esempio di confluenza

Consideriamo il caso di una confluenza in cui:

- $Q_1 = 55 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 14 \text{ m}^3/\text{s}$
- $\Theta_1 = 26.3^\circ\text{C}$, $\Theta_2 = 24.9^\circ\text{C}$
- $O_1 = 7.3 \text{ mg/l}$, $O_2 = 6.8 \text{ mg/l}$
- $O_{s1} = 8.4 \text{ mg/l}$, $O_{s2} = 8.6 \text{ mg/l}$
- $B_1 = 3.0 \text{ mg/l}$, $B_2 = 6.0 \text{ mg/l}$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{B_1 Q_1 + B_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{55 \times 3 + 14 \times 6}{55 + 14} = 3.6 \text{ mg/l} \\
 O_0 &= \frac{O_1 Q_1 + O_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{55 \times 7.3 + 14 \times 6.8}{55 + 14} = 7.2 \text{ mg/l} \\
 \Theta_0 &= \frac{\Theta_1 Q_1 + \Theta_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{55 \times 26.3 + 14 \times 24.9}{55 + 14} = 26.02^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

Da cui, infine,

$$O_s(26.02) = 8.5 \text{ mg/l} \quad \tilde{O}_0 = O_{s0} - O_0 = 8.5 - 7.2 = 1.3 \text{ mg/l}$$

6.5.3 Esempio di segmentazione

La Figura 6.16 mostra un esempio di come un corso d'acqua può essere suddiviso in segmenti omogenei in funzione delle varie forzanti.

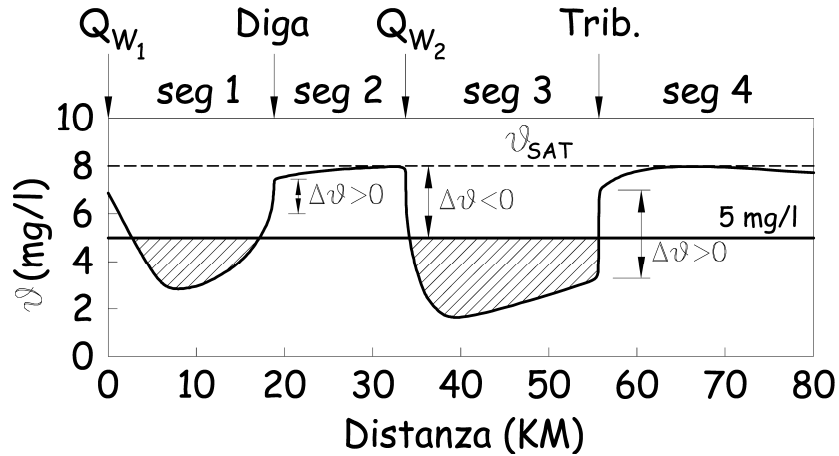


Figura 6.16: Andamento dell'ossigeno disciolto in un corso d'acqua caratterizzato da quattro segmenti omogenei.

La sezione iniziale $x = 0$ del **segmento 1** presenta uno scarico di acque reflue Q_{w1} a cui corrispondono nuovi valori di B_0 , O_0 , N_0 . L'inizio del **segmento 2**, posto

a $x = 20$ km, é determinato dalla presenza di una **traversa fluviale**. L'acqua che stramazza a valle di essa comporta una ri-areazione della corrente e quindi un incremento localizzato $\Delta O > 0$ dell'ossigeno disciolto. L'inizio del **segmento 3** coincide con uno scarico di acque reflue Q_{w2} nella sezione $x = 35$ km (e con nuovi valori di B_0 , O_0 , N_0). L'inizio del **segmento 4**, localizzato nella sezione $x = 45$ km, é definito da una confluenza con un tributario, con un carico inquinante minore (i.e., $\Delta O < 0$).

È evidente che il corso d'acqua non riesce a rispettare il requisito $O > 5$ mg/l. È quindi necessario ridurre i carichi inquinanti immessi Q_{w1} e Q_{w2} .

6.6 Dispersione non trascurabile e reazione del I ordine

Nel caso di **ampi corsi d'acqua** e di **estuari** non è possibile trascurare l'effetto della dispersione idrodinamica. La concentrazione media sulla sezione di una generica sostanza inquinante soggetta ad una reazione del I ordine pertanto risulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x A \frac{\partial C}{\partial x} \right) \pm r C$$

Tale equazione può dunque essere utilizzata per descrivere la dinamica del *BOD* e dell'ossigeno disciolto in presenza di effetti dispersivi non trascurabili. Indicati al solito con B e $\tilde{O}$ i valori medi sulla sezione della concentrazione di BOD e del deficit di ossigeno, avremo:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x A \frac{\partial B}{\partial x} \right) - r_d B \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{O}}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial \tilde{O}}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x A \frac{\partial \tilde{O}}{\partial x} \right) + r_d B - r_a \tilde{O} \quad (6.13)$$

e, per condizioni stazionarie e segmento omogeneo (i.e., Q , A , K_x costanti lungo x):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{U}{K_x} \frac{\partial B}{\partial x} - r_d B = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{O}}{\partial x^2} - \frac{U}{K_x} \frac{\partial \tilde{O}}{\partial x} - r_a \tilde{O} + r_d B = 0 \quad (6.15)$$

6.6.1 Soluzione per il BOD

La soluzione per B si ottiene innanzitutto risolvendo l'omogenea associata della (6.14), che porge:

$$B = k^+ \exp(\lambda_d^+ x) + k^- \exp(\lambda_d^- x) \quad (6.16)$$

con:

$$\lambda_d^\pm = \frac{U}{2K_x} [1 \pm m_d], \quad m_d = \sqrt{1 + 4 \frac{r_d K_x}{U^2}} \quad (6.17)$$

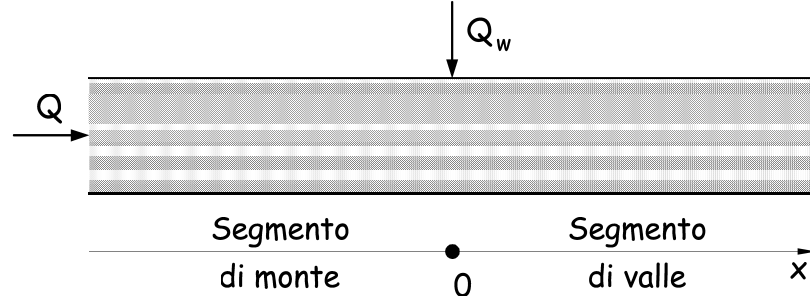


Figura 6.17: Schema di immissione di inquinante localizzata in un corso d'acqua con dispersione non trascurabile.

Le costanti di integrazione k^+ e k^- vengono determinate imponendo le condizioni al contorno, ovvero che la concentrazione nella sezione di immissione $x = 0$ sia B_0 (Figura 6.17) e che molto a monte/valle l'acqua si mantenga pulita, i.e., $B(\pm\infty) = 0$. Osservando che $m_d > 1$ e, quindi, $\lambda_d^- > 0$ e $\lambda_d^+ > 0$ quest'ultima condizione impone che la concentrazione B decada esponenzialmente. Avremo dunque che ovvero che $k^+ = 0$ per $x > 0$ e $k^- = 0$ per $x < 0$. La condizione sulla concentrazione nella sezione di immissione comporta quindi che $k^- = B_0$ per $x > 0$ e $k^+ = B_0$ per $x < 0$. Ne consegue che:

$$B^+ = B_0 \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 - m_d) x \right] \quad x \geq 0 \quad (6.18)$$

$$B^- = B_0 \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 + m_d) x \right] \quad x \leq 0 \quad (6.19)$$

$$(6.20)$$

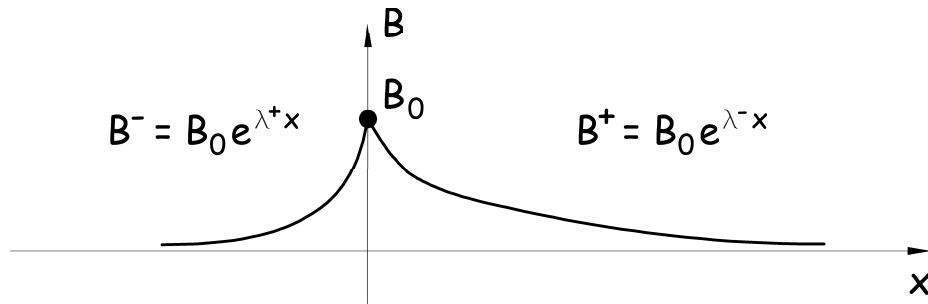


Figura 6.18: Andamento spaziale della concentrazione di BOD in seguito a una immissione localizzata in un corso d'acqua con dispersione non trascurabile.

L'andamento spaziale di B , illustrato in Figura 6.18, presenta una cuspidè per $x = 0$. Inoltre, essendo $|\lambda_d^-| > |\lambda_d^+|$, il decadimento esponenziale è più rapido nel segmento di monte. A differenza di quanto avviene nel caso della pura convezione uniforme, la dispersione comporta che l'inquinante influenzi il corso d'acqua anche a monte della sezione di immissione.

La concentrazione B_0 é facilmente determinata considerando il bilancio di massa illustrato in Figura 6.19. Indicata con Q la portata nel corso d'acqua, con $Q_w B_w$ la portata di massa immessa in $x = 0$ e assumendo mescolamento istantaneo, il bilancio di massa porge:

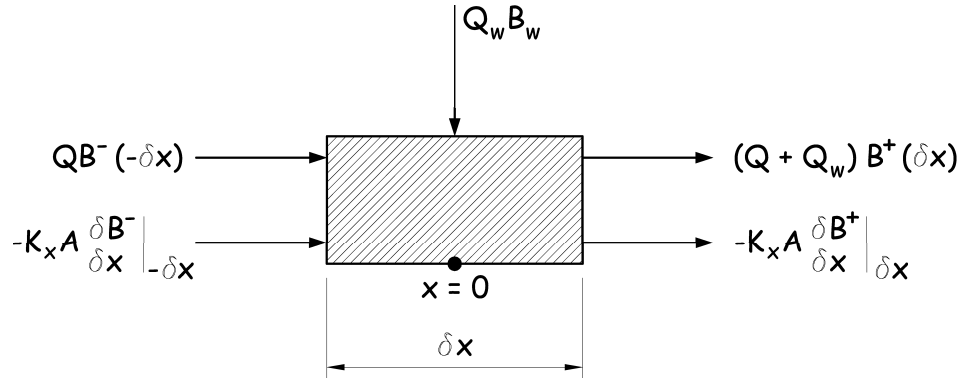


Figura 6.19: Bilancio di massa per il BOD in corrispondenza della sezione di immissione, nel caso di dispersione non trascurabile.

$$\left[QB^- - K_x A \frac{dB^-}{dx} \right]_{x=-\delta x} + Q_w B_w = \left[(Q + Q_w) B^+ - K_x A \frac{dB^+}{dx} \right]_{x=\delta x}$$

Sviluppando in serie di Taylor in un intorno dell'origine si ha:

$$\begin{aligned} \left[QB^- - K_x A \frac{dB^-}{dx} \right]_{x=-\delta x} &= Q B_0 - K_x A_0 \frac{dB^-}{dx} \Big|_0 + O(\delta x) \\ &\simeq Q B_0 - K_x A_0 \lambda_d^+ B_0 \\ \left[QB^+ - K_x A \frac{dB^+}{dx} \right]_{x=\delta x} &= Q B_0 - K_x A_0 \frac{dB^+}{dx} \Big|_0 + O(\delta x) \\ &\simeq Q B_0 - K_x A_0 \lambda_d^- B_0 \end{aligned}$$

ovvero

$$Q B_0 - K_x A_0 \lambda_d^+ B_0 + Q_w B_w = (Q + Q_w) B_0 - K_x A_0 \lambda_d^- B_0$$

e quindi

$$B_0 = \frac{Q_w B_w}{Q_w + K_x A_0 (\lambda_d^+ - \lambda_d^-)}$$

Ma,

$$\lambda_d^+ - \lambda_d^- = \frac{1}{2} \frac{U}{K_x} (1 + m_d - 1 + m_d) = m_d \frac{U}{K_x}$$

e, in definitiva:

$$B_0 = \frac{Q_w B_w}{m_d Q} \frac{1}{1 + Q_w/Qm_d} \quad (6.21)$$

Nel caso, molto comune, in cui la portata volumetrica del corso d'acqua sia molto maggiore di quella dell'inquinante, si ha $Q_w/Qm_d \ll 1$ e, quindi

$$B_0 = \frac{Q_w B_w}{m_d Q}$$

È in ogni caso evidente che, per effetto della dispersione longitudinale, la concentrazione B_0 risulta minore di quella che si avrebbe nel caso di pura avvezione (i.e., $m_d = 1$ per $K_x = 0$).

6.6.2 Soluzione per il deficit di ossigeno

L'equazione 6.15 del deficit di ossigeno può essere riscritta nella forma

$$\frac{d^2 \tilde{O}}{dx^2} - \frac{U}{K_x} \frac{d\tilde{O}}{dx} - \frac{r_a}{K_x} \tilde{O} = -\frac{r_d}{K_x} B$$

La soluzione di tale equazione differenziale ordinaria è data dalla somma della **soluzione dell'omogenea associata**, del tutto simile a quella ottenuta per B :

$$\tilde{O} = k^- \exp(\lambda_a^- x) + k^+ \exp(\lambda_a^+ x)$$

con

$$\lambda_a^\pm = \frac{U}{2K_x} (1 \pm m_a) \quad m_a = \sqrt{1 + 4 \frac{K_x r_a}{U^2}} \quad (6.22)$$

e dell'**integrale particolare**:

$$\tilde{O}_p^\pm = \frac{r_d B_0}{r_a - r_d} \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 \pm m_d) x \right] \quad (6.23)$$

Anche in tal caso le costanti vanno determinate in base alle condizioni al contorno, ovvero che il deficit di ossigeno sia pari a $\tilde{O}_0$ nella sezione di immissione e che l'acqua si mantenga pulita molto a monte/valle dell'immissione (i.e., $\tilde{O}(\pm\infty) = 0$)

Osservando che $m_a > 1$ e, quindi, $\lambda_a^- < 0$ e $\lambda_a^+ > 0$, quest'ultima condizione comporta che $k^+ = 0$ per $x > 0$ e $k^- = 0$ per $x < 0$. D'altra parte la condizione $\tilde{O}^+(0) = \tilde{O}^-(0) = \tilde{O}_0$ comporta che

$$k^+ = k^- = \tilde{O}_0 - \tilde{O}_{p0} = \tilde{O}_0 - B_0 \frac{r_d}{r_a - r_d}$$

La concentrazione $\tilde{O}_0$ è ricavata tramite il bilancio di massa illustrato nella Figura 6.20. A meno di infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$Q \tilde{O}_0 - K_x A_0 \left[\frac{d\tilde{O}^-}{dx} \right]_0 = (Q + Q_w) \tilde{O}_0 - K_x A_0 \left[\frac{d\tilde{O}^+}{dx} \right]_0$$

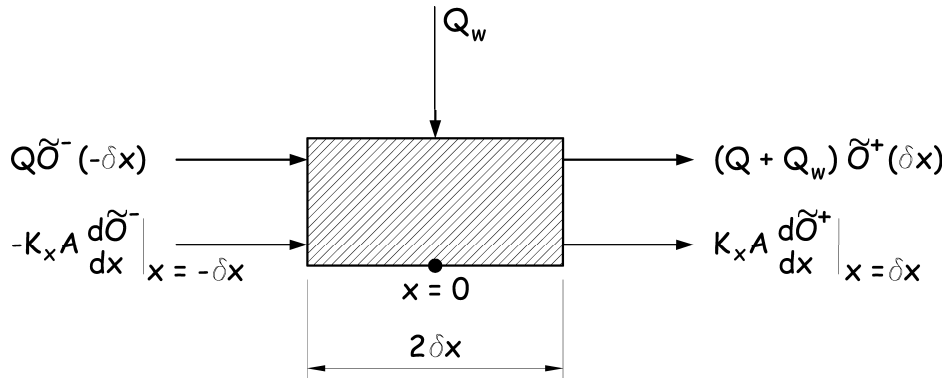


Figura 6.20: Bilancio di massa per il deficit di ossigeno in corrispondenza della sezione di immissione di un inquinante, nel caso di dispersione non trascurabile.

ed essendo in genere $Q_w \tilde{O}_0$ molto piccolo,

$$\left[\frac{d\tilde{O}^-}{dx} \right]_0 = \left[\frac{d\tilde{O}^+}{dx} \right]_0$$

Tale condizione implica che la distribuzione spaziale di $\tilde{O}$, a differenza di quella di B , non presenta dunque una cuspide nella sezione di immissione. Svolgendo le derivate e ricordando che $k^+ = k^-$ si ottiene infine:

$$k^- = k^+ = -B_0 \frac{r_d}{r_a - r_d} \frac{m_d}{m_a} \quad (6.24)$$

La soluzione per il **deficit di ossigeno disciolto**, illustrato nella Figura 6.21, in definitiva porge:

$$\tilde{O}^- = \frac{B_0 r_d}{r_a - r_d} \left\{ \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 + m_d) \right] - \frac{m_d}{m_a} \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 + m_a) \right] \right\} \quad x < 0$$

$$\tilde{O}^+ = \frac{B_0 r_d}{r_a - r_d} \left\{ \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 - m_d) \right] - \frac{m_d}{m_a} \exp \left[\frac{U}{2K_x} (1 - m_a) \right] \right\} \quad x > 0$$

I parametri adimensionali m_d e m_a tengono conto dell'importanza relativa dell'avvezione e della dispersione. In particolare, indicato con $r_{a,d}$ il valore di r_a o r_d la dispersione risulta predominante quando $r_{a,d} K_x / U^2 > 20$ mentre é l'avvezione che predomina se $r_{a,d} K_x / U^2 < 0.05$:

6.6.3 Esempio di immissione localizzata di BOD in un estuario

Consideriamo un estuario caratterizzato da una velocità media sulla sezione $U = 38.85$ km/gg in cui viene immessa nella sezione $x = 0$ una portata di BOD pari a $Q_w B_w / Q = 18.5$ mg/l. Misure di campo e di laboratorio indicano che: $K_x = 5.74$ km²/gg, $r_d = 0.15$ gg⁻¹, $r_a = 0.18$ gg⁻¹

Vogliamo **determinare**, in **condizioni stazionarie**, l'andamento di B e $\tilde{O}$ a monte e a valle della sezione di immissione $x = 0$, sapendo che sufficientemente a monte e a valle l'acqua non è inquinata. I rapporti:

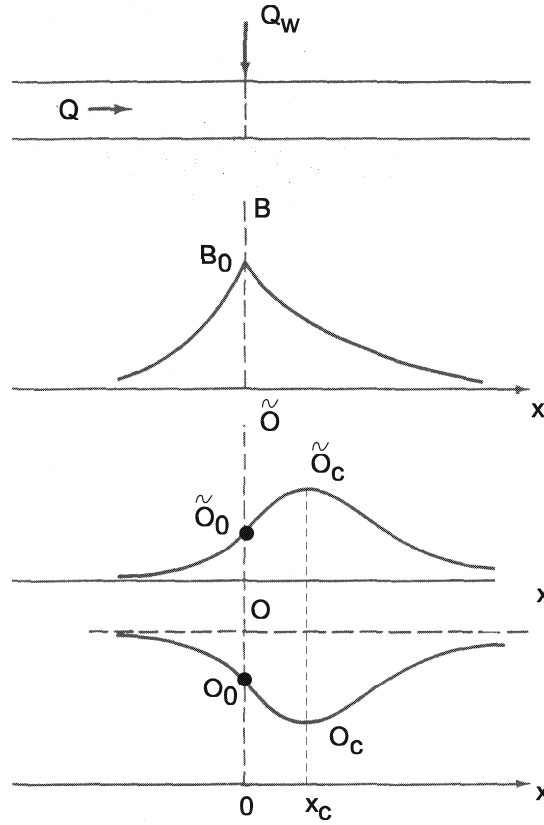


Figura 6.21: Andamento spaziale del BOD, del deficit di ossigeno e dell'ossigeno disciolto nel caso di immissione localizzata e dispersione non trascurabile.

$$\frac{r_d K_x}{U^2} = 0.18 \qquad \frac{r_a K_x}{U^2} = 0.21$$

suggeriscono che nell'estuario la dinamica di B e $\tilde{O}$ è controllata sia dall'avvezione sia dalla dispersione.

Calcoliamo innanzitutto i parametri che compaiono nelle espressioni (6.18) e (6.19) che descrivono la distribuzione spaziale di B :

$$\begin{aligned} m_d &= \sqrt{1 + \frac{4 r_d K_x}{U^2}} = 1.31 & B_0 &= \frac{Q_w B_w}{Q m_d} = 14.12 \text{ mg/l} \\ \frac{U}{2K_x} (1 - m_d) &= -0.0229, & \frac{U}{2K_x} (1 + m_d) &= 0.1706 \end{aligned}$$

Otteniamo così la distribuzione spaziale illustrata in Figura 6.22:

$$\begin{aligned} B^- &= 14.12 e^{0.1706 x} & x &\leq 0 \\ B^+ &= 14.12 e^{-0.0229 x} & x &\geq 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora i parametri che caratterizzano la distribuzione spaziale del deficit di ossigeno $\tilde{O}$:

$$m_a = \sqrt{1 + \frac{4 r_a K_x}{U^2}} = 1.36 \quad \frac{m_d}{m_a} = 0.9632 \quad B_0 \frac{r_d}{r_a - r_d} = 70.6$$

$$\frac{U}{2K_x} (1 - m_a) = -0.0266, \quad \frac{U}{2K_x} (1 + m_a) = 0.1743$$

La distribuzione spaziale della concentrazione del deficit di ossigeno, illustrata in Figura 6.22, risulta quindi

$$\begin{aligned} \tilde{O}^- &= 70.6 (e^{0.1706 x} - 0.9632 e^{0.1743 x}) & x \leq 0 \\ \tilde{O}^+ &= 70.6 (e^{-0.0229 x} - 0.9632 e^{-0.0266 x}) & x \geq 0 \end{aligned}$$

In Figura 6.22 sono anche illustrati i **flussi di BOD e DO**:

$$\begin{aligned} \frac{dB^-}{dx} &= 2.41 e^{0.1706 x} & x \leq 0 \\ \frac{dB^+}{dx} &= 0.323 e^{-0.0229 x} & x \geq 0 \\ \frac{d\tilde{O}^-}{dx} &= 12.04 e^{0.1706 x} - 11.85 e^{0.1743 x} & x \leq 0 \\ \frac{d\tilde{O}^+}{dx} &= -1.62 e^{-0.0229 x} + 1.81 e^{-0.0266 x} & x \geq 0 \end{aligned}$$

È immediato **verificare** che per $x = 0$:

$$\left. \frac{dB^-}{dx} \right|_{x=0} \neq \left. \frac{dB^+}{dx} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{d\tilde{O}^-}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\tilde{O}^+}{dx} \right|_{x=0},$$

Infine, si noti come, a causa degli effetti dispersivi, le condizioni critiche ($x_c \simeq 20 \text{ miles}$) si realizzano prima che $r_a \tilde{O} = r_d B$ ($x_c \simeq 25 \text{ miles}$)

6.6.4 Ulteriori processi fisici agenti negli estuari

Gli estuari e i processi fisici che in essi agiscono possono essere classificati in relazione all'importanza relativa tra l'azione della **marea** (caratterizzata dall'ampiezza dell'escursione di marea) e l'azione idrodinamica del **corso d'acqua** (caratterizzata dalla portata d'acqua dolce). Si distinguono così: i) estuari **nettamente stratificati**; ii) estuari **parzialmente mescolati**; iii) estuari **totalmente mescolati**.

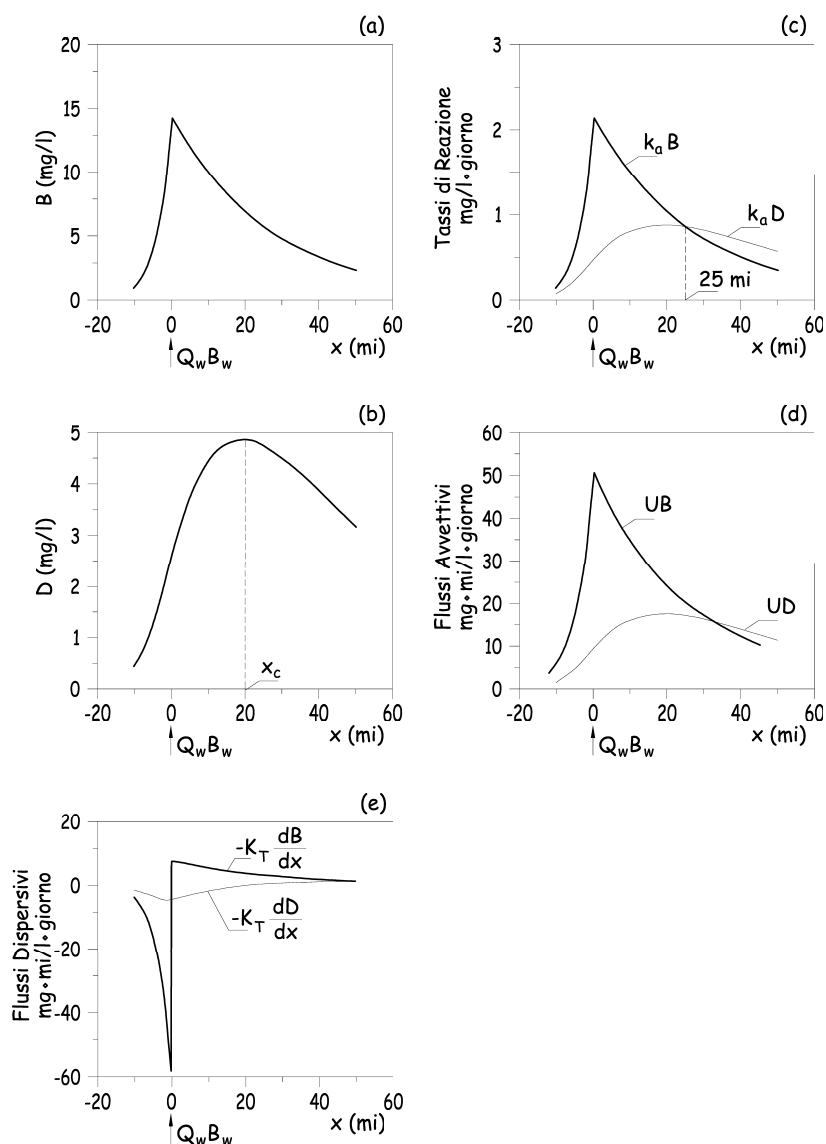


Figura 6.22: Andamento spaziale della concentrazione di BOD, del deficit di ossigeno, dei tassi di reazione, dei flussi avvettivi e dispersivi nel caso di immissione localizzata di un inquinante organico in un estuario.

6.6.5 Estuari nettamente stratificati

In tale tipologia di estuari (Figura 6.23) è la portata d'acqua dolce convogliata dal corso d'acqua che governa la circolazione (e.g., Adige, Sile, i vari rami del Po). L'escursione di livello dovuta alla marea è in genere modesta e da luogo alla formazione del cosiddetto **cuneo salino**. Tale cuneo presenta all'interfaccia rilevanti processi di mescolamento. L'azione della corrente superficiale comporta un notevole trascinamento d'acqua salata che, per continuità, genera una componente verticale di velocità il cui effetto è quello di incrementare il mescolamento verticale. Si noti come la velocità della marea u , in fase di flusso e riflusso, può essere decisamente

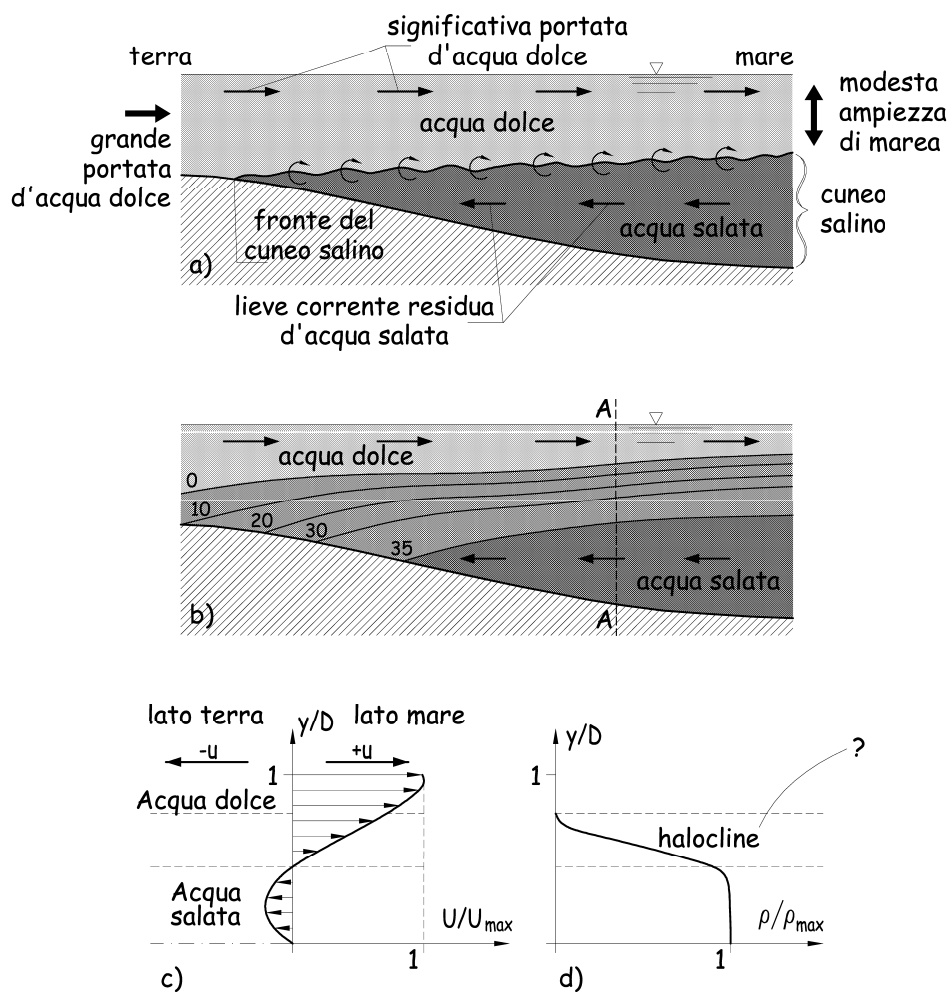


Figura 6.23: Schema di estuario nettamente stratificato e dei meccanismi fisici in esso agenti. a) Andamento della circolazione idrodinamica; b) distribuzione della salinità; c) profilo verticale di velocità; d) profilo verticale di densità.

superiore alla velocità mediata sull'intero ciclo di marea, $U = Q_r/A$, essendo c Q_r la portata d'acqua dolce convogliata dal corso d'acqua ed A l'area media della sezione durante un ciclo di marea. In genere si ha che, $u \geq 5U$. Chiaramente, in presenza di una portata d'acqua dolce trascurabile, $Q_r \simeq 0$, la velocità media durante un ciclo di marea è nulla, $U \simeq 0$. È evidente che il profilo di velocità indotto dalla marea comporta una elevata dispersione longitudinale. Nel caso di estuari fortemente dissipativi, l'andamento temporale della velocità u e del livello della superficie libera H sono sfasati di circa $\pi/2$ (ovvero di $T/4$, con T periodo della marea).

In corrispondenza della testa del cuneo salino la sedimentazione dei sedimenti trasportati in sospensione risulta accentuata per effetto dei processi di flocculazione, dando luogo al cosiddetto turbidity maximum. Ciò comporta un incremento dei processi di consumo di ossigeno dovuti alle trasformazioni biochimiche delle sostanze adsorbite ai sedimenti e ai processi di sedimentazione.

La dinamica del cuneo salino è controllata dal bilancio tra portata d'acqua dolce

e onda di marea, e può essere descritta tramite un modello monodimensionale a due strati. In corrispondenza di basse portate il cuneo salino tende a penetrare verso l'entroterra mentre risulta ricacciato verso mare in corrispondenza degli eventi di piena. Analogamente, il cuneo salino tende a muoversi verso terra in corrispondenza della bassa marea e, viceversa, verso mare quando la marea cresce. Chiaramente la dinamica del cuneo salino è di cruciale importanza per la qualità delle acque di uso sia acquedottistico sia agricolo.

6.6.6 Estuari parzialmente mescolati

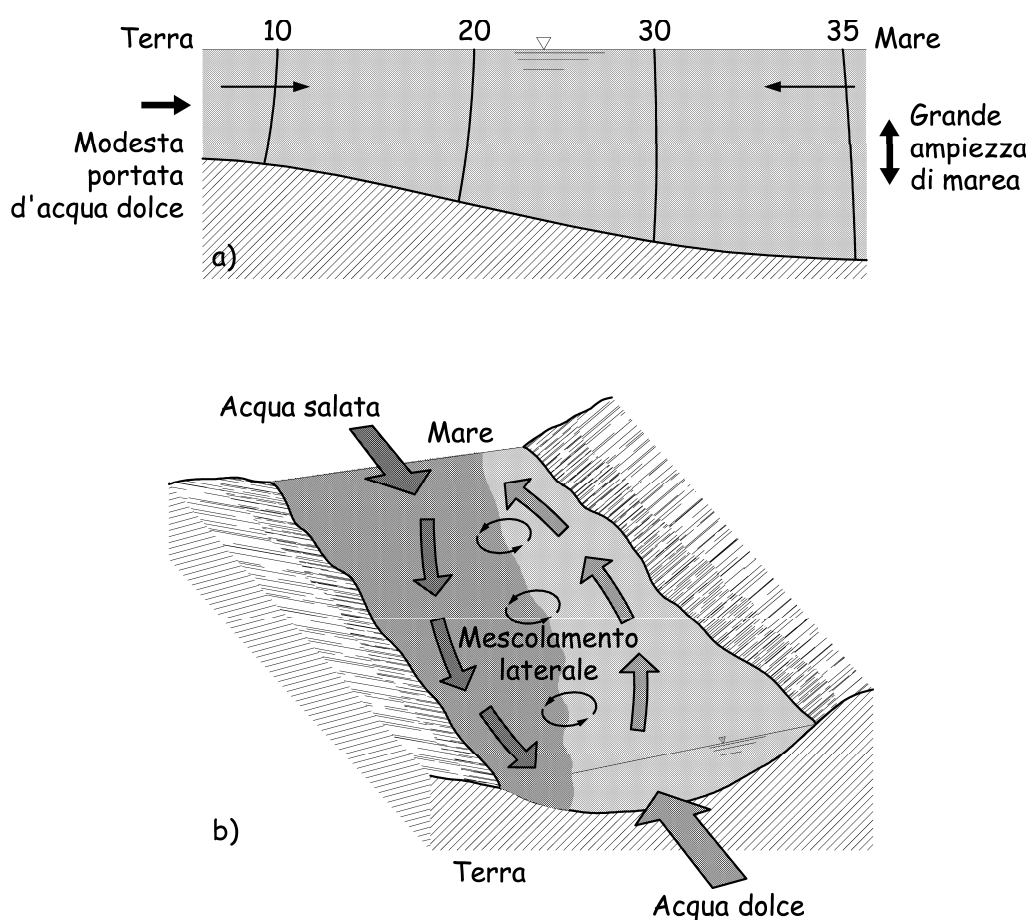


Figura 6.24: Schema di un estuario parzialmente mescolato e dei processi fisici in esso agenti. a) Andamento della circolazione idrodinamica; b) effetto della accelerazione di coriolis.

In tale tipologia di estuari è l'azione della marea che domina la circolazione, inducendo un forte mescolamento, tale da garantire, sezione per sezione, una distribuzione pressochè uniforme della concentrazione salina. Ovviamente, la concentrazione salina diminuisce progressivamente spostandosi verso l'entroterra. Si tratta, in genere, di estuari molto larghi in cui l'effetto della circolazione indotta dalla rotazione terrestre può essere rilevante. Il comportamento di tali estuari può essere

descritto tramite un modello bidimensionale, mediato sulla verticale, in cui tuttavia la densità varia spazialmente.

6.6.7 Estuari ben mescolati

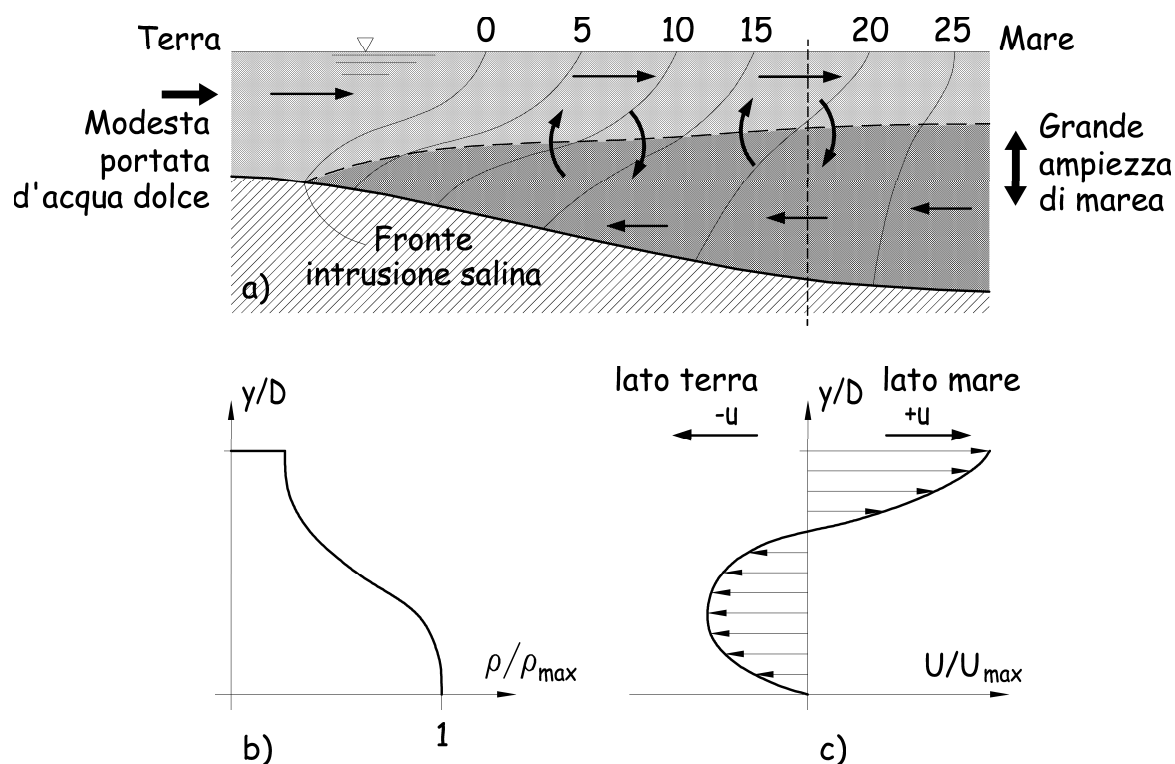


Figura 6.25: Schema di un estuario ben mescolato e dei processi fisici in esso agenti. a) andamento della circolazione e della distribuzione di salinità; b) profilo verticale della salinità; c) profilo verticale della velocità.

In tale tipologia di estuari l'ampiezza dell'onda di marea non è tale da provocare un mescolamento completo lungo la verticale (e.g., il Tamigi). Si distinguono ancora due strati caratterizzati da un diverso valore della densità media. Al variare della portata d'acqua dolce il grado di stratificazione può variare sensibilmente.

Capitolo 7

Dinamica dei nutrienti nei laghi

7.1 Generalità

La quantità di nutrienti presenti in un corpo idrico condiziona in modo cruciale la fotosintesi e, quindi, la crescita di alghe flottanti (fitoplancton), alghe che vivono sui fondali (perifite), piante acquatiche radicate al fondo (macrofite).

Le varie specie vegetali possono essere raggruppate secondo le nicchie ecologiche caratteristiche di un ambiente acquatico. In un corpo idrico quale un lago o un bacino artificiale possiamo in particolare distinguere tre zone, ovvero: i) la zona eufotica; ii) la zona afotica e iii) la zona bentica.

La zona eufotica é quella interessata dalla penetrazione della radiazione solare e, quindi, in essa é possibile la fotosintesi. La zona bentica é quella immediatamente a contatto con i sedimenti di fondo. La zona afotica é quella intermedia tra le due sopra descritte ed é caratterizzata dalla assenza di processi di fotosintesi data la mancanza di luce.

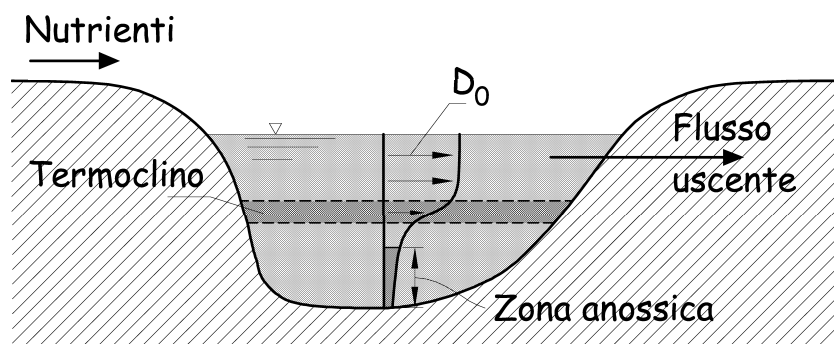


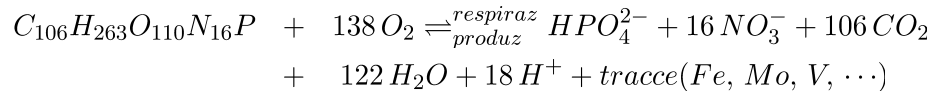
Figura 7.1: Esempio di bacino soggetto a stratificazione termica.

Una eccessiva immissione di nutrienti all'interno di un corpo idrico ha rilevanti conseguenze sulla dinamica della vegetazione e, conseguentemente, sulla qualità delle acque. Un eccesso di nutrienti (eutrofia), infatti, favorisce le fioriture algali, con conseguente alterazione del colore dell'acqua, diminuzione della sua trasparenza, eccessivo residuo, problemi di gusto e odore dell'acqua. I processi biochimici legati alla sedimentazione e decomposizione delle alghe morte, d'altra parte, determinano

una diminuzione dell'ossigeno disciolto, con pericolo di anossia e conseguente moria delle specie ittiche.

7.1.1 Nutriente limitante

I nutrienti che concorrono alla crescita della biomassa algale possono derivare sia da sorgenti puntuali (e.g., impianti di trattamento acque reflue) sia da sorgenti diffuse (e.g. dilavamento di suoli agricoli e pavimentazioni stradali). Essi possono essere classificati in **Macro-nutrienti** (CO_2 , P , N , Mg , K , Ca) e **Micro-nutrienti** (Fe , Zn , Mo , Co , Mn , B , Cl , Cu , Na , V). Al fine di valutare il nutriente limitante (ovvero quello che condiziona il tasso di crescita algale) consideriamo bilancio stechiometrico tra la produzione primaria, dovuta alla fotosintesi, e la respirazione del **protoplasma algale**:



Tale bilancio mostra come, nel protoplasma algale, il rapporto tra fosforo e azoto é $1/16$:

$$\frac{P}{N} = \frac{1}{16}$$

Ricordando la relazione del tasso di crescita μ di una cinetica del tipo Michaelis-Menton (cfr. Figura 7.2)

$$\mu = \frac{\mu_m S}{r_m + S}$$

con μ_m tasso di crescita massimo e r_m costante di mezza saturazione, assumiamo che la concentrazione del substrato S coincida con la **concentrazione dei nutrienti**.

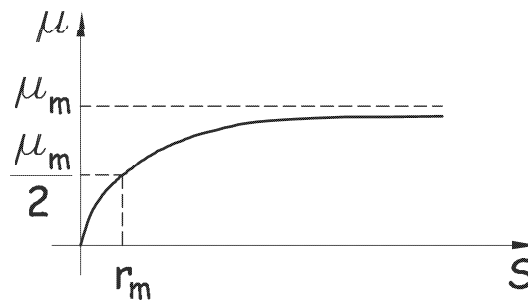


Figura 7.2: Definizione della costante di mezza saturazione in una cinetica del tipo Michaelis-Menton

Nel caso di **più nutrienti** possiamo determinare il tasso di crescita in analogia con la resistenza elettrica, come somma in serie dell'inverso dei tassi di crescita

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_n}$$

oppure possiamo utilizzare l'algoritmo moltiplicativo di Liebig

$$\mu = \mu_{max} \frac{S_1}{r_m + S_1} \frac{S_2}{r_m + S_2} \cdots \frac{S_n}{r_m + S_n}$$

Nel caso di **acque dolci** il nutriente limitante è il **fosforo** mentre nel caso di **acque salmastre o salate** nutriente limitante è l'**azoto**. Esso è in generale disponibile sotto forma di ammoniaca (è la forma preferita), nitriti e nitrati.

In talune circostanze il nutriente limitante é il **carbonio** che, in generale é disponibile sotto forma di anidride carbonica disciolta, bicarbonati, carbonati.

7.1.2 Il ciclo algale

In un corpo idrico, il ciclo algale può essere schematizzato come illustrato in Figura 7.3

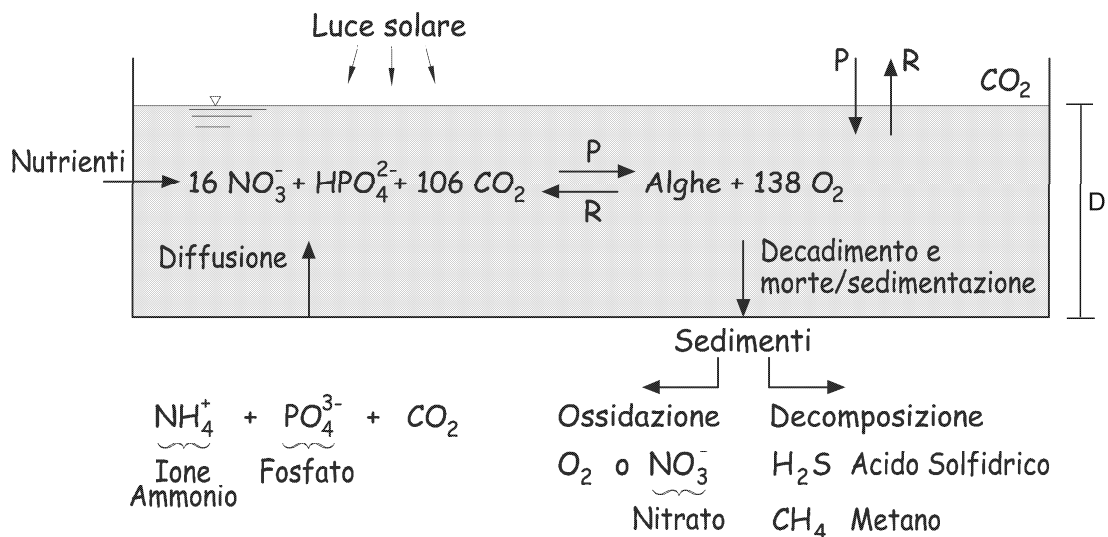


Figura 7.3: Schema del ciclo algale.

Risulta evidente come la **sedimentazione** comporti una rimozione di nutrienti dalla colonna fluida tramite il progressivo deposito sul fondo del corpo idrico delle particelle sospese di natura organica (alghe morte) e inorganica (limi e argille) a cui sono adsorbiti i nutrienti. Il processo di sedimentazione é in generale controllato dalla velocità di sedimentazione w_s , dipendente dal diametro delle particelle sospese nella colonna fluida, dalla profondità della colonna fluida, D . Nel caso in cui il nutriente limitante sia il **fosforo** (acque dolci) dobbiamo così distinguere tra concentrazione **totale** di fosforo, P , e concentrazione di fosforo in forma particellare, P_p (i.e., adsorbito a limi e argille o presente nei resti di alghe, pesci, invertebrati ect.). Il coefficiente di sedimentazione sarà pertanto definito da $r_s = \alpha_p w_s / D$ con $\alpha_p = P_p / P$ coefficiente di partizione.

Diffusione ...

Radiazione solare radiazione corta? ...

7.2 Bilancio del fosforo totale in un corpo idrico

Consideriamo il caso di un corpo idrico in cui il nutriente limitante sia il fosforo. In generale, il fosforo può essere presente in forma organica e inorganica e in forma disciolta o particellare. Nel seguito assumiamo che esso venga rimosso prevalentemente per sedimentazione e che i sedimenti, una volta raggiunto il fondo, non comportino alcun rilascio di fosforo.

Assumendo che il corpo idrico sia ben mescolato e che l'**evaporazione** sia **trascurabile**, il **bilancio globale** (i.e., esteso all'intero lago) del **fosforo totale** porge:

$$V \frac{dP}{dt} = Q_{in} P_{in} - Q_{out} P_{out} - r_s p V$$

dove V è il volume del lago, P è la concentrazione media del fosforo totale, t è il tempo, Q_{in} , Q_{out} sono le portate liquide volumetriche in ingresso e uscita dal lago, P_{in} , P_{out} sono le concentrazioni di fosforo in ingresso ed in uscita e r_s è il coefficiente di sedimentazione ($= \alpha_s w_s / D_0$)

Si noti come un bilancio simile può essere applicato a **qualsiasi nutriente**.

Ricordando le ipotesi di lago ben mescolato ($P_{out} = P$) e di evaporazione trascurabile ($Q_{in} = Q_{out} = Q$), in **condizioni stazionarie** ($dP/dt = 0$) si ha

$$Q P_{in} = Q P + r_s P V \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{in}}{\tau} = \frac{P}{\tau} + r_s P$$

con $\tau = V/Q$, **tempo di residenza**. In definitiva:

$$P = \frac{P_{in}}{1 + r_s \tau}$$

La **frazione di fosforo rimosso** per sedimentazione risulta dunque:

$$R_s = 1 - \frac{P}{P_{in}} = \frac{r_s \tau}{1 + r_s \tau}$$

Per avere indicazioni più dettagliate è necessario ricorrere a **modelli di qualità delle acque** quale quello schematizzato nella Figura 7.4.

7.2.1 Esempio

Il Lago Lyndon, situato nel Texas (USA) ha un volume $V = 1.71 \cdot 10^8 \text{ m}^3$, una profondità media $D_0 = 6.7 \text{ m}$ e un tempo di ricambio idrico $\tau = 80 \text{ gg}$. La portata di fosforo in ingresso è pari a $P_{in} = 72 \text{ } \mu\text{g/l}$. La velocità di sedimentazione delle particelle è stata stimata in $w_s = 0.1 \text{ m/gg}$.

Il coefficiente di partizione, pari a $\alpha = P_p/P = 0.7$, indica che il 70% di fosforo è in forma particellare (i.e., adsorbito a particelle solide) mentre il restante 30% è disciolto (in genere sotto forma di fosfato, PO_4^{3-} , e quindi utilizzabile dal fitoplancton).

$$r_s = \alpha \frac{w_s}{D_0} = 0.0104 \text{ gg}^{-1}, \quad r_s \tau = 0.832 \quad P = \frac{P_{in}}{1 + r_s \tau} = 39 \text{ } \mu\text{g/l}$$

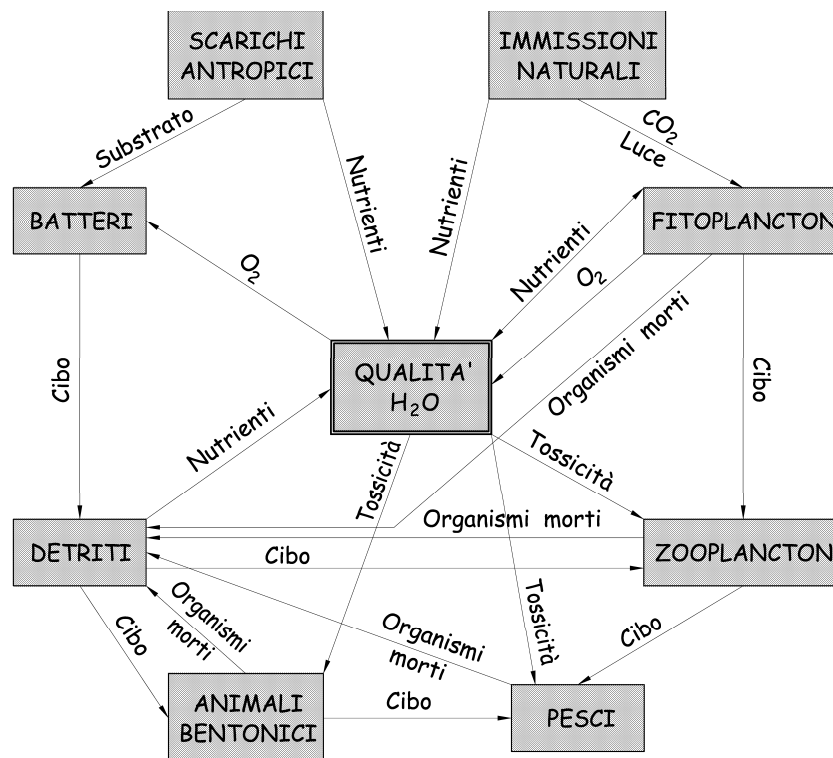


Figura 7.4: Esempio di modello dinamico di qualità delle acque.

$$Q_s = r_s P V = 69 \text{ kg/gg} \quad R_s = 1 - \frac{P}{P_{in}} = \frac{P_s}{P_{in}} = 0.454$$

$$Q P_{in} = \frac{Q_s}{R_s} = 152 \text{ kg/gg}$$

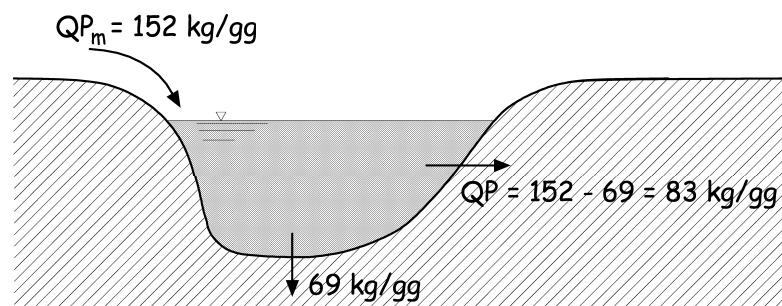


Figura 7.5: Esempio di Bilancio del Fosforo nel Lago Lyndon.

7.3 Grado di eutrofia di un corpo idrico

Il pericolo di eutrofizzazione può essere valutato associando il **carico ammissibile su base annua** per unità di superficie (in $g m^{-2} anno$) alla profondità media del

lago D_0 . L'analisi effettuata da Vollenweider (1970) sulla base dei dati ricavati da una ampia serie di laghi indicano i seguenti limiti per il fosforo e l'azoto:

D_0 (m)	Carico ammissibile ($g\ m^{-2}\ anno$)		Carico dannoso ($g\ m^{-2}\ anno$)	
	N	P	N	P
5	1.0	0.07	2.0	0.13
10	1.5	0.10	3.0	0.20
50	4.0	0.25	8.0	0.50
100	6.0	0.40	12.0	0.80
150	7.5	0.50	15.0	1.00
200	9.0	0.60	18.0	1.20

Lo stato trofico di un lago può essere classificato in funzione della **concentrazione media annua di fosforo totale P** :

- Oligotrofici: $P < 10\ \mu g/l$
- Mesotrofici: $10 < P < 20\ \mu g/l$
- Eutrofici: $P > 20\ \mu g/l$

Un lago **oligotrofico** è **sottonutrito**: la produzione biologica è limitata dalla scarsa disponibilità dei nutrienti. Un lago **eutrofico**, invece, è **supernutrito**.

Secondo L'EPA, tuttavia, la **transizione** tra stato **meso-trofico** e stato **eutrofico** si ha per una concentrazione media annua di $50\ \mu g/l$

Indicata con A la superficie del lago, ricordando che $\tau = Q/V$ e assumendo condizioni di equilibrio per $Q_{in} = Q_{out} = Q$, si ha:

$$Q_{in} P_{in} = Q_A A \quad \Rightarrow \quad P_{in} = \frac{Q_A A}{Q} = \frac{Q_A A}{V} \tau = \frac{Q_A}{D} \tau$$

e, sostituendo nella relazione per il fosforo rimosso

$$R_s = 1 - \frac{P}{P_{in}} = 1 - \frac{P}{\tau \frac{Q_A}{D}} \quad \Rightarrow \quad P = \tau \frac{Q_A}{D} (1 - R_s)$$

Infine, passando ai logaritmi:

$$\log[\tau Q_A (1 - R_s)] = \log D + \log P$$

L'**eccessiva presenza di nutrienti** comporta **i)** una eccessiva crescita algale, **ii)** una ridotta trasparenza dell'acqua, **iii)** alla sedimentazione e decomposizione delle alghe morte. È quindi possibile utilizzare i seguenti indicatori di eutrofizzazione:

- Fioritura dei cianobatteri (alghe blu-verdi)
- Scomparsa di invertebrati dal fondo
- Scomparsa di certe tipologie ittiche
- Problemi di odore e gusto

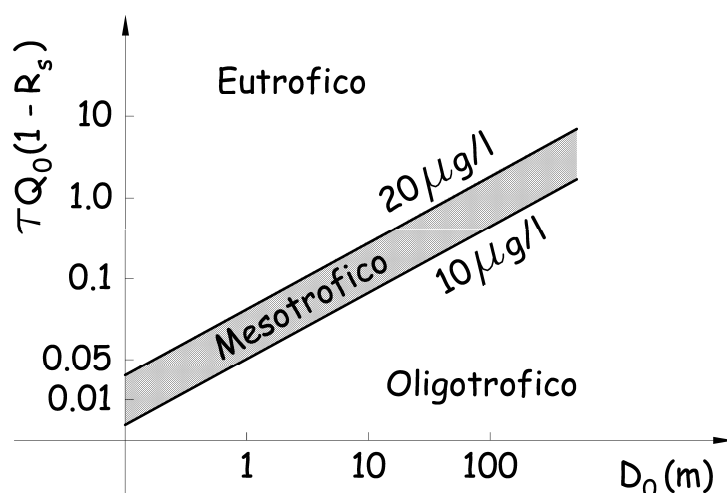


Figura 7.6: Diagramma per la classificazione del grado di eutrofia di un lago. Q_A : portata areale di fosforo immessa nel lago; τ : tempo di residenza idraulica; R_s : frazione di fosforo rimosso per sedimentazione; D_0 profondità media del lago.

- Concentrazione di clorofilla-a ($> 10 \mu g/l$)
- Richiesta di ossigeno dei sedimenti di fondo

In particolare, la classificazione dello **stato trofico** in funzione della **richiesta di ossigeno dei sedimenti** di fondo, in $mmol m^{-2} gg^{-1}$, risulta

Tipologia	Hutchinson	Mortimer
Oligotrofico	< -5.3	< -7.7
Mesotrofico	da -10.3 a -10.3	da -17.2 a -7.7
Eutrofico	> -10.3	> -17.2

Considerando invece i **contenuti di clorofilla**, di **ossigeno**, e la **trasparenza** (misurata con il disco Secchi), si ha la seguente classificazione.

stato trofico	Clorofilla (mg/m^3)	O_2 %sat.	O_2 %sat.	Trasp. (m)	Trasp. (m)
	OCSE	EPA	OCSE	OCSE	EPA
ultraoligotrofico	1	-	4	6	-
oligotrofico	2.5	80	10	3	3.7
mesotrofico	8	10	35	1.5	2
eutrofico	25	< 10	100	0.7	< 2
ipereutrofico	> 25	-	> 100	< 0.7	-

Infine, è possibile effettuare una classificazione (Marchetti, 1993) sulla base delle **specie vegetali** presenti.

Parametri	Ambienti ologotrofici	Ambienti eutrofici
Diversità di specie	alta	bassa
Gruppi dominanti	Diatomee e Cloroficee	Cianoficee e Cloroficee
Produzione primaria	bassa	alta
Frequenza fioriture	bassa	alta
Posizione fitoplancton	tutta la colonna	superficie

7.4 Il campo idrodinamico di un lago

Il campo di moto all'interno di un lago è controllato dalla distribuzione verticale della densità dell'acqua. La **radiazione solare**, infatti, può determinare una **stratificazione termica** e, in condizioni di quiete, le linee di uguale temperatura (**isoterme**) tendono a disporsi **orizzontalmente** (Figura 7.7).

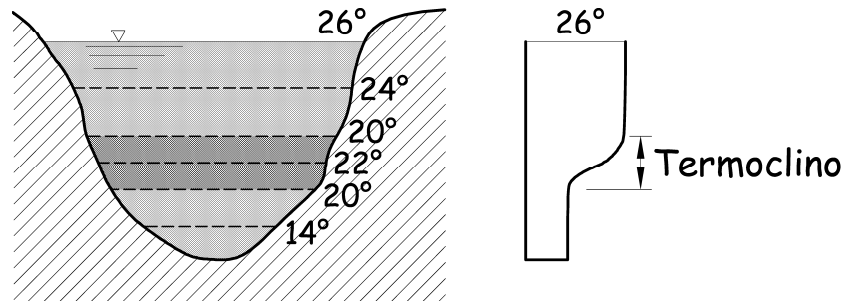


Figura 7.7: Esempio di stratificazione termica in un lago.

La presenza di una stratificazione termica, associata all'azione forzante del vento o di flussi di portata entrati/uscenti, consente la formazione di **onde interne**.

Mentre le onde superficiali di piccola ampiezza hanno una celerità di propagazione $c = \sqrt{g D_0}$, e il parametro adimensionale che ne caratterizza il comportamento è il **numero di Froude**, $F_r = U/\sqrt{g D_0}$, le **onde interne** sono condizionate dalla **gravità ridotta** $g' = g \Delta\rho/\rho_0$, dove $\Delta\rho$ è la differenza di densità dovuta alla stratificazione termica e ρ_0 è la densità media della colonna fluida. La **celerità di propagazione di onde interne** di piccola ampiezza risulta quindi $c = \sqrt{g' D_0}$, mentre il **numero di Froude interno** (o densimetrico) risulta $F_{ri} = U/\sqrt{g' D_0}$.

Se $F_{ri} < 1$, le onde interne comportano una oscillazione della stratificazione che, però, si mantiene stabile. Se invece $F_{ri} > 1$, le onde interne tendono a distruggere la stratificazione e il lago diventa ben mescolato.

7.4.1 Stabilità statica

Consideriamo un **fluido stratificato in quiete**, in cui le **isoterme** sono ovviamente **orizzontali**. Indicata con ρ_0 la densità media sulla verticale, il **profilo di densità** risulta

$$\rho(z) = \rho_0 + \rho'(z) = \rho_0 - \rho_0 \int_0^z \epsilon_\rho(z) dz, \quad \epsilon_\rho(z) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho'}{dz}$$

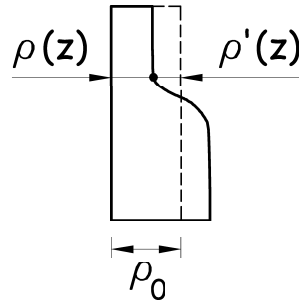


Figura 7.8: Andamento del profilo verticale della densità nel caso di un fluido stratificato.

Se il fluido stratificato è in moto, il profilo di densità si modifica (i.e., le isoterme non sono più orizzontali). Nel caso di moto piano avremo:

$$\rho(x, z, t) = \rho_0 + \rho'(z) + \hat{\rho}(x, z, t)$$

dove il termine $\hat{\rho}(x, z, t)$ è associato alla struttura del campo di moto

L'effetto della stratificazione è duplice: i gradienti di densità riducono l'azione della gravità (**gravità ridotta**); la stratificazione ha un **effetto stabilizzante** in quanto inibisce le oscillazioni in direzione verticale.

L'effetto della **gravità ridotta** è messo in conto tramite l'ipotesi di Boussinesq. Essa comporta che le **differenze di densità** influenzino unicamente il termine gravitazionale nell'equazione della quantità di moto mentre possono **essere trascurate nei termini di inerzia**.

Infatti, sostituendo le decomposizioni $\rho = \rho_0 + \rho'$ e $\rho = \rho_0 + \rho' + \hat{\rho}$ nell'equazione di Eulero

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

in condizioni di quiete e di moto si ottiene, rispettivamente:

$$\nabla p_0 = (\rho_0 + \frac{\rho'}{\rho_0}) \vec{g}, \quad \rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \right) \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

Posto $\hat{p} = p - p_0$, avremo quindi

$$\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \right) \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla \hat{p} + \hat{\rho} \vec{g}$$

e, osservando che di norma $\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$ e $\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \ll 1$ si ottiene infine

$$\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla \hat{p} + \hat{\rho} \vec{g}$$

Tale equazione afferma che il moto in un fluido stratificato (quale quello che si realizza nei laghi, negli oceani e negli strati inferiori dell'atmosfera) in genere costituisce una **lieve modifica dello stato di equilibrio idrostatico**.

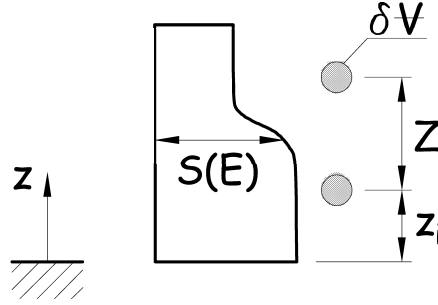


Figura 7.9: Meccanismo che presiede la formazione di onde interne in un fluido stratificato.

L'effetto stabilizzante della stratificazione comporta la formazione di **onde interne**. Supponiamo che, in presenza di un gradiente di densità, una particella di volume δV , inizialmente posta alla quota z e, quindi, caratterizzata dalla densità $\rho(z_i)$, subisca un innalzamento di quota Z .

Come illustrato in Figura 7.9 Ovviamente la particella si troverà ad avere una **densità maggiore** rispetto al fluido circostante. L'ordine di grandezza della **differenza di densità** è:

$$\epsilon_\rho \rho_0 Z$$

Ne consegue un **forza di massa** che tende a riportare la particella **verso la posizione originaria** pari a

$$\epsilon_\rho \rho_0 Z g \delta V$$

La stratificazione tende quindi ad avere un **effetto stabilizzante** rispetto alle oscillazioni verticali. Supponendo di poter trattare il fluido come perfetto e incompressibile, introducendo l'ipotesi di Boussinesq, ovvero che le differenze di densità influenzano unicamente il termine gravitazionale e, assumendo che le particelle liquide si muovano unicamente nella direzione verticale ($\vec{u} = (0, 0, w)$), l'equazione del moto della particella fluida risulta:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + N^2 Z = 0$$

dove N definisce la **frequenza di galleggiamento** (o di Brunt Vaisala):

$$N = \sqrt{\epsilon_\rho g} = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}}$$

Infatti, dall'ipotesi di **fluido incompressibile**:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Ma:

$$\rho(z) = \rho_0 + \rho'(z) + \hat{\rho}(x, z, t) \Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -w \left(\frac{d\rho'}{dz} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right)$$

Osservando che $w = dZ/dt$ e integrando rispetto al tempo si ha:

$$\hat{\rho} = -Z \frac{d\rho'}{dz} - \int \left(\frac{dZ}{dt} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right) dt$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione di Eulero in direzione verticale che, scritta utilizzando l'ipotesi di Boussinesq, porge

$$\rho_0 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \hat{\rho} g$$

si ottiene

$$\rho_0 \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + g Z \frac{d\rho'}{dz} + g \int \left(\frac{dZ}{dt} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right) dt$$

e, riordinando,

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho'}{dz} Z = \frac{1}{\rho_0} \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + g \int \left(\frac{dZ}{dt} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right) dt \right]$$

Trascurando i termini a secondo membro si ottiene infine **l'equazione di un oscillatore armonico**

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + N^2 Z = 0, \quad (4.1)$$

con frequenza pari a N ,

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho'}{dz} \quad (4.2)$$

e soluzione generale pari a

$$Z = Z_1 \cos(N t) + Z_2 \sin(N t) \quad (4.3)$$

La presenza di un gradiente di densità comporta che in una particella fluida **il baricentro non coincide con il centro di massa**. Ne consegue che, in genere, le superfici a densità costante non coincidono con quelle a pressione costante.

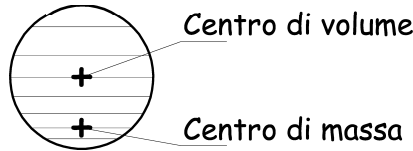


Figura 7.10: Localizzazione del centro di massa e del baricentro in una particella di un fluido stratificato.

Se alla particella fluida viene imposta una rotazione essa **tenderà a ruotare**.

Indicato con θ l'angolo di rotazione della particella si può dimostrare che esso obbedisce all'equazione armonica

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + N^2 \theta = 0, \quad (4.4)$$

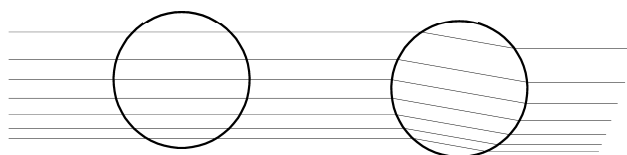


Figura 7.11: Distorsione delle linee di uguale densità per effetto della rotazione di una particella di un fluido stratificato.

Le particelle di un **fluido stratificato**, se spostate dalla loro posizione di equilibrio danno luogo a **traslazioni** e **rotazioni** tipiche di un **moto armonico semplice**. Le oscillazioni di Z e θ possono combinarsi tra di loro dando origine a **onde interne**.

Le circolazioni che si realizzano in un fluido stratificato per effetto della presenza di onde interne vengono dette **barocliniche**. Vengono invece dette **barotropiche** le circolazioni che si realizzano in un fluido omogeneo per effetto, ad esempio, della **marea** o della **forza di Coriolis**.

7.4.2 Esempi di moti baroclinici

La Figura 7.12 descrive la soluzione dell'equazione (4.1) per un fluido stratificato infinitamente esteso, per il quale $c_1 = \dots$ e $c_2 = \dots$.

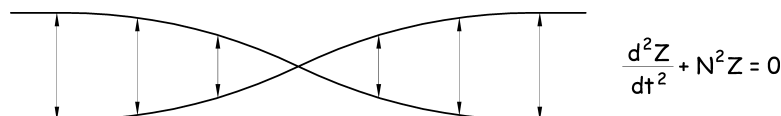


Figura 7.12: Oscillazioni piane in un fluido stratificato, infinitamente esteso

Nel caso di un fluido stratificato delimitato da pareti laterali la soluzione della (4.1) è illustrata nella Figura 7.13. In tal caso $c_1 = \dots$ e $c_2 = \dots$.

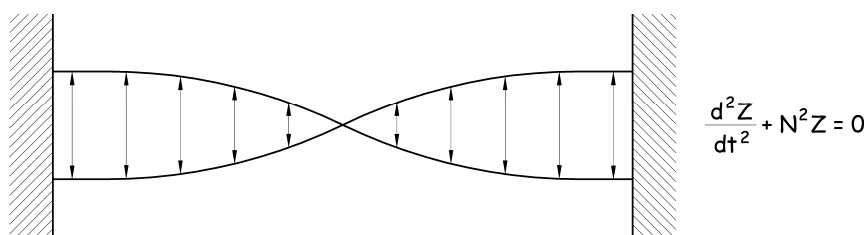


Figura 7.13: Oscillazione piane in un fluido (perfetto) stratificato, delimitato da pareti laterali

Infine, la Figura 7.14 illustra le oscillazioni in un fluido stratificato contenuto in un lago rettangolare infinitamente lungo. In tal caso integrando lungo x e lungo z l'equazione di continuità per un moto piano

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

si ottiene

$$u = w \frac{L_0}{D_0} = \frac{dZ}{dt} \frac{L_0}{D_0} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{d^2 Z}{dt^2} \frac{L_0}{D_0}$$

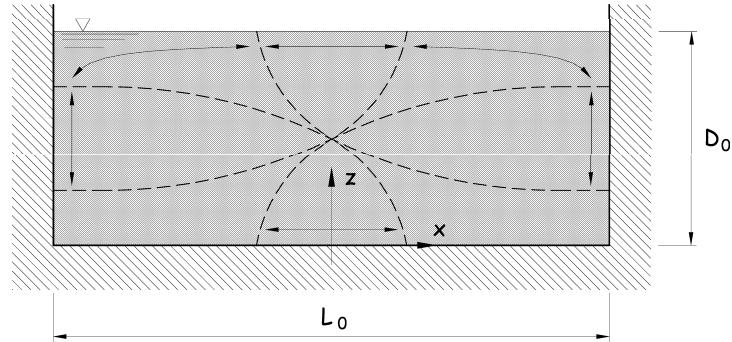


Figura 7.14: Oscillazioni in un fluido stratificato contenuto in un lago di sezione rettangolare e infinitamente lungo.

D'altra parte, l'equazione di Eulero in direzione orizzontale, scritta introducendo l'approssimazione di Boussinesq, porge

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \hat{\rho} g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Integrando lungo x , per una fissata quota h (per cui $\partial h / \partial x = 0$) si ottiene

$$\hat{p} = \hat{p}_0 - \rho_0 \int_0^{L_0} \frac{du}{dt} dx = \hat{p}_0 - \rho_0 \int_0^{L_0} \frac{L_0}{D_0} \frac{d^2 Z}{dt^2} dx = \hat{p}_0 - \rho_0 \frac{L_0^2}{D_0} \frac{d^2 Z}{dt^2}$$

Ne consegue un gradiente verticale di pressione medio pari a:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -\rho_0 \left(\frac{L_0}{D_0} \right)^2 \frac{d^2 Z}{dt^2}$$

Ricordando l'equazione di Eulero in direzione verticale,

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho'}{dz} Z = \frac{1}{\rho_0} \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + g \int \left(\frac{dZ}{dt} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right) dt \right] \quad (4.6)$$

ed osservando che $\partial \hat{\rho} / \partial z \ll d\rho' / dz$ si ottiene infine:

$$\left(1 + \frac{L_0^2}{D_0^2} \right) \frac{d^2 Z}{dt^2} + N^2 Z = 0$$

ovvero un **moto armonico** con **frequenza** ω

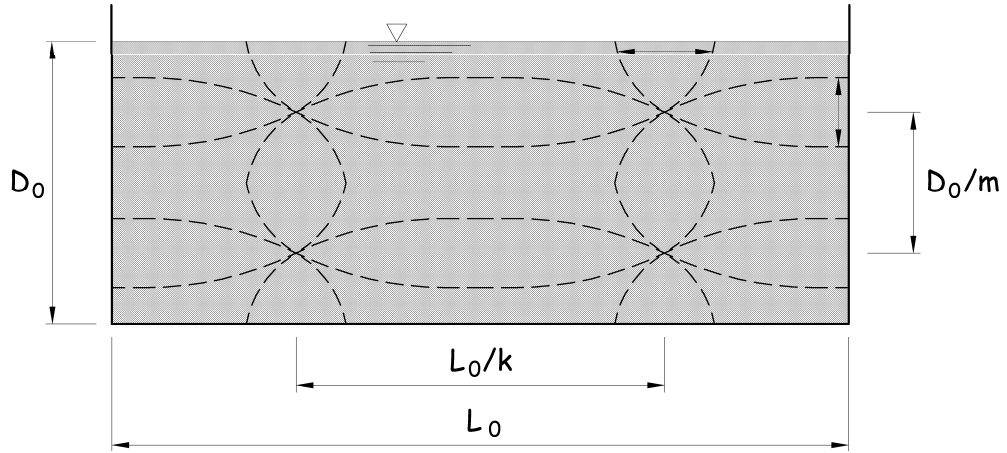
$$\omega = \frac{N}{\sqrt{1 + L_0^2 / D_0^2}}$$

La **frequenza** di oscillazione dell'onda stazionaria dipende quindi i) dalla stratificazione e ii) dalla geometria del lago. È immediato osservare che

$$\lim_{D_0 \rightarrow \infty} \omega = N$$

Evidentemente, nel caso più generale, il lago può essere suddiviso in $k \times m$ celle nelle quali si realizzano delle oscillazioni armoniche con frequenza

$$\omega = \frac{N}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2} \frac{L_0^2}{D_0^2}}} \quad (4.7)$$



Nel caso in cui, come molto spesso accade, si crei una stratificazione caratterizzata essenzialmente da due strati (i.e., epilimnio e ipolimnio, separati da un termocline ben localizzato) $m = 2$ e la frequenza ω delle sesse interne diventa:

$$\omega = \frac{N}{\sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \frac{L_0^2}{D_0(D_0 - d)}}} \quad (4.8)$$

e, nell'ipotesi, usualmente verificata, che $L_0/D_0 \gg 1$,

$$\omega = N \frac{k}{2L_0} \sqrt{D_0(D_0 - d)} \quad (4.9)$$

7.5 Scelta del modello idrodinamico

La scelta del modello idrodinamico con cui descrivere le circolazioni all'interno di un lago è dunque in generale associata alla presenza o meno di una stratificazione e alla geometria del lago. Il parametro adimensionale che consente di caratterizzare il grado di stratificazione di un lago è il **numero di Froude densimetrico**, definito come il rapporto tra forze di inerzia ($\propto \rho_0 V du/dt$) e le **forze di galleggiamento** associate alla gravità ridotta ($\propto \rho_0 V U_0/T_0$). Queste ultime sono associate alla presenza di una stratificazione e **tendono a smorzare** le **perturbazioni** indotte dalle azioni **inerziali**, mantenendo così la stratificazione. Osservando che il periodo delle oscillazioni interne risulta $T_0 \propto N^{-1}$ con

$$N = \sqrt{-g \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho'}{dz}}$$

frequenza di galleggiamento (o di Brunt-Vaisala), avremo:

$$F'_r = \frac{\rho_0 V U_0^2 / D_0}{\rho V U_0 N} = \frac{U_0}{N D_0}$$

Osservando che:

$$N \simeq \sqrt{-g \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{D_0}}$$

si ottiene infine il **numero di Froude densimetrico**:

$$F'_r = \frac{U_0}{\sqrt{g D_0 \Delta\rho / \rho_0}} = \frac{U_0}{\sqrt{g' D_0}}$$

Nel caso di **Lago ben mescolato** le forze di inerzia prevalgono su quelle di galleggiamento e quindi $F'_r > 1$. Nel caso di **Lago fortemente stratificato** sono invece le forze di inerzia a prevalere su quelle di galleggiamento, per cui $F'_r \ll 1$.

Le oscillazioni interne si mantengono anche quando la **forzante esterna** cessa di agire. Tali oscillazioni si esauriscono in un certo intervallo di tempo in seguito a dissipazioni viscosi, diffusione di energia per trasferimento di quantità di moto e diffusione termica. Il parametro adimensionale che tiene conto del decadimento per effetto del trasferimento di quantità di moto è il **numero di Grashof** definito come il rapporto tra il tempo scala della diffusione della quantità di moto e il tempo scala delle oscillazioni, ovvero

$$G_r = \left(\frac{D_0^2 / \nu}{N^{-1}} \right) = N^2 \frac{D_0^4}{\nu^2}$$

Nel caso in cui $G_r > 1$ le onde interne tenderanno a decadere lentamente mentre quando $G_r < 1$ le onde interne tendono a decadere rapidamente.

Il parametro adimensionale che tiene conto della diffusione termica è il **numero di Prandtl**, $P_r = \nu / \kappa$, definito come rapporto tra diffusione della quantità di moto e diffusione termica. Nel caso in cui $P_r > 1$ la quantità di moto diffonde più rapidamente del calore e, quindi, la stratificazione tende a mantenersi. Viceversa, se $P_r < 1$ il calore diffonde più rapidamente della quantità di moto, la temperatura tende a diventare costante, eliminando così la stratificazione.

7.5.1 Forzanti esterne

Il **grado di stratificazione** di un lago, ovvero il grado di omogeneità di parametri quali temperatura, salinità, ossigeno disciolto, nutrienti, dipende dalle condizioni meteorologiche, dai flussi entranti/uscenti e dall'effetto dell'accelerazione di Coriolis.

Le condizioni meteorologiche controllano gli scambi termici (i.e., la radiazione solare, il trasferimento di calore e l'evaporazione) e il trasferimento di energia

meccanica dovuto al vento. L'azione dinamica del vento tende a distruggere la stratificazione. Le correlazioni fatte su dati empirici di velocità del vento U_w indicano che la stratificazione tende a mantenersi se (Bloss e Harleman, 1979):

$$U_w < 2 \cdot 10^3 \left(d \frac{D_0}{L_0} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)$$

Il **parametro adimensionale** che misura la stabilità dell'epilimnio soggetto all'azione del vento è il **numero di Richardson di gradiente** che, indicata con U la componente orizzontale della velocità, è definito come il rapporto tra forze di galleggiamento e forze di mescolamento:

$$R_i = \frac{g \frac{d\rho}{dz}}{\rho_0 \left(\frac{dU}{dz} \right)^2}$$

Le analisi di stabilità di un fluido stratificato non viscoso indicano che la stratificazione è instabile quando $R_i > 1/4$, mentre risulta stabile se $R_i < 1/4$.

In fine, l'**accelerazione di Coriolis**, dovuta alla rotazione terrestre provoca delle circolazioni secondarie che diventano rilevanti nel caso di **laghi di grandi estensioni**. Il parametro adimensionale che tiene conto di tale fenomeno è il **numero di Rossby** che, indicato con Ω la frequenza di rotazione dovuta all'accelerazione di Coriolis (funzione della latitudine ϕ secondo la relazione $\Omega = \Omega_0 \sin \phi$, con $\Omega_0 \simeq 1g g^{-1}$, è così definito come rapporto tra il tempo scala della rotazione terrestre e tempo scala avvevativo:

$$R_0 = \frac{U_0}{L_0 \Omega}$$

Gli effetti della rotazione terrestre risultano trascurabili (ovvero avvengono su una scala temporale molto maggiore di L_0) se $R_0 \gg 1$. Viceversa, se $R_0 < 1$, l'influenza della rotazione sul campo di moto non è trascurabile.

D'altra parte nel caso di moti periodici il tempo scala onde superficiali risulta $T_0 = L_0 / \sqrt{g D_0}$ mentre il tempo scala delle onde interne è pari a $T_0 = \omega^{-1} = \frac{\sqrt{1+m^2 L_0^2 / (k^2 D_0^2)}}{N}$. Nel caso delle onde lunghe superficiali il moto risulta influenzato dalla rotazione terrestre se $(\sqrt{g D_0} / (L_0 \Omega)) = R_0 / F_r < 1$ mentre nel caso delle onde interne, ciò avviene se $\omega / \Omega < 1$.

I **flussi entranti** entranti in un lago possono determinare una **intrusione profonda** o **superficiale** in relazione al rapporto tra la densità dell'acqua in ingresso e quella del lago. Nel caso in cui l'acqua di un immissario sia più densa di quella del lago perché più fredda o contenente sedimenti o maggiormente salina, si ha una **intrusione profonda**. Si ha invece **intrusione superficiale** nel caso in cui l'acqua immessa sia meno densa perché, ad esempio, più calda (e.g., acqua scaricata da centrali termoelettriche).

7.6 Compartimentalizzazione

Tale approccio prevede di suddividere il campo fluido in vari compartimenti ciascuno dei quali ben mescolato. In questo modo è possibile ridurre le equazioni differenziali

alle derivate parziali che reggono il fenomeno a equazioni differenziali ordinarie, essendo l'unica variabile il tempo. Consideriamo l'**equazione del bilancio di massa** del soluto, assumendo che esso sia soggetto ad una **reazione** chimica (o biologica) modellabile con una cinetica del **primo ordine**:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} C) = \mathcal{D} \nabla^2 C + \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \nabla C) - r C$$

Ricordando che i flussi di massa avvettivo e turbolento sono definiti come:

$$\vec{q} = \vec{U} C \quad \vec{q}^T = -\vec{E} \cdot \nabla C$$

e trascurando la diffusione molecolare a fronte di quella turbolenta possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = -\nabla \cdot \vec{q}^T - r C$$

Integrando sul volume e utilizzando l'ipotesi di compartimento ben mescolato (i.e. C costante al suo interno) si ottiene:

$$V_j \frac{dC_j}{dt} + \int_{V_j} \nabla \cdot (\vec{q} + \vec{q}^T) dV = -V_j r_j C_j$$

D'altra parte, indicati con $\vec{n}$ la normale esterna e N_j il numero di **compartimenti adiacenti** al j -esimo, in base al teorema della divergenza:

$$\int_{V_j} \nabla \cdot (\vec{q} + \vec{q}^T) dV = \int_{S_j} (\vec{q} + \vec{q}^T) \cdot \vec{n} dS = \underbrace{\sum_{i=1}^N (Q_{ji} + Q_{ji}^T) C_j}_{\text{in}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N (Q_{ij} + Q_{ij}^T) C_i}_{\text{out}}$$

Si ricava così l'equazione differenziale ordinaria:

$$V_j \frac{dC_j}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ij} C_i + \sum_{i=1}^N Q_{ij}^T C_i - \sum_{i=1}^N Q_{ji} C_j + \sum_{i=1}^N Q_{ji}^T C_j - r V_j C_j$$

Pertanto, indicato con M il **numero dei compartimenti** si ottengono M **equazioni differenziali ordinarie** nelle M incognite C_j . Q_{ij}^T, Q_{ji}^T sono i flussi di massa turbolenti entranti ed uscenti. Tali flussi, essendo integrati spazialmente danno luogo delle **portate di massa dispersive** che possono essere espresse introducendo dei **coefficienti di dispersione globali** definiti come:

$$K_{ij} = \frac{Q_{ij}^T}{A_{ij}} l_{ij} \quad K_{ij} = K_{ji}$$

essendo l_{ij} la **distanza tra i centri di volume** dei compartimenti i e j . Ne consegue che:

$$\sum_{i=1}^N (Q_{ij}^T C_i - Q_{ji}^T C_j) = \sum_{i=1}^N K_{ij} (C_i - C_j) \frac{A_{ij}}{l_{ij}}$$

I coefficienti di dispersione globali dipendono dalle dimensioni dei compartimenti e possono essere determinati utilizzando il **metodo di McEwen** o il **metodo del bilancio termico**.

Il metodo di McEwen è basato sull'**interpolazione** con una **funzione esponenziale** dei dati di **temperatura media** nel termocline e nell'epilimnio. Il **metodo del bilancio termico** consente di determinare i coefficienti di dispersione verticali $K_z(x, t)$. Esso si basa sull'ipotesi che **calore e soluto diffondano con la stessa velocità**, ovvero $E = k_c$.

7.6.1 Analogia tra trasporto di massa, di quantità di moto e di calore

Consideriamo l'equazione della **diffusione turbolenta**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla C = \mathcal{D} \nabla^2 C + \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \nabla C)$$

le equazioni di **Reynolds**

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = \nu \nabla^2 \vec{U} + \nabla \cdot (\vec{\nu}^T \cdot \nabla \vec{U}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h$$

e l'**equazione del calore** per un campo di **moto turbolento**, scritta nell'ipotesi di poter **trascurare** gli effetti di **comprimibilità del fluido** e, quindi, di poter disaccoppiare il problema termico da quello meccanico:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \Theta = \frac{\kappa}{\rho c_p} \nabla^2 \Theta + \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (\vec{\kappa}^T \cdot \nabla \Theta) -$$

dove κ e $\vec{\kappa}^T$ sono, rispettivamente, il **coefficiente di diffusività termica** e il **tensore di diffusività termica turbolenta**, mentre c_p è il calore specifico a pressione costante. È evidente che tali equazioni sono formalmente simili e, quindi, esiste una similitudine tra le seguenti quantità:

quantità	regime laminare	regime turbolento
massa	$\mathcal{D}$	E_{ij}
quantità di moto	ν	ν_{ij}^T
Calore	κ	κ_{ij}^T

essendo inoltre:

$$E_{ij} \gg \mathcal{D}, \quad \nu_{ij}^T \gg \nu, \quad \kappa_{ij}^T \gg \kappa$$

Esiste dunque una analogia tra il **flusso di quantità di moto** (laminare o turbolento)

$$\vec{q}_{\rho U} = -\nu \nabla \vec{U} \qquad \vec{q}_{\rho U}^T = -\vec{\nu}^T \cdot \nabla \vec{U}$$

il **flusso di massa** (laminare o turbolento)

$$\vec{q}_m = -\mathcal{D} \nabla C \qquad \vec{q}_m^T = -\vec{E} \cdot \nabla C$$

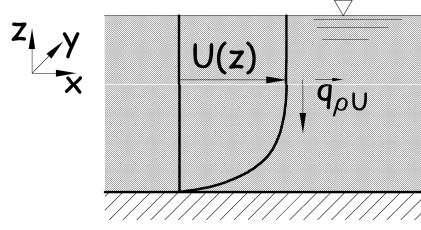


Figura 7.15: Andamento del profilo verticale di velocità e relativi flussi di quantità di moto.

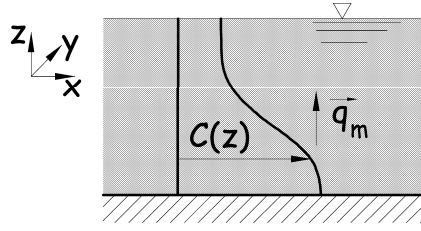


Figura 7.16: Andamento del profilo verticale di densità e relativi flussi di quantità di moto.

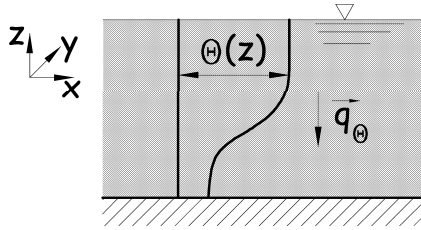


Figura 7.17: Andamento del profilo verticale di temperatura e relativi flussi di calore.

e il **Flusso di calore** (laminare o turbolento)

$$\vec{q}_\Theta = -\rho c_p \kappa \nabla \Theta \quad \vec{q}_\Theta^{II'} = -\rho c_p \vec{\kappa}^{II'} \cdot \nabla \Theta$$

È evidente che assumendo $\kappa_{ij} = E_{ij}$ i **coefficienti globali di dispersione** possono essere determinati utilizzando l'equazione del bilancio termico e, quindi, **misurando profili verticali di temperatura** anziché di concentrazione. Consideriamo dunque un profilo verticale di temperatura relativo ad una determinata **colonna di fluido** (Figura 7.18). Isolata una colonna verticale prismatica di fluido, suddivisa in N strati, considero l'equazione del bilancio termico integrata sul **volume** V_j dell'elemento prismatico j-esimo (Figura 7.19):

$$V_j \frac{d\Theta_j}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ij} \Theta_i - \sum_{i=1}^N Q_{ji} \Theta_j + \sum_{i=1}^N K_{ij} (\Theta_i - \Theta_j) \frac{A_{ij}}{l_{ij}} + \frac{V_j}{\rho c_p} \frac{\Gamma_{j+1,j} - \Gamma_{j,j-1}}{l_{ij}}$$

dove $\Gamma_{j+1,j}$ e $\Gamma_{j,j-1}$ rappresentano i **flussi netti di calore** che attraversano le facce superiore ed inferiore del volume j-esimo.

All'interno del lago il flusso di calore è associato alla **sola radiazione corta**, la sola che penetra all'interno dell'acqua. Indicato con Γ_s il valore di tale flusso in

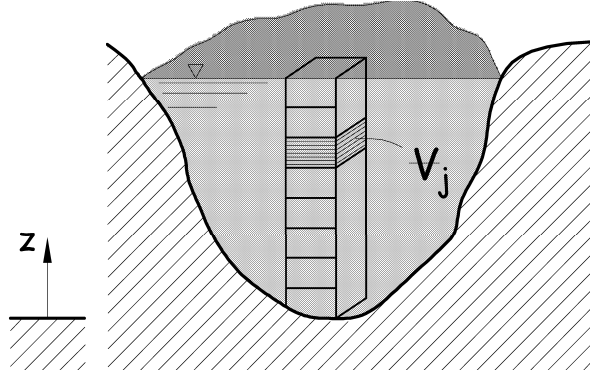


Figura 7.18: Discretizzazione utilizzata per la determinazione dei flussi verticali di calore.

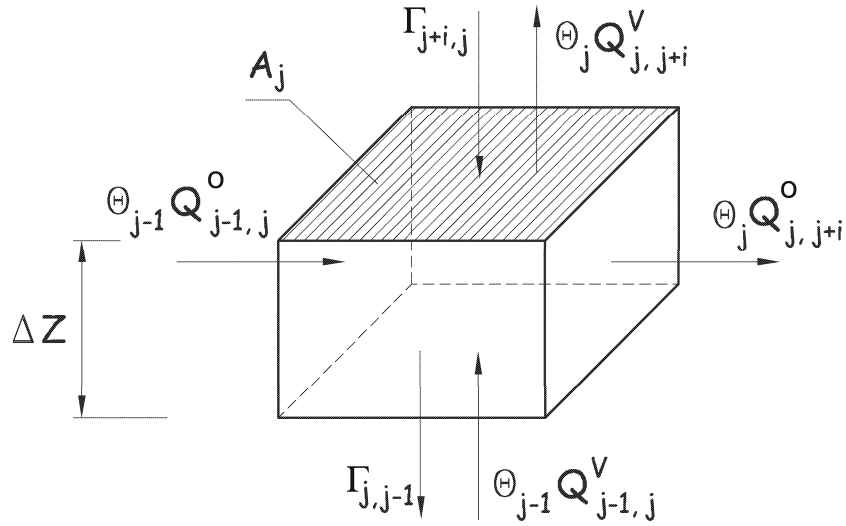


Figura 7.19: Flussi di calore relativi al volume j-esimo.

corrispondenza della superficie del lago (misurabile tramite misure radiometriche), ad una generica quota z esso può essere stimato attraverso la relazione

$$\Gamma(z) = \beta \Gamma_s \exp[-\eta(D_0 - z)]$$

dove $\eta = 0.2 m^{-1}$ nel caso di acque limpide, mentre $\eta = 4.0 m^{-1}$ per acque torbide.

Sulla superficie del lago ($z = D_0$) il flusso netto di calore è il risultato della somma dei flussi associati alla radiazione corta e a quella lunga Γ_s e Γ_a , al flusso riflesso, Γ_b , al flusso dovuto all'evaporazione, Γ_e , e al flusso convettivo, Γ_c :

$$\Gamma(D_0) = \Gamma_s + \Gamma_a - \Gamma_b - \Gamma_e - \Gamma_c$$

Il flusso associato alla **radiazione lunga** (o radiazione atmosferica) può essere espresso come $\Gamma_a = 1.17 \cdot 10^{-18} (\Theta_2 + 273)^6 (1 + 0.17 \beta_{cloud})^2$, dove β_{cloud} è la frazione

di cielo coperta e Θ_2 la temperatura misurata a una quota di 2 m sopra la superficie dell'acqua.

Il flusso riflesso é esprimibile come $\Gamma_b = 1.192 \cdot 10^{-14} (\Theta_0 + 273)^4$, essendo Θ_0 la temperatura sulla superficie libera.

Il flusso associato all'evaporazione fornisce un contributo negativo ed é stimato tramite la relazione $\Gamma_e = 2.23 \cdot 10^{-5} u_w (e_0 - e_2)^4$, dove u_w é la velocità del vento, e_0 ed e_2 sono la pressione di vapore saturo misurate, rispettivamente, sulla superficie dell'acqua e 2 m sopra la superficie stessa.

Infine, anche il flusso convettivo fornisce un contributo negativo che può essere stimato tramite la relazione $\Gamma_c = 1.89 \cdot 10^{-4} \Gamma_e (\Theta_2 - \Theta_0) p_{atm} / (e_0 - e_2)$.

Pertanto, misurato il profilo verticale di temperatura, stimati i flussi di calore all'interno del lago e sulla sua superficie libera, misurati i profili delle componenti di velocità (e.g., utilizzando un ADV) e, quindi, calcolati i flussi volumetrici Q_{ij} che attraversano le pareti orizzontali e verticali dell'elemento di volume j-esimo illustrato in Figura 7.19, si ottengono N **equazioni algebriche** nelle N incognite K_{zj} **??????** **E I** k_x, k_y **????**.

7.6.2 Esempi di compartimentalizzazione

Nel seguito consideriamo il caso di un lago con evaporazione trascurabile ($Q_{in} = Q_{out} = Q$) e volume approssimativamente costante ($dV/dt = 0$). Assumiamo inoltre che la sostanza inquinante di cui si vuole studiare la dinamica sia soggetta ad una reazione del primo ordine.

Il primo esempio trattato é quello del **rilascio accidentale** di un inquinante in cui il lago schematizzato con **singolo compartimento** (Figura 7.20).

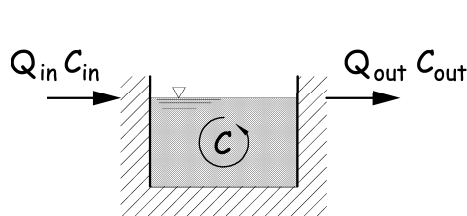


Figura 7.20: Schema del lago e dei flussi entranti/uscenti.

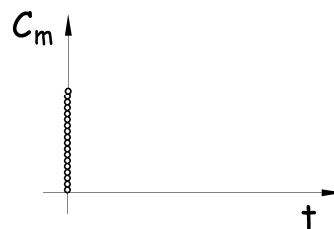


Figura 7.21: Condizioni al contorno per rilascio accidentale di inquinante in un lago schematizzabile come ben mescolato.

Le condizioni iniziali, illustrate in Figura 7.21, comportano che la concentrazione in ingresso C_{in} sia pari a C_0 all'istante iniziale $t = 0$ e identicamente nulla ($C_{in} = 0$) per $t > 0$. Pertanto, per $t > 0$ avremo:

$$V \frac{dC}{dt} = -Q C - r C V$$

Dividendo entrambe i membri per V , ricordando la definizione di tempo di residenza $\tau = V/Q$, separando le variabili e integrando, otteniamo:

$$\ln C = -\left(\frac{1}{\tau} + r\right)t + k$$

La costante di integrazione k si determina imponendo che $C = C_0$ per $t = 0$ e, in definitiva si ottiene:

$$C = C_0 \exp[-(\frac{1}{\tau} + r) t]$$

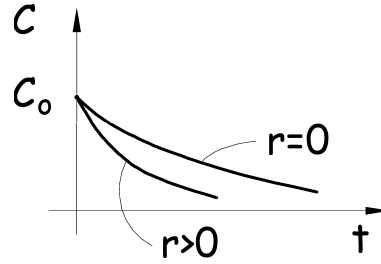


Figura 7.22: Andamento della concentrazione in un lago ben mescolato in cui viene rilasciato accidentalmente una sostanza inquinante caratterizzata da una cinetica del primo ordine.

Il secondo caso é quello dell'**immissione continua** di un inquinante in un lago schematizzabile con un unico compartimento ben mescolato. In tal caso la condizione al contorno comporta una concentrazione in ingresso $C_{in} = C_0$ per $t \geq 0$ (Figura 7.23)



Figura 7.23: Condizioni al contorno per rilascio continuo di inquinante in un lago schematizzabile come ben mescolato.

$$V \frac{dC}{dt} = Q C_0 - Q C - r C V \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{dt} + (\frac{1}{\tau} + r) C = \frac{C_0}{\tau}$$

Come visto nel precedente caso, l'integrale generale, soluzione dell'omogenea porge:

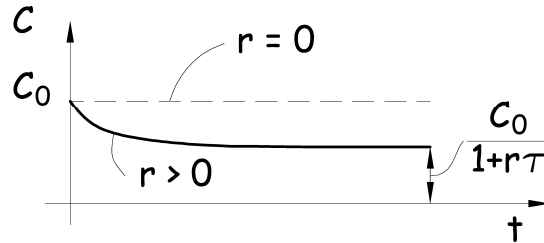
$$C_g = C_0 \exp[-(\frac{1}{\tau} + r) t]$$

D'altra parte, posto $q = C_0/\tau$, $p = (r + 1/\tau)$ e $P = \int p dt = (r + 1/\tau) t$, l'integrale particolare dell'equazione non omogenea risulta:

$$C_p = \exp(-p) \int_0^t q \exp(p) dt = \frac{C_0}{1 + \tau r} \left\{ 1 - \exp[-(r + \frac{1}{\tau}) t] \right\}$$

e, in definitiva:

$$C = C_0 \exp\left[-\left(\frac{1}{\tau} + r\right)t\right] + \frac{C_0}{1 + \tau r} \left\{1 - \exp\left[-\left(r + \frac{1}{\tau}\right)t\right]\right\}$$



• **N compartimenti in serie**

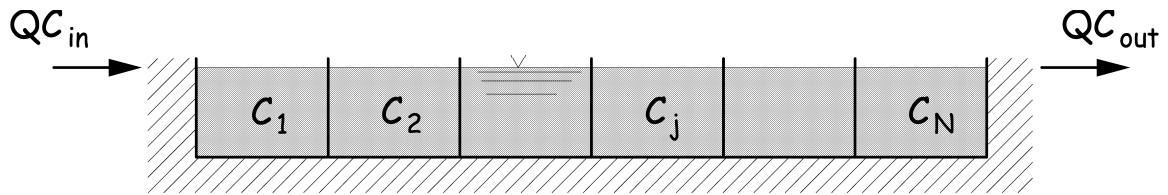
Consideriamo il caso di una immissione istantanea di una massa M per cui:

$$C_{1in} = M/V_1 \quad t = 0$$

$$C_{1in} = 0 \quad t > 0$$

$$C_{jin} = 0 \quad t = 0$$

$$C_{jin} = C_{j-1} \quad t > 0$$



In tal caso avremo che il **volume** relativo al generico compartimento è V/N . Pertanto, indicato con $\tau = V/Q$ il tempo di residenza dell'intero lago e posto $C_0 = M/V$, si ha $M/V_1 = NM/V = N C_0$. Risulta quindi:

- **Compartimento 1** ($C_{1in} = C_0$)

$$C_1 = C_0 \exp\left[-\left(\frac{N}{\tau} + r\right)t\right]$$

- **Compartimento 2**

$$\frac{V}{N} \frac{dC_2}{dt} + \left(Q + r \frac{V}{N}\right) C = Q C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dC_2}{dt} + \left(\frac{N}{\tau} + r\right) C = \frac{N^2}{\tau} C_0 e^{[-(\frac{N}{\tau} + r)t]}$$

per cui, posto $q = (N/\tau)C_0 \exp[-(r + N/\tau)t]$, $p = (r + 1/\tau)$ e $P = \int p dt = (r + 1/\tau)t$, l'integrale particolare dell'equazione non omogenea risulta:

$$C_2 = k \exp(-p) \int_0^t q \exp(p) dt = (k + \frac{N}{\tau} C_0 t) \exp[-(\frac{N}{\tau} + r) t]$$

ed osservando che $C_{2in} = 0$ per $t = 0$

$$C_2 = C_0 N^2 \frac{t}{\tau} \exp[-(\frac{N}{\tau} + r) t]$$

- Compartimento 3

$$\frac{dC_3}{dt} + (\frac{N}{\tau} + r) C = \frac{N^3}{\tau^2} C_0 t e^{[-(\frac{N}{\tau} + r) t]}$$

Posto $q = (N^2/\tau^2)C_0 \exp[-(r+N/\tau)t]$, $p = (r+1/\tau)$ e $P = \int p dt = (r+1/\tau) t$, l'integrale particolare dell'equazione non omogenea risulta:

$$C_3 = k \exp(-p) \int_0^t q \exp(p) dt = (k + \frac{N^3}{2\tau^2} C_0 t^2) \exp[-(\frac{N}{\tau} + r) t]$$

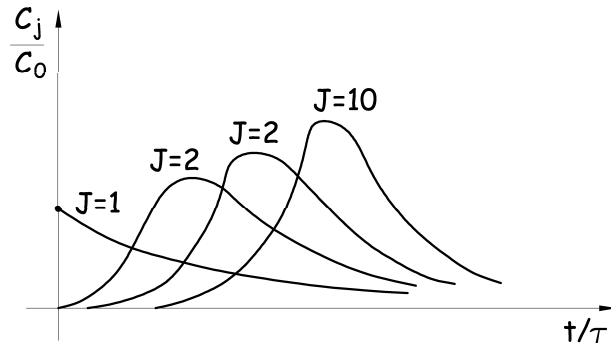
ed osservando che $C_{3in} = 0$ per $t = 0$

$$C_3 = C_0 \frac{N^3}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \exp[-(\frac{N}{\tau} + r) t]$$

- Compartimento j-esimo

Ragionando per induzione, è immediato ottenere:

$$C_j = C_0 \frac{N^j}{(j-1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{j-1} \exp[-(\frac{N}{\tau} + r) t]$$



L'equazione da applicare ad ogni compartimento è

$$V_j \frac{dC_j}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ij} C_i - \sum_{i=1}^N Q_{ji} C_j + \sum_{i=1}^N K_{ij} (C_i - C_j) \frac{A_{ij}}{l_{ij}} - r_j V_j C_j$$

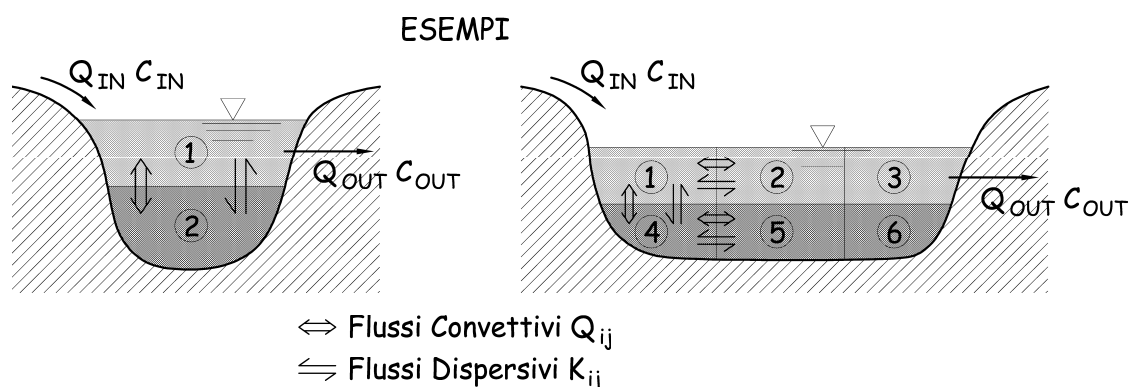


Figura 7.24: Esempi di possibili suddivisioni di un lago in compartimenti ben mescolati e relativi flussi.

dove i coefficienti di dispersione K_{ij} sono determinati con il metodo del bilancio di calore oppure utilizzando traccianti mentre le portate volumetriche Q_{ij} sono determinate mediante misure di campo o simulazioni numeriche mediante un opportuno modello idrodinamico.

All'interno di ogni compartimento è possibile definire un **modello ecologico**, ovvero l'insieme delle equazioni di bilancio di massa che regolano l'evoluzione nel tempo delle varie grandezze, soggette a reazioni di tipo biochimico, come illustrato nell'esempio di Figura ?.

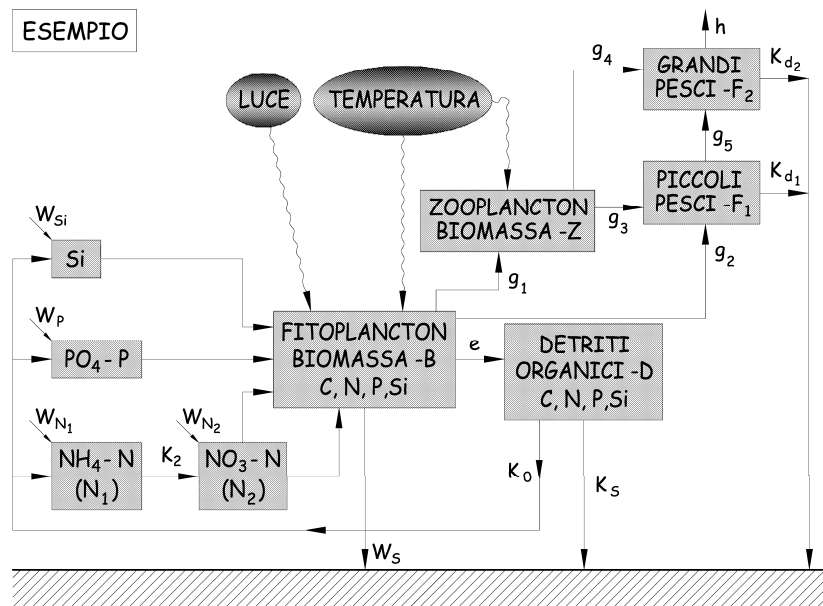


Figura 7.25: Esempio di modello ecologico di un lago.

Appendice A

In questa appendice è riportata una serie di programmi Matlab per graficare la **soluzione dell'equazione della pura diffusione** (1D e 2D) e dell'equazione dell'**avvezione-diffusione**, nel caso di avvezione uniforme.

- Esempio 1: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ e l'andamento nel tempo della varianza della concentrazione stessa, $\sigma(t) = 2Dt$, nel caso della soluzione fondamentale dell'equazione della diffusione molecolare 1D, ovvero per un'immissione istantanea di una massa di soluto M nell'origine.

```
1 clear all; close all; clc
2 %
3 %Clear all variables, globals, functions and from memory.
4 %closes all the open figure windows
5 %Clear the command window and homes the cursor
6 %
7 % Fundamental solution of the 1D diffusion equation
8 %
9 % Definition and initialization of parameters and variables
10 %
11 dx=0.01;           % spatial integration interval, m
12 L_x=5;             % total length of the domain, m
13 x=[-L_x:dx:L_x];  % x axis computational grid
14                   % build a row vector whose component are in
15                   % the range -L_x a L_x with spatial step dx
16 tmax=10/pi;        % length of the simulation, s
17 dt=1/(36*pi);      % temporal visualization pace, s
18 t=[0:dt:tmax];     % computational domain along t
19 M=1;               % mass
20 D = 0.25;          % diffusion coefficient, m^2/s
21 %
22 % C vector inizialization
23 % ZEROS(M,N) or ZEROS([M,N]) is an M-by-N matrix of zeros
24 % LENGTH(X) returns the length of vector X. It is equivalent
25 % to MAX(SIZE(X)) for non-empty arrays and 0 for empty ones
26 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
27 Cstore=zeros(3,length(x));
28 %
29 % time cycle over all the spatial domain points
30 for tt=1:length(t)
31 % Length(X): returns the length of vector X. It is equivalent
32 % to MAX(SIZE(X)) for non-empty arrays and 0 for empty ones
33     if t(tt)==0
```



```

34     for i=1:length(x)
35 %C(i)=M*dirac(x(i));
36 % DIRAC(X)  $\Delta$  function= zero for all X but X == 0
37 % where it is infinite
38     end
39     else
40     for i=1:length(x)
41         % Concentration along x
42         C(i)=M/(sqrt(4*pi*D*t(tt)))*exp(-x(i)^2/(4*D*t(tt)));
43     end
44 end
45 %
46 % plot results
47 %
48 % type "help plot" for information on the plot command
49 figure(1) %opens a figure window
50 subplot(1,2,1) %subplot (m,n,k) divide the figure in m by ...
    n
51 %subplots an locate the plot in the k inset
52 %m: # of row
53 %n: # of columns
54 %k: inset location within the figure
55 plot(x(C>0),C(C>0),'r','LineWidth',2.5);
56 axis([-Lx-1 Lx-1 0 6]) % axis settings
57 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
58 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
59 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
60 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
61 set(gca,'XTick',[-(Lx-1):1:Lx-1]);
62 title(['time = ',num2str(t(tt)),'\pi s'],'FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
63
64 subplot(1,2,2) %0
65 plot(t,2*D*t,'—b','LineWidth',1.5);
66 hold on %keeps the various plots in the same subplot
67 plot(t(tt),2*D*t(tt),...
68     'Marker','o','MarkerSize',8,...
69     'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
70     'MarkerFaceColor',[0 0 1]);
71 axis([0 tmax 0 2*D*tmax])
72 xlabel('time [\pi s]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
73 ylabel('variance','FontSize',12,'FontWeight','bold');
74 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
75 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
76 title(['time = ',num2str(t(tt)),'\pi s'],'FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
77 hold off
78 %
79 %GETFRAME Get movie frame: returns a movie frame. The frame
80 %is a snapshot of the current axis. GETFRAME is usually ...
    used
81 %in a FOR loop to assemble an array of movie frames for
82 %playback using MOVIE.
83 getframe;
84 %
85 %for some prescribed times, stores the spatial distribution
86 %of the concentration for the final plot
87 if tt==2

```

```

88     for i=1:length(x)
89         Cstore(1,i)=C(i);
90     end
91 end
92 if tt==10
93     for i=1:length(x)
94         Cstore(2,i)=C(i);
95     end
96 end
97 if tt==145
98     for i=1:length(x)
99         Cstore(3,i)=C(i);
100    end
101 end
102 end
103 %
104 figure(2)
105 plot(x(:),Cstore(1,:), '-r', 'LineWidth',1.5);
106 hold on
107 plot(x(:),Cstore(2,:), '-r', 'LineWidth',1.5);
108 plot(x(:),Cstore(3,:), '-.r', 'LineWidth',2.5);
109 title('c(x,t)', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold')
110 axis([-L_x L_x 0 6])
111 xlabel('x [m]', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
112 ylabel('c(x,t) [mg/l]', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
113 set(gca, 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
114 %set(gca, 'PlotBoxAspectRatio', [2 1 1]);
115 %legend('t=1/(36*pi)', 't=1/(4*pi)', 't=4/pi')
116 box off
117 %
118 figure(3)
119 plot(t, 2*D*t, '-k', 'LineWidth',1.5);
120 hold on
121 plot(t(2), 2*D*t(2), ...
122      'Marker', 'o', 'MarkerSize', 8, ...
123      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
124      'MarkerFaceColor', 'g');
125
126 plot(t(10), 2*D*t(10), ...
127      'Marker', 'o', 'MarkerSize', 8, ...
128      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
129      'MarkerFaceColor', [1 1 1]);
130 plot(t(145), 2*D*t(145), ...
131      'Marker', 'o', 'MarkerSize', 8, ...
132      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
133      'MarkerFaceColor', 'r');
134 axis([0 t(145) 0 2*D*t(145)])
135 xlabel('time [\pi s]', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
136 ylabel('variance', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
137 %set(gca, 'PlotBoxAspectRatio', [2 1 1]);
138 set(gca, 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
139 title('variance', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold')
140 box off

```

- Esempio 2: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ nel caso di pura diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale

assegnata e indipendente dal tempo, i.e., $C(x, 0) = 0, x < 0$ e $C(x, 0) = C_0, x \geq 0$.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the 1D diffusion equation
4 % for a prescribed initial constant concentration, i.e.,
5 % C=C0 for x>0
6 %
7 % Definition and initialization of parameters and variables
8 dx=1; % spatial integration pace, m
9 L_x=300; % total length of the domain, m
10 x=[-L_x:dx:L_x]; % computational grid along x axis
11 tmax=500000; % length of the simulation, s;
12 dt=500; % temporal visualization pace, s;
13 t=[0:dt:tmax]; % computational domain along t;
14 M=1; % mass
15 C0=1; % concentration at x==0;
16 D = 0.25; % diffusion coefficient
17 %
18 %Initial Condition for c(x,0)
19 Cini=zeros(1,length(x));
20 Cini(x>=0)=C0;
21 %
22 % C vector initialization
23 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
24 %
25 % time cycle over all the spatial domain points
26 for tt=1:length(t)
27     if t(tt)==0
28         % Concentration along x at t==0
29         C=zeros(1,length(x));
30         C(x>=0)=C0;
31     else
32         for i=1:length(x)
33             % Concentration along x for t>0
34             C(i)=0.5*C0*(1+erf(x(i)/sqrt(4*D*t(tt))));
35         end
36     end
37 %
38 % plot results
39 %
40 figure(1)
41 plot(x,Cini,'—b','LineWidth',2.5);
42 hold on
43 plot(x,C,'r','LineWidth',2.5);
44 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
45 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
46 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
47 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
48 title(['time = ',num2str(t(tt)),' s'],'FontSize',12,'...
49         FontWeight','bold')
49 axis([-L_x L_x 0 1.2*C0]) % axis setting
50 legend('c(0)', 'c(t)');
51 getframe;
52 hold off
53 end

```

- Esempio 3: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ nel caso di pura diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata e indipendente dal tempo, i.e., $C(x, 0) = C_0, x \leq 0$ e $C(x, 0) = 0, x > 0$.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the 1D diffusion equation
4 % for a prescribed initial constant concentration, i.e.,
5 %  $C=C_0$  for  $x \leq 0$ 
6 %
7 % Definition and initialization of parameters and variables
8 dx=1; % spatial integration pace, m
9 L_x=300; % total length of the domain, m
10 x=[-L_x:dx:L_x]; % grid of the computational domain along x ...
    axis
11 tmax=50000; % length of the simulation, s;
12 dt=500; % temporal visualization pace, s;
13 t=[0:dt:tmax]; % computational domain along t;
14 M=1; % mass
15 C0=1; % concentration at  $x=0$ ;
16 D = 0.25; % diffusion coefficient
17 %
18 %Initial Condition
19 Cini=zeros(1,length(x));
20 Cini(x<=0)=C0;
21 %
22 % C vector initialization
23 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
24 %
25 % time cycle over all the spatial domain points
26 for tt=1:length(t)
27     if t(tt)==0
28         % Concentration along x at  $t=0$ 
29         C=zeros(1,length(x));
30         Cini(x<=0)=C0;
31     else
32         for i=1:length(x)
33             % Concentration along x for  $t>0$ 
34             C(i)=0.5*C0*(1-erf(x(i)/sqrt(4*D*t(tt))));
35         end
36     end
37 %
38 % plot results
39 %
40 figure(1)
41 plot(x,Cini,'-b','LineWidth',2.5);
42 hold on
43 plot(x,C,'r','LineWidth',2.5);
44
45 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
46 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
47 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
48 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');

```

```

49     title(['time = ',num2str(t(tt)), ' s'],'FontSize',12,'...
        FontWeight','bold')
50     axis([-L_x L_x 0 1.2*C0]) % axis setting
51     legend('c(0)', 'c(t)');
52     getframe;
53     hold off
54 end

```

- Esempio 4: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ nel caso di pura diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata e indipendente dal tempo, i.e., $C(x, 0) = C_0, x \in [-a, a]$.

```

1  clear all; close all; clc
2  %
3  % Analytical solution of the 1D diffusion equation
4  % for a prescribed initial constant concentration, i.e.,
5  % C=C0 for x included in [-a,a]
6  %
7  % Definition and initialization of parameters and variables
8  dx=1; % spatial integration pace, m
9  L_x=300; % total length of the domain, m
10 x=[-L_x:dx:L_x]; % x axis computational grid
11 % build a row vector whose component are in
12 % the range -L_x a L_x with spatial step dx
13
14 tmax=50000; % length of the simulation, s;
15 dt=500; % temporal visualization pace, s;
16 t=[0:dt:tmax]; % computational domain along t;
17
18 M=1; % mass
19 C0=1; % concentration at x==0;
20 D = 0.25; % diffusion coefficient
21 %
22 %Initial Condition
23 a=100*dx;
24 Cini=C0*ones(1,length(x));
25 Cini(x>=a)=0;
26 Cini(x<=-a)=0;
27 %
28 % C vector initialization
29 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
30 %
31 % time cycle over all the spatial domain points
32 for tt=1:length(t)
33     %concentration at injection section
34     Cxo(tt)=C0*(erf(a/sqrt(4*D*t(tt))));
35     xxo(tt)=0;
36     if t(tt)==0
37         % Concentration along x at t==0
38         C=C0*ones(1,length(x));
39         C(x>=a)=0;
40         C(x<=-a)=0;
41     else
42         for i=1:length(x)
43             % Concentration along x for t>0

```

```

44         C(i)=0.5*C0*((erf((a-x(i))/sqrt(4*D*t(tt)))+(erf((a+...
           x(i))/sqrt(4*D*t(tt))));
45     end
46 end
47 %-----
48 % plot results
49 %-----
50 plot(x,Cini,'—b','LineWidth',2.5);
51 hold on
52 plot(x,C,'r','LineWidth',2.5);
53 plot(xo(tt),Cxo(tt),...
54      'Marker','o','MarkerSize',8,...
55      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
56      'MarkerFaceColor',[0 0 1]);
57
58 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
59 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
60 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
61 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
62 title(['time = ',num2str(t(tt)), ' s'],'FontSize',12,'...
        FontWeight','bold')
63 axis([-L_x L_x 0 1.2*C0]) % axis settings
64 legend('c(0)', 'c(t)');
65
66 getframe;
67 hold off
68 end

```

- Esempio 5: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ nel caso di pura diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata e indipendente dal tempo, i.e., $C(x, 0) = C_0, x \in [-\infty, -a]$ and $[a, \infty]$.

```

1  clear all; close all; clc
2  %-----
3  % Analytical solution of the 1D diffusion equation
4  % for a prescribed initial constant concentration, i.e.,
5  % C=C0 for x external to the interval [-a,a]
6  %-----
7  % Definition and initialization of parameters and variables
8  dx=1; % spatial integration pace, m
9  L_x=300; % total length of the domain, m
10 x=[-L_x:dx:L_x]; % computational GRID along x axis
11 tmax=50000; % length of the simulation, s;
12 dt=500; % temporal visualization pace, s;
13 t=[0:dt:tmax]; % computational domain along t;
14 M=1; % mass
15 C0=1; % concentration at x==0;
16 D = 0.25; % diffusion coefficient
17 %-----
18 %Initial Condition
19 a=100*dx;
20 Cini=zeros(1,length(x));
21 Cini(x>a)=C0;
22 Cini(x<=-a)=C0;
23 %-----
24 % C vector initialization

```

```

25 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
26 %
27 % time cycle over all the spatial domain points
28 for tt=1:length(t)
29     %concentrazione at x=0
30     Cxo(tt)=C0*(erfc(a/sqrt(4*D*t(tt))));
31     xxo(tt)=0;
32     if t(tt)==0
33         % Concentration along x at t==0
34         C(x>=a)=C0;
35         C(x<=-a)=C0;
36     else
37         for i=1:length(x)
38             % Concentration along x for t>0
39             C(i)=0.5*C0*((erfc((a-x(i))/sqrt(4*D*t(tt)))+(erfc(...
40                 a+x(i))/sqrt(4*D*t(tt))));
41         end
42     end
43 %
44 % plot results
45 %
46 figure(1)
47 plot(x,Cini,'—b','LineWidth',2.5);
48 hold on
49 plot(x,C,'r','LineWidth',2.5);
50 plot(xxo(tt),Cxo(tt),...
51     'Marker','o','MarkerSize',8,...
52     'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
53     'MarkerFaceColor',[0 0 1]);
54 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
55 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
56 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
57 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
58 title(['time = ',num2str(t(tt)), ' s'],'FontSize',12,'...
59     FontWeight','bold')
60 axis([-Lx Lx 0 1.2*C0]) % axis settings
61 legend('c(0)', 'c(t)');
62 getframe;
63 hold off
64 end

```

- Esempio 6: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x,t)$ nel caso di pura diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata in un punto e indipendente dal tempo.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution for the 1D diffusion equation
4 % for a prescribed initial concentration, given at one point
5 % and independent of time
6 %
7 % Definition and initialization of parameters and variables
8 dx=1; % spatial integration pace, m
9 Lx=300; % total length of the domain, m

```

```

10 x=[-L_x:dx:L_x]; % grid of the computational domain along x ...
    axis
11 tmax=500000;      % length of the simulation, s;
12 Δt=500;          % temporal visualization pace, s;
13 t=[0:Δt:tmax];    % computational domain along t;
14 M=1;             % mass
15 C0=1;            % concentration at x==0;
16 D = 0.25;        % diffusion coefficient
17 %
18 %Initial Condition
19 Cini=C0;
20 %
21 % C vector initialization
22 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
23 Cstore=zeros(3,length(x));
24 %
25 % time cycle over all the spatial domain points
26 for tt=1:length(t)
27     if t(tt)==0
28         % Concentration along x at t==0
29         C(x==0)=C0;
30     else
31         for i=1:length(x)
32             % Concentration along x for t>0
33             C(i)=C0*erfc(abs(x(i))/sqrt(4*D*t(tt)));
34         end
35     end
36 %
37 % plot results
38 %
39 figure(1)
40 plot(x(find(x==0)),Cini,...
41     'Marker','o','MarkerSize',10,...
42     'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
43     'MarkerFaceColor',[0 0 1]);
44 hold on
45 plot(x(C>0),C(C>0),'r','LineWidth',2.5);
46
47 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
48 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
49 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
50 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
51 title(['time = ',num2str(t(tt)),' s'],'FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
52 axis([-L_x L_x 0 1.2*C0]) % axis settings
53 getframe;
54 hold off
55 %
56 %for some prescribed times, stores the spatial distribution
57 %of the concentration for the final plot
58 if tt==2
59     for i=1:length(x)
60         Cstore(1,i)=C(i);
61     end
62 end
63 if tt==floor(length(t)/2)
64     for i=1:length(x)
65         %FLOOR—Round towards minus infinity: FLOOR(X) rounds

```



```

66         %the elements of X to the nearest integers towards
67         %minus infinity.
68         Cstore(2,i)=C(i);
69     end
70 end
71 if tt==length(t)
72     for i=1:length(x)
73         Cstore(3,i)=C(i);
74     end
75 end
76 end
77 %
78 figure(2)
79 plot(x(:),Cstore(1,:), '-r', 'LineWidth',1.5);
80 hold on
81 plot(x(:),Cstore(2,:), '-r', 'LineWidth',1.5);
82 plot(x(:),Cstore(3,:), '-.r', 'LineWidth',2.5);
83 title('c(x,t)', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold')
84 axis([-Lx Lx 0 1.1]) % axis settings
85 xlabel('x [m]', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
86 ylabel('c(x,t) [mg/l]', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
87 set(gca, 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');
88 set(gca, 'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
89 box off

```

- Esempio 7: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, y, t)$ nel caso dell'immissione istantanea di una massa di soluto M nel punto x_0, y_0 nei casi in cui $D_x = D_y$ e $D_x \neq D_y$.

```

1  clear all; close all; clc
2  %
3  % Fundamental solution of the 2D diffusion equation
4  %
5  % Definition and initialization of parameters and variables
6  dx=1;           % spatial integration pace along x, m
7  dy=1;           % spatial integration pace along y, m
8  Lx=400;         % dimension of the domain along x, m
9  Ly=400;         % dimension of the domain along y, m
10 X=[0:dx:Lx];    % computational grid along x axis
11 Y=[0:dx:Ly];    % computational grid along y axis
12 %coordinates injection point
13 io=201;
14 jo=201;
15
16 tmax=100;        % length of the simulation, s;
17 dt=2;           % temporal visualization space, s;
18 t=[0:dt:tmax];  % temporal discretization;
19 Dx = 25;        % diffusion coefficient along x, m^2/s
20 Dy = 25;        % diffusion coefficient along y, m^2/s
21 %
22 % C vector initialization
23 C=zeros(length(Y),length(X));
24 %
25 % time cycle over all the spatial domain points
26 for tt=1:length(t)
27     tt

```

```

28     for i=1:length(Y);
29         for j=1:length(X);
30             if t(tt)==0
31                 if [i j]==[io jo];
32                     C(i,j)=1/dx*dy;
33                 else
34                     C(i,j)=0;
35                 end
36             else
37                 C(i,j)= 1/(4*pi*t(tt)*sqrt(Dx*Dy))...
38                     *exp(((X(j)-X(jo))^2)/(4*Dx*t(tt))-(Y(i)-Y(io)...
39                         )^2)/(4*Dy*t(tt)));
40             end
41         end
42     end
43     M(tt)=sum(sum(C))*dx*dy;
44 %-----
45 % plot results
46 %-----
47 % Top view:                choice=1
48 % Axonometric view::      choice=2
49 %-----
50 % Top view:
51 if choice==1
52     surf(X,Y,C,'edgecolor','none')
53     view(0,90);
54     set(gca,'Xlim',[0 Lx],'Ylim',[0 Ly],'Zlim',[-0.01 1]...
55         , 'Clim',[0 0.0001],'dataAspectRatio',[1 1 1]);
56 end
57 % Axonometric view:
58 if choice==2
59     surf(X,Y,C,'edgecolor','none')
60     set(gca,'Xlim',[0 Lx],'Ylim',[0 Ly],'Zlim',[0 0.0001]...
61         , 'Clim',[0 0.0001]);
62 end
63 xlabel('longitudine [m]');
64 ylabel('latitudine [m]');
65 title(['tempo = ',num2str(t(tt)),' s'])
67 getframe;
68 end

```

- Esempio 8: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, t)$ nel caso di avvezione-diffusione 1D, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata e indipendente dal tempo, i.e., i.e., $C(x, 0) = C_0, x \leq 0$ e $C(x, 0) = 0, x > 0$.

```

1  clear all; close all; clc
2  %-----
3  % Analytical solution for the 1D advection-diffusion equation
4  % for a prescribed, constant initial concentration, i.e.
5  % C=C0 x<0
6  %-----
7  % Definition and initialization of parameters and variables

```

```

8  dx=1;                % spatial integration pace, m
9  L_x=2000;            % total length of the domain, m
10 x=[-100:dx:L_x];    % grid of the computational domain along x ...
    axis
11 tmax=20000;          % length of the simulation, s;
12 Δt=200;              % temporal visualization pace, s;
13 t=[0:Δt:tmax];       % computational domain along t;
14
15 M=1;                % mass
16 C0=1;               % concentration at x==0;
17 D = 0.25;           % diffusion coefficient
18 D2 = 1.5;           % diffusion coefficient
19 v = 0.2;            % flow velocity m/s
20 %
21 %Initial Condition
22 Cini=zeros(1,length(x));
23 Cini(x≤0)=C0;
24 %
25 % C vector initialization
26 C=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
27 C2=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
28 C3=zeros(1,length(x)); % concentration along x, mg/l
29 %
30 % time cycle over all the spatial domain points
31 for tt=1:length(t)
32     if t(tt)==0
33         % Concentration along x at t==0
34         C=zeros(1,length(x));
35         C(x≤0)=C0;
36         C2(x≤0)=C0;
37     else
38         for i=1:length(x)
39             % Concentration along x for t>0
40             C(i)=0.5*C0*(1-erf((x(i)-v*t(tt))/sqrt(4*D*t(tt))));
41             C2(i)=0.5*C0*(1-erf((x(i)-v*t(tt))/sqrt(4*D2*t(tt))));
42         end
43     end
44 %
45 % plot results
46 %
47 figure(1)
48 plot(x,Cini,'—b','LineWidth',2.5);
49 hold on
50 plot(x,C,'r','LineWidth',2.5);
51 plot(x,C2,'—r','LineWidth',1.5);
52
53 xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
54 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
55 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
56 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
57 title(['time = ',num2str(t(tt)),' s'],'FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
58 axis([-100 L_x 0 1.2*C0]) % axis setting
59 getframe;
60 hold off
61 end

```

- Esempio 9: Grafica l'andamento spaziale della concentrazione $C(x, y)$ nel caso di avvezione uniforme e diffusione 2D, in condizioni stazionarie, per una distribuzione di concentrazione iniziale assegnata, i.e., $C = C_0$ per $x = 0$, $y \leq 0$ e $C = 0$ per $x = 0$ e $y > 0$.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution for the 2D diffusion equation
4 % under steady condition
5 %
6 % Definition and initialization of parameters and variables
7 dx=1; % spatial integration step along x, m
8 dy=1; % spatial integration step along y, m
9 Lx=1000; % length of the domain along x, m
10 Ly=500; % length of the domain along y, m
11 X=[0:dx:Lx]; % computational grid along x axis
12 Y=[Ly:-dx:-Ly]; % computational grid along y axis
13 io=floor(length(Y)/2)+1; jo=0; %injection point coordinates
14 Dx = 0.25*100; % diffusion coefficient along x, m^2/s
15 uo=1; % longitudinal uniform velocity, m/s
16 C0=1; % initial concentration
17 %
18 % C vector initialization
19 C=zeros(length(Y),length(X));
20 C(io:length(Y),1)=C0;
21 %
22 % time cycle over all the spatial domain points
23 for i=1:length(Y);
24     for j=2:length(X);
25         C(i,j)= 0.5*C0*(1-erf(Y(i)/sqrt(4*Dx*X(j)/uo)));
26     end
27 end
28 %
29 % plot results
30 %
31 figure(1)
32 surf(X,Y,C,'edgecolor','none')
33 view(0,90);
34 set(gca,'Xlim',[0 Lx],'Ylim',[-Ly Ly],'Zlim',[-1 10]...
35     , 'Clim',[0 1], 'dataAspectRatio',[1 1 1]); %
36 xlabel('X [m]');
37 ylabel('Y [m]');
38 colorbar
39 %
40 figure(2)
41 plot(C(:,1),Y,'-b','linewidth',1)
42 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
43 hold on
44 plot(C(:,floor(length(X)/5)),Y,'-b','linewidth',2)
45 plot(C(:,floor(length(X)/2)),Y,'-b','linewidth',3)
46 plot(C(:,floor(length(X))),Y,'-b','linewidth',4)
47 xlabel('x [m]', 'FontSize',12, 'FontWeight','bold');
48 ylabel('c(x,t) [mg/l]', 'FontSize',12, 'FontWeight','bold');
49 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
50 set(gca,'FontSize',12, 'FontWeight','bold');

```

- Esempio 10: Grafica l'andamento spazio-temporale della concentrazione $C(x, y, t)$ nel caso di avvezione uniforme e diffusione 2D, per un'immissione istantanea di una massa di soluto M in x_0, y_0 nei casi in cui $D_x = D_y$ e $D_x \neq D_y$.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 %Analytical solution of the 2D advection-diffusion equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 alfa= -0.36652; %pi/2 -0.36652; %angolo in radianti
7 Di=25; %x-diffusivity, m^2/s
8 Dj=25; %y-diffusivity, m^2/s
9 v=2; %uniform longitudinal velocity, m/s
10 xmin=0; xmax=400; %boundaries of computational domain, m
11 ymin=0; ymax=400;
12 xo=1; yo=201; %injection point
13 tmax=100; %temporal length of simulation (s)
14 dt=2; %time step for visualization, s
15 dx=1; dy=1; %spatial discretization step, m
16 X=(xmin:dx:xmax); Y=(ymin:dy:ymax);
17 %
18 % C vector initialization
19 C=zeros(length(Y),length(X));
20 %
21 % time cycle over all the spatial domain points
22 cont_t=0;
23 for t=0:dt:tmax
24     cont_t=cont_t+1;
25     cont_y=0;
26     for y=ymin:dy:ymax;
27         cont_y=cont_y+1;
28         cont_x=0;
29         for x=xmin:dx:xmax;
30             cont_x=cont_x+1;
31             a=x-xo;
32             b=y-yo;
33             i=a*cos(alfa)-b*sin(alfa);
34             j=a*sin(alfa)+b*cos(alfa);
35             if t==0
36                 if [x y]==[xo yo];
37                     C(cont_y,cont_x)=1/dx*dy;
38                 else
39                     C(cont_y,cont_x)=0;
40                 end
41             else
42                 C(cont_y,cont_x)= 1/(sqrt(16*pi*pi*Di*Dj*(t^2)))...
43                     *exp(((i-v*t)^2)/(4*Di*t))-(j^2)/(4*Dj*t));
44             end
45         end
46     end
47     M(cont_t)=sum(sum(C))*dx*dy;
48 %
49 % plot results
50 %
51 surf(X,Y,C, 'edgecolor', 'none')

```

```

52     view(0,90);
53     set(gca,'Xlim',[xmin xmax],'Ylim',[ymin ymax],'Zlim',[0 1]...
        '','Clim',[0 0.0001],'dataAspectRatio',[1 1 1]); %
54     xlabel('longitudine [m]');
55     ylabel('latitudine [m]');
56     title(['tempo = ',num2str(t),' s'])
57     colorbar
58     getframe;
59
60 end

```

- Esempio 11: Confronta tra loro le soluzioni numeriche e analitiche della equazione della diffusione per alcuni casi particolari.

```

1  clear all; close all; clc
2  %-----
3  % Compares together the analytical and numerical solutions
4  % for same relevant cases
5  %-----
6  choice=1; % flag used to choose among different options
7  k = 0.1; % diffusivity constant
8  beta=0.001; % settling velocity
9  L=500; % length of the domain
10 dx=5;
11 x=[0:dx:L];
12 dt=30;
13 time=[0:dt:43200];
14 Co=20; %initial concentration
15 u=0.05; %advective velocity
16 lambda=beta+(u*u/(4*k));
17 contafig=0;
18 % allows one to choose the number of distribution to plot
19 choice=4
20 %-----
21 %Case 1: Pure Diffusion
22 % in a semi-infinite plane
23 % PDE:  $C_t = k C_{xx}$   $0 < x < \infty, t > 0$ 
24 % BCs:  $C = Co$   $x=0, t > 0$ 
25 % IC:  $C = 0$   $0 < x < \infty, t=0$ 
26 % Solution:
27 %  $C(x,t) = Co \cdot \text{erfc}(x(i)/2/\sqrt{k \cdot \text{time}(t)})$ 
28 C1=zeros(length(x),length(time));
29 C1(1,:)=Co;
30 C1num=zeros(length(x),length(time));
31 C1num(1,:)=Co;
32 %-----
33 %Case 2: Diffusion + sedimentation
34 % in a semi-infinite plane
35 % PDE:  $C_t = k C_{xx} - \beta C$   $0 < x < \infty, t > 0$ 
36 % BCs:  $C = Co$   $x=0, t > 0$ 
37 % IC:  $C = 0$   $0 < x < \infty, t=0$ 
38 % Solution:
39 C2=zeros(length(x),length(time));
40 C2(1,:)=Co;
41 C2num=zeros(length(x),length(time));
42 C2num(1,:)=Co;

```

```

43 %
44 %Case 3: Pure advection
45 %      in a semi-infinite plane
46 % PDE:       $C, t+u*C, x=k*C, xx-beta*C$        $0 < x < \infty, t > 0$ 
47 % BCs:       $C = C_0$        $x=0, t > 0$ 
48 % IC:       $C = 0$        $0 < x < \infty, t=0$ 
49 % Solution:
50 %  $C(x,t) = C_0 \operatorname{erfc}(x(i)/2/\sqrt{k*time(t)})$ 
51 C3=zeros(length(x),length(time));
52 C3(1,:)=C0;
53 C3num=zeros(length(x),length(time));
54 C3num(1,:)=C0;
55 %
56 % Case 4: Advection + Diffusion + sedimentation
57 %      in a semi-infinite plane
58 % PDE:       $C, t + u*C, x = 0$        $0 < x < \infty, t > 0$ 
59 % BCs:       $C = C_0$        $x=0, t > 0$ 
60 % IC:       $C = 0$        $0 < x < \infty, t=0$ 
61 % Solution:
62 %  $C(x,t) = C_0 \operatorname{erfc}(x(i)/2/\sqrt{k*time(t)})$ 
63 C4=zeros(length(x),length(time));
64 C4(1,:)=C0;
65 C4num=zeros(length(x),length(time));
66 C4num(1,:)=C0;
67 %
68 for t=2:size(time,2)
69     for i=2:size(x,2)-1
70         %Pure Diffusion Analytical
71         C1(i,t) = C0*erfc(x(i)/2/sqrt(k*time(t)));
72         %Pure Diffusion Numerical
73         C1num(i,t) = C1num(i,t-1)+k*(dtime/dx^2)*(C1num(i+1,t-1)...
74             -2*C1num(i,t-1)+C1num(i-1,t-1));
75         %Diffusion + sedimentation Analytical
76         first2 = erfc(x(i)/sqrt(4*k*time(t)+10^-10)-sqrt(beta*...
77             time(t)));
78         second2= erfc(x(i)/sqrt(4*k*time(t)+10^-10)+sqrt(beta*...
79             time(t)));
80         C2(i,t) = 0.5*C0 * (exp(-x(i)*sqrt(beta/k))*first2 + ...
81             exp(x(i)*sqrt(beta/k))*second2);
82         %Diffusion + sedimentation Numerical
83         %      at the previous time step
84         C2num(i,t) = C2num(i,t-1)+k*(dtime/dx^2)*(C2num(i+1,t-1)...
85             -2*C2num(i,t-1)+C2num(i-1,t-1)) - beta*dtime*C2num(i...
86             ,t-1);
87     %
88     %Pure advection Analytical & Numerical
89     if (x(i) < u*time(t))
90         C3(i,t) = C0;
91         C3num(i,t)=C3num(i,t-1)-(u*dtime/dx)*(C3num(i,t-1)-...
92             C3num(i-1,t-1));
93     else
94         C3(i,t) = 0;
95         C3num(i,t)=C3num(i,t-1)-(u*dtime/dx)*(C3num(i,t-1)-...
96             C3num(i-1,t-1));
97     end
98 %
99 % Case1: Semi infinite plane: diffusion+advection+...

```

```

    sedimentation
93 %Diffusion+Advection+sedimentation Analytical
94 %NB Ridurre dt, dt=30s.
95 first1 = erfc(x(i)/sqrt(4*k*time(t))-sqrt(lambda*time(t)...
    ));
96 second1= erfc(x(i)/sqrt(4*k*time(t))+sqrt(lambda*time(t)...
    ));
97 C4(i,t) = 0.5*Co*exp(0.5*u*x(i)/k) * (exp(-x(i)*sqrt(...
    lambda/k))*first1 + exp(x(i)*sqrt(lambda/k))*second1...
    );
98 %Diffusion+Advection+sedimentation Numerical
99 C4num(i,t)=C4num(i,t-1)-(u*dt/dx)*(C4num(i,t-1)-C4num...
    (i-1,t-1))+k*(dt/dx^2)*(C4num(i+1,t-1)-2*C4num(i,...
    t-1)+C4num(i-1,t-1))-beta*dt*C4num(i,t-1);
100 end
101 %
102 % plot results
103 %
104 figure(1)
105 %Pure Diffusion
106 subplot(2,2,1)
107 plot(x,C1(:,t),'r','LineWidth',2);
108 hold on
109 plot(x,C1num(:,t),'b','LineWidth',2);
110 title(sprintf('Pure Diffusion , time(s)=%g',time(t)), '...
    FontSize',12)
111 axis([0 L -5 25])
112 set(gca,'nextplot','replacechildren')
113 %
114 if (choice >=2)
115     subplot(2,2,2)
116     plot(x,C2(:,t),'r','LineWidth',2);
117     hold on
118     plot(x,C2num(:,t),'b','LineWidth',2);
119     title(sprintf('Diffusion + sedimentation , time(s)=%g',...
        time(t)), 'FontSize',12)
120     axis([0 L -5 25])
121     set(gca,'nextplot','replacechildren')
122 end
123 %
124 if (choice >=3)
125     subplot(2,2,3)
126     plot(x,C3(:,t),'r','LineWidth',2);
127     hold on
128     plot(x,C3num(:,t),'b','LineWidth',2);
129     title(sprintf('Pure Advection , time(s)=%g',time(t)), '...
        FontSize',12)
130     axis([0 L -5 25])
131     set(gca,'nextplot','replacechildren')
132 end
133 %
134 if (choice >=4)
135     subplot(2,2,4)
136     plot(x,C4(:,t),'r','LineWidth',2);
137     hold on
138     plot(x,C4num(:,t),'b','LineWidth',2);
139     title(sprintf('Adv+Diff+Sedim , time(s)=%g',time(t)), '...
        FontSize',12)

```



```
140     axis([0 L -5 25])
141     set(gca,'nextplot','replacechildren')
142     end
143 %-----
144     contafig = contafig + 1;
145     set(gca,'nextplot','replacechildren')
146     M(:,contafig) = getframe;
147 end
```

Appendice B

In questa appendice è riportata una serie di programmi Matlab relativi alla **soluzione dell'equazione della dispersione 1D negli alvei fluviali**. I dati utilizzati sono quelli misurati in due sezioni del Waikato River (Nz).

- **Esempio 1:** Soluzione di Taylor dell'equazione 1D dell'avvezione-dispersione nel caso di rilascio accidentale di una massa M di inquinante non reattivo nella sezione $x = 0$ di un corso d'acqua. In particolare, vengono graficati: i) l'andamento spazio-temporale della concentrazione, $C(x, t)$; ii) landamento spaziale della concentrazione per diversi istanti di tempo; iii) landamento temporale della concentrazione nel tempo, in corrispondenza a diverse sezioni.

```
1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Taylor solution for Longitudinal Dispersion
4 % Waikato River example
5 %
6 % Definition and initialization of parameters and variables
7 % x-coordinates of six sections along the Waiakato River, m
8 xfix=[3700 6000 8400 10900 17600 22800];
9
10 dx=5; %spatial integration pace, m
11 L_x=max(xfix); %total length of the domain, m
12 x=[0:dx:L_x]; %grid of the computational domain along x ...
    axis
13 tmax=12*3600; %length of the simulation, s;
14 dt=30; %temporal visualization pace, s;
15 t=[0:dt:tmax]; %computational domain along t;
16
17 M=36/100; %mass of dye injected, kg
18 Q=150; %river flow, m^3/s
19 Kx = 20; %longitudinal dispersion coefficient, m^2/...
    s
20 U = 0.7; %mean current velocity, m/s;
21 Ustar= 0.057; %shear velocity, m/s;
22 i.f=0.00013; %channel slope
23 Do = 2.5; %mean depth, m
24 Bo = 85; %average width, m
25 %
26 % C vector initialization
27
28 % Time distribution of concentration at selected sections
29 Ct_xfix=zeros([length(t),length(xfix)]); %mg/l
```

```

30
31 % Distribution of concentration as a function of x and t
32 Ct_x=zeros([length(t),length(x)]); %mg/l
33 %
34 % time cycle over all the spatial domain points
35 for tt=2:length(t)
36     for i=1:length(xfix)
37         % Concentration along x
38         Ct_xfix(tt,i)=M/(Do*Bo*sqrt(4*pi*Kx*t(tt)))*exp(-((xfix(...
39             i)-U*t(tt))^2)/(4*Kx*t(tt)));
40     end
41 end
42 for i=1:length(xfix)
43     tmax(i)=sqrt(Kx^2/U^4+xfix(i)^2/U^2)-Kx/U;
44     Cmax(i)=M/(Do*Bo*sqrt(4*pi*Kx*tmax(i)))*exp(-((xfix(i)-U*...
45         tmax(i))^2)/(4*Kx*tmax(i)));
46 end
47 %
48 % plot results
49 % spatial distribution of the concentration at given times
50 for tt=2:length(t) %time cycle
51     for i=1:length(x) %space cycle
52         % Concentration along x at given time
53         Ct_x(tt,i)=M/(Do*Bo*sqrt(4*pi*Kx*t(tt)))*exp(-((x(i)-U*t...
54             (tt))^2)/(4*Kx*t(tt)));
55     end
56 end
57 figure(1)
58 %
59 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*1/12),:),'-r','LineWidth'...
60     ,1.);
61 hold on
62 title('C vs x at given t','FontSize',12,'FontWeight','bold')
63 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
64 axis([0 max(x)/1000 0 1.8e-6]) % axes settings
65 xlabel('x [km]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
66 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
67 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
68 pause
69 box off
70 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*2/12),:),'-r','LineWidth'...
71     ,1.5);
72 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*3/12),:),'-r','LineWidth'...
73     ,2.);
74 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*4/12),:),'-r','LineWidth'...
75     ,2.5);
76 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*6/12),:),'-r','LineWidth'...
77     ,3);
78 plot(x(:)/1000,Ct_x(floor(length(t)*8/12),:),'-r','LineWidth'...
79     ,3.5);
80 legend('t_1=1h','t_2=2h','t_3=3h','t_4=4h','t_5=6h','t_6=8h')
81
82 %Plots the concentration maxima
83 tmaxII=[1 2 3 4 6 8]*3600;
84 for i=1:length(tmaxII)

```

```

79     xmax(i)=U*tmaxII(i);
80     CmaxII(i)=M/(Do*Bo*sqrt(4*pi*Kx*xmax(i)/U));
81     plot(xmax(i)/1000,CmaxII(i),...
82          'Marker','o','MarkerSize',8,...
83          'MarkerEdgeColor',[1 0 0],...
84          'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
85 end
86 %
87 figure(2)
88 %
89 %Plots the time distribution of concentration for given x
90 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,1),'-b','LineWidth',1.);
91 hold on
92 title('C vs t at fixed x','FontSize',12,'FontWeight','bold')
93 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
94 axis([0 max(t)/3600 0 1.5e-6]) % definisce gli assi
95 xlabel('time [hours]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
96 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
97 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
98 box off
99 %
100 pause
101 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,2),'-b','LineWidth',1.5);
102 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,3),'-b','LineWidth',2.);
103 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,4),'-b','LineWidth',2.5);
104 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,5),'-b','LineWidth',3.);
105 plot(t(:)/3600,Ct_xfix(:,6),'-b','LineWidth',3.5);
106 legend('x_1=3.7km','x_2=6.0km','x_3=8.4km','x_4=10.9km','x_5...
      =17.6km','x_6=22.8km')
107
108 %Plots the concentration maxima
109 plot(tmax(1)/3600,Cmax(1),...
110      'Marker','o','MarkerSize',8,...
111      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
112      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
113 %
114 plot(tmax(2)/3600,Cmax(2),...
115      'Marker','o','MarkerSize',8,...
116      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
117      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
118 %
119 plot(tmax(3)/3600,Cmax(3),...
120      'Marker','o','MarkerSize',8,...
121      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
122      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
123 %
124 plot(tmax(4)/3600,Cmax(4),...
125      'Marker','o','MarkerSize',8,...
126      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
127      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
128 %
129 plot(tmax(5)/3600,Cmax(5),...
130      'Marker','o','MarkerSize',8,...
131      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
132      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
133 %
134 plot(tmax(6)/3600,Cmax(6),...
135      'Marker','o','MarkerSize',8,...

```

```

136         'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
137         'MarkerFaceColor',[1 1 1]);

```

- **Esempio 2:** Applicazione del metodo della nuvola congelata: noto l'andamento temporale della concentrazione in due sezioni x_1 e x_2 , utilizzando come condizione al contorno la concentrazione misurata in x_1 , determina i valori di K e U per cui la distribuzione temporale di concentrazione in x_2 , calcolata tramite la soluzione di Taylor, meglio approssima quella misurata. In particolare, viene graficato l'andamento della concentrazione nel tempo in una generica sezione, mettendo in relazione tra loro, tramite l'approssimazione della nuvola congelata, l'andamento temporale della concentrazione in una fissata sezione e l'andamento spaziale per un fissato istante. Permette di valutare influenza della velocità sulla distribuzione di concentrazione calcolata.

```

1  clear all; close all; clc
2  %
3  % Routing method for determining the
4  % Longitudinal Dispersion Coefficient, K
5  % Manawatu river concentration data
6  %
7  % Load observed concentrations at sections C and D.
8  % Section C
9  dataC=load('Figure5_10plotCper10.txt');
10 t_dataC=dataC(:,1)*3600;
11 C_dataC=dataC(:,2)/1000000;
12 % Section D
13 dataD=load('Figure5_10plotDper10.txt');
14 t_dataD=dataD(:,1)*3600;
15 C_dataD=dataD(:,2)/1000000;
16 %
17 % Definition and initialization of parameters and variables
18 %
19 M=6.5;           % mass of dye injected, kg
20 Kx = 20;         % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
21 U = 0.35;        % mean current velocity, m/s;
22 i_f=1.4862e-004; % channel slope
23 Do = 1.9;        % mean depth, m
24 Bo = 50;         % Average width, m
25 % Longitudinal Coordinates of sections C and D
26 xfix=[5000 6400];
27 %
28 %Routing a Temporal Concentration Profile with the
29 %"Frozen Cloud Method"
30 %
31 %Mean passage time at sections C e D
32 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
33 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)'];
34 for tt=1:length(t_rout)
35     t=t_rout(tt);
36     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
37     for ttt=1:length(t_dataC)
38         tau=t_dataC(ttt);
39         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)- ...
            tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...

```

```

        /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
40     end
41     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
42 end
43 %
44 figure(1); hold on;
45 plot(t_dataC/3600,C_dataC,'—b','linewidth',1.5,...
46      'Marker','o','MarkerSize',6,...
47      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
48      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
49 plot(t_dataD/3600,C_dataD,'—b','linewidth',1.5,...
50      'Marker','d','MarkerSize',6,...
51      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
52      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
53
54 title('C(x,t)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
55 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
56 axis([min(t_dataC)/3600 max(t_dataD)/3600 0 1.2*max(C_dataD)...
57      ])
58 xlabel('time [hours]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
59 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
60 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
61 %legend('t=1/(36*pi)','t=1/(4*pi)','t=4/pi')
62 box off
63 pause
64 CroutedDplot=CroutedD';
65 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,':r','linewidth',2.5)
66 %
67 % I trial values
68 Kx = 20; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
69 U = 0.45; % mean current velocity, m/s;
70 %Mean passage time at sections C e D
71 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
72 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)]';
73 for tt=1:length(t_rout)
74     t=t_rout(tt);
75     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
76     for ttt=1:length(t_dataC)
77         tau=t_dataC(ttt);
78         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
79             tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
80             /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
81     end
82     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
83 end
84 CroutedDplot=CroutedD';
85 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,'—r','linewidth',2.5)
86 legend('sectionC','sectionD','computed','Rutherford')
87 %
88 % II trial values
89 Kx = 20; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
90 U = 0.55; % mean current velocity, m/s;
91 %Mean passage time at sections C e D
92 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
93 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)]';
94 for tt=1:length(t_rout)
95     t=t_rout(tt);
96     %Calculates C(x2,t_rout(tt));

```

```

94     for ttt=1:length(t_dataC)
95         tau=t_dataC(ttt);
96         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
            tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
            /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
97     end
98     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
99 end
100 CroutedDplot=CroutedD';
101 plot(t_rout/3600,CroutedDplot,'-r','linewidth',2.5)
102 legend('sectionC','sectionD','K_x=20, U=0.35','K_x=20, U=0.45'...
    , 'K_x=20, U=0.55')

```

- **Esempio 3:** Applicazione del metodo della nuvola congelata: valutazione dell'influenza delle variazioni di K sulla distribuzione di concentrazione calcolata.

```

1  clear all; close all; clc
2  %
3  % Routing method to determine the Longitudinal Dispersion ...
   Coefficient
4  % Routing method for determining the
5  % Longitudinal Dispersion Coefficient, K
6  % Manawatu river concentration data
7  %
8  % Load observed concentrations at sections C and D.
9  % Section C
10 dataC=load('Figure5_10plotCper10.txt');
11 t_dataC=dataC(:,1)*3600;
12 C_dataC=dataC(:,2)/1000000;
13 % Section D
14 dataD=load('Figure5_10plotDper10.txt');
15 t_dataD=dataD(:,1)*3600;
16 C_dataD=dataD(:,2)/1000000;
17 %
18 % Definition and initialization of parameters and variables
19 M=6.5; % mass of dye injected, kg
20 Kx = 10; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
21 U = 0.35; % mean current velocity, m/s;
22 i_f=1.4862e-004; % channel slope
23 Do = 1.9; % mean depth, m
24 Bo = 50; % Average width, m
25 % Longitudinal Coordinates of sections C and D
26 xfix=[5000 6400];
27 %
28 %Routing a Temporal Concentration Profile with the
29 %"Frozen Cloud Method"
30 %
31 %Mean passage time at sections C e D
32 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
33 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)];
34 for tt=1:length(t_rout)
35     t=t_rout(tt);
36     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
37     for ttt=1:length(t_dataC)
38         tau=t_dataC(ttt);

```

```

39         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
           tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
           /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
40     end
41     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
42 end
43 %
44 figure(1); hold on
45 plot(t_dataC/3600,C_dataC,'-b','linewidth',1.5,...
46      'Marker','o','MarkerSize',6,...
47      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
48      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
49 plot(t_dataD/3600,C_dataD,'-b','linewidth',1.5,...
50      'Marker','d','MarkerSize',6,...
51      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
52      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
53
54 title('C(x,t)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
55 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
56 axis([min(t_dataC)/3600 max(t_dataD)/3600 0 1.2*max(C_dataD)...
57      ])
58 xlabel('time [hours]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
59 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
60 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
61 %legend('t=1/(36*pi)','t=1/(4*pi)','t=4/pi')
62 box off
63 pause
64 CroutedDplot=CroutedD';
65 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,':r','linewidth',2.5)
66 %
67 % I trial values
68 Kx = 20; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
69 U = 0.35; % mean current velocity, m/s;
70 %Mean passage time at sections C e D
71 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
72 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)]';
73 for tt=1:length(t_rout)
74     t=t_rout(tt);
75     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
76     for ttt=1:length(t_dataC)
77         tau=t_dataC(ttt);
78         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
79             tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
80             /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
81     end
82     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
83 end
84 CroutedDplot=CroutedD';
85 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,'-r','linewidth',2.5)
86 legend('sectionC','sectionD','computed','Rutherford')
87 %
88 % II trial values
89 Kx = 30; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
90 U = 0.35; % mean current velocity, m/s;
91 %Mean passage time at sections C e D
92 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
93 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)]';
94 for tt=1:length(t_rout)

```



```

92     t=t_rout(tt);
93     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
94     for ttt=1:length(t_dataC)
95         tau=t_dataC(ttt);
96         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
            tmean(1))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
            /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
97     end
98     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
99 end
100 CroutedDplot=CroutedD';
101 plot(t_rout/3600,CroutedDplot,'-r','linewidth',2.5)
102 legend('sectionC','sectionD','K_x=10, U=0.35','K_x=20, U=0.35'...
    , 'K_x=30, U=0.35')

```

- **Esempio 4:** Utilizza il metodo del simplesso per calcolare i valori di U e K per cui la distribuzione di concentrazione calcolata nella sezione x_2 meglio approssima quella misurata in x_1 . Sono implementate due diverse funzioni obiettivo e, oltre al metodo della nuvola congelata, è utilizzata la soluzione di Hayami.

```

1  clear all; close all; clc
2  %
3  % Routing methods to estimate the Longitudinal Dispersion
4  % Coefficient by optimizing the parameter research through
5  % the simplex method
6  % Concentration data measured in the Waikato River (Nz)
7  %
8  % Load and plot observed data.
9  % Sezione C
10 dataC=load('Figure5_10plotCper10.txt');
11 t_dataC=dataC(:,1)*3600;
12 C_dataC=dataC(:,2)/1000000;
13 % Sezione D
14 dataD=load('Figure5_10plotDper10.txt');
15 t_dataD=dataD(:,1)*3600;
16 C_dataD=dataD(:,2)/1000000;
17 %
18 %Plot Observed data
19 figure(1); hold on
20 plot(t_dataC/3600,C_dataC,'-b','linewidth',1.5,...
21     'Marker','o','MarkerSize',6,...
22     'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
23     'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
24 plot(t_dataD/3600,C_dataD,'-b','linewidth',1.5,...
25     'Marker','d','MarkerSize',6,...
26     'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
27     'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
28 title('C(x,t)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
29 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
30 axis([min(t_dataC)/3600 max(t_dataD)/3600 0 1.2*max(C_dataD)...
    ])
31 xlabel('time [hours]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
32 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
33 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');

```

```

34 legend('sectionC','sectionD')
35 box off; pause
36 close(1)
37 %
38 % Definition and initialization of parameters and variables
39 M=6.5;           % mass of dye injected, kg
40 Kx = 20;         % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
41 U = 0.55;        % mean current velocity, m/s;
42 i_f=1.4862e-004; % channel slope
43 Do = 1.9;        % mean depth, m
44 Bo = 50;         % Average width, m
45 % Longitudinal Coordinates of sections C and D
46 xfix=[5000 6400];
47 %
48 % Determines the Taylor solution varying K and U, looking for
49 % the optimal couple of values
50 %
51 % Defines the function that calculates the solution
52 % by applying the simplex method
53 fun=@simpl;
54 %
55 % Initial trial values of K and U
56 %K = 15;         % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
57 %U = 0.4;         % mean current velocity, m/s;
58 input_par=[15;0.4];
59 %
60 figure(2)
61 hold on
62 [res,fval,exitflag,output] = fminsearch(fun,input_par);
63 %
64 % Optimal values of K and U
65 Kx =res(1);      % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
66 U = res(2);      % mean current velocity, m/s;
67 %
68 % Plots the solution by using the optimal values of K and U
69 figure(3); hold on
70 % Mean passage time at sections C e D
71 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
72 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)]';
73 for tt=1:length(t_rout)
74     t=t_rout(tt);
75     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
76     for ttt=1:length(t_dataC)
77         tau=t_dataC(ttt);
78     %
79 % Plots the solution by Routing a Temporal Concentration
80 % Profile by using the "Hayami Solution"
81 %
82     if t>tau
83         Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*(xfix(2)-xfix(1))/(t-tau)/...
            sqrt(4*pi*Kx*(t-tau))*exp(-(xfix(2)-xfix(1)-U*(t-...
            tau))^2/(4*Kx*(t-tau)));
84     else
85         Crouting(ttt)=0;
86     end
87 end
88 CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
89 end

```

```

90 CroutedDplot=CroutedD';
91 %Plots the observed concentration ptofile
92 plot(t_dataC/3600,C_dataC,'-b','linewidth',1.5,...
93      'Marker','o','MarkerSize',6,...
94      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
95      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
96 plot(t_dataD/3600,C_dataD,'-b','linewidth',1.5,...
97      'Marker','d','MarkerSize',6,...
98      'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
99      'MarkerFaceColor',[1 1 1]);
100 title('C(x,t)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
101 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
102 axis([min(t_dataC)/3600 max(t_dataD)/3600 0 1.2*max(C_dataD)...
103      ]) % definisce gli assi
104 xlabel('time [hours]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
105 ylabel('c(x,t) [mg/l]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
106 set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold');
107 box off
108 CroutedDplot=CroutedD';
109 %Plots the routed concentration ptofile
110 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,'-k','linewidth',2.5)
111 %
112 %Plots the solution with the values of K and U suggested by
113 % Rutherford on the basis of the "Frozen Cloud Method"
114 Kx = 20; % longitudinal dispersion coefficient, m^2/s
115 U = 0.55; % mean current velocity, m/s;
116 %Mean passage time at sections C e D
117 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
118 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)'];
119 for tt=1:length(t_rout)
120     t=t_rout(tt);
121     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
122     for ttt=1:length(t_dataC)
123         tau=t_dataC(ttt);
124     end
125 %Plots the solution by Routing a Temporal Concentration
126 %Profile by using the "Frozen Cloud Method"
127 Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
128     tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
129     /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
130 end
131 CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
132 CroutedDplot=CroutedD';
133 plot(t_rout/3600,CroudedDplot,'-r','linewidth',2.5)
134 legend('sectionC','sectionD','Hayami','Nuovola Congelata')

```

```

1 % Build the function to be optimized though the simplex method
2 %
3 function f_obiettivo=simpl(input_par)
4 %
5 Kx=input_par(1)
6 U=input_par(2)
7 %
8 % Definition and initialization of parameters and variables

```

```

9  xfix=[5000 6400];      %section location
10 M=6.5;                 % mass of dye injected, kg
11 i_f=1.4862e-004;      % channel slope
12 Do = 1.9;              % mean depth, m
13 Bo = 50;                % Average width, m
14 % Load observed data.
15 % Section C
16 dataC=load('Figure5_10plotCper10.txt');
17 t_dataC=dataC(:,1)*3600;
18 C_dataC=dataC(:,2)/1000000;
19 % Section D
20 dataD=load('Figure5_10plotDper10.txt');
21 t_dataD=dataD(:,1)*3600;
22 C_dataD=dataD(:,2)/1000000;
23 %Calculates the mean passage times at sections C e D
24 tmean=xfix/U + 2*Kx/U^2;
25 %Integration interval
26 t_rout=[min(t_dataC):15:max(t_dataC)'];
27 %Convolution integral
28 for tt=1:length(t_rout)
29     t=t_rout(tt);
30     %Calculates C(x2,t_rout(tt));
31     for ttt=1:length(t_dataC)
32         tau=t_dataC(ttt);
33     %-----
34 %Routing a Temporal Concentration Profile with the
35 %"Frozen Cloud Method"
36     Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*U/sqrt(4*pi*Kx*(tmean(2)-...
        tmean(1)))*exp(-U^2*((tmean(2)-tmean(1)-t+tau)^2)...
        /(4*Kx*(tmean(2)-tmean(1))));
37 %-----
38 %Routing a Temporal Concentration Profile with the
39 %"Hayami Solution"
40 %-----
41     %if t>tau
42     %     Crouting(ttt)=C_dataC(ttt)*(xfix(2)-xfix(1))/(t-tau)/...
        sqrt(4*pi*Kx*(t-tau))*exp(-(xfix(2)-xfix(1)-U*(t-tau))...
        ^2/(4*Kx*(t-tau)));
43     %else
44     %     Crouting(ttt)=0;
45     %end
46     end
47     CroutedD(tt)=trapz(t_dataC,Crouting);
48 end
49 %-----
50 %Selects the objective function to be minimized
51 %choice=1 minimize the sum of of the squares of the
52 %     differences between the concentrations calculated
53 %     and that measured in section D
54 %choice=2 %minimizes the sum of the squares of the ...
        differences
55 %     between the calculated peak concentration and that
56 %     measured in section D
57 choice =2;
58 if choice==1
59     for ttt=1:length(t_dataD)
60         tau=t_dataD(ttt);
61         %calculates the grid point t_rout nearer to tau

```

```

62         [ $\Delta t$ , index]=min(abs(t_rout-tau));
63         t_routCONFR(ttt)= t_rout(index);
64         CroutedD_CONFR(ttt)=CroudedD(index);
65     end
66     f_obiettivo=sum((CroudedD_CONFR-C_dataD').^2)
67 end
68
69 if choice==2
70     %determines the maximum of concentration measured in D
71     [maxC_dataD, index_max]=max(C_dataD);
72     timeC_dataD=t_dataD(index_max);
73
74     %determines the maximum of concentration calculated in D
75     [maxCroudedD, index_max]=max(CroudedD);
76     timeCroudedD=t_rout(index_max);
77
78     %set the objective function: distance between the peak
79     % of the measured and calculated C
80     f_obiettivo=sqrt((maxC_dataD-maxCroudedD)^2+(timeC_dataD-...
        timeCroudedD)^2)
81 end
82
83 hold on
84 plot(t_dataC/3600, C_dataC, '—b', 'linewidth', 1.5, ...
85      'Marker', 'o', 'MarkerSize', 6, ...
86      'MarkerEdgeColor', [0 0 1], ...
87      'MarkerFaceColor', [1 1 1]);
88 plot(t_dataD/3600, C_dataD, '—b', 'linewidth', 1.5, ...
89      'Marker', 'd', 'MarkerSize', 6, ...
90      'MarkerEdgeColor', [0 0 1], ...
91      'MarkerFaceColor', [1 1 1]);
92 title('C(x,t)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold')
93 set(gca, 'PlotBoxAspectRatio', [2 1 1]);
94 axis([min(t_dataC)/3600 max(t_dataD)/3600 0 1.2*max(C_dataD)...
95      ]) % definisce gli assi
96 xlabel('time [hours]', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
97 ylabel('c(x,t) [mg/l]', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
98 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
99 %legend('t=1/(36*pi)', 't=1/(4*pi)', 't=4/pi')
100 box off
101 CroutedDplot=CroudedD';
102 plot(t_rout/3600, CroutedDplot, '-r', 'linewidth', 2.)
103 legend('sectionC', 'sectionD', 'computed');
104 getframe;

```

Appendice C

In questa appendice sono riportati alcuni esempi di programmi Matlab relativi alla **dinamica degli inquinanti convenzionali** (i.e., CBOD, NBOD, OD) nei corsi d'acqua.

- **Esempio 1.** Grafica la concentrazione di BOD, B , il deficit di ossigeno, D , e la concentrazione di ossigeno disciolto, O , in funzione della distanza dalla sorgente. Confronta inoltre il tasso di deossigenazione, r_d con il tasso di riossigenazione, r_a , permettendo di verificare che il valore critico del deficit di ossigeno si manifesta quando $r_d = r_a$.

```
1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the Streeter-Phelps equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 dx=10; %spatial step, m
7 L_x=150000; %total length of the domain, m
8 x=[0:dx:L_x]; %x computational grid
9 Q=16093.4; %river flowrate, l/s
10 Qw=160934; %wastewater mass discharge rate, mg/s
11 Bzero=Qw/Q; %ultimate CBOD at x=0, mg/l
12 Os=8.0; %saturated oxygen, mg/l
13 Ozero=8.0; %dissolved oxygen at x=0, mg/l
14 Dzero=Os-Ozero; %oxygen deficit at x=0, mg/l
15 U=0.3048; %mean stream velocity, m/s
16
17 rd = 0.6; % first order deoxygenation rate, 1/day
18 ra = 2.0; % first order reareation rate, 1/day
19 rd = 0.6/86400; % first order deoxygenation rate, 1/s
20 ra = 2.0/86400; % first order reareation rate, 1/s
21
22 B=zeros(1,length(x)); %ultimate CBOD along x, mg/l
23 O=zeros(1,length(x)); %dissolved oxygen along x, mg/l
24 D=zeros(1,length(x)); %oxygen deficit along x, mg/l
25 %
26 % cycle over all sections
27 for i=1:length(x)
28     % ultimate CBOD concentration along x
29     B(i)=Bzero*exp(-rd*x(i)/U);
30     % dissolved oxygen Deficit along x
31     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*Bzero)/(ra-rd))*(exp(-rd*...
        *x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
```

```

32     % dissolved oxygen Concentration along x
33     O(i)=Os-(Os-Ozero)*exp(-ra*x(i)/U) - ((rd*Bzero)/(ra-rd))...
        *(exp(-rd*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
34     %O2(i)=Os-D(i);
35 end
36
37 % Critical Distance
38 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/Bzero));
39 % Critical Deficit
40 D_c=(rd*Bzero/ra)*exp(-rd*x_c/U);
41 %
42 %plots
43 %
44 subplot(3,2,1)
45 plot(x,B,'r','LineWidth',2.5);
46 title('Ultimate BOD concentration','FontSize',12,'FontWeight',...
        'bold')
47 axis([0 L_x 0 1.2*Bzero])
48 xlabel('Downstream distance [m]');
49 ylabel('B [mg/l]');
50 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
51 box off
52
53 subplot(3,2,2)
54 plot(x/U/86400,log(B),'r','LineWidth',2.5);
55 %axis([0 L_x/U/86400 0 4])
56 xlabel('Travel time [days]');
57 ylabel('Log(B)');
58 hold on
59 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
60 box off
61 pause
62
63 subplot(3,2,3)
64 plot(x,D,'b','LineWidth',2.5);
65 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
        bold')
66 axis([0 L_x 0 2])
67 hold on
68 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
69 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
        'MarkerFaceColor','b',...
        'MarkerSize',6)
70
71 xlabel('Downstream distance [m]');
72 ylabel('D [mg/l]');
73 plot([x_c,x_c],[0,D_c],'b:');
74 plot([0,x_c],[D_c,D_c],'b:');
75
76 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
77 box off
78
79 subplot(3,2,4)
80 plot(x,ra*D*86400,'b—','LineWidth',2.5);
81 title('Deoxygenation vs Reareation','FontSize',12,'FontWeight'...
        , 'bold')
82 axis([0 L_x 0 8])
83 hold on
84 plot(x,rd*B*86400,'b:', 'LineWidth',2.5);
85 legend('r_aD reareation','r_dB deoxygenation')

```

```

86
87 %Determines the intersection point at which  $r_a \cdot D = r_d \cdot L$ 
88 Bcrit=rd*Bzero*exp(-rd*x_c/U);
89 inters_pointplot=plot(x_c,Bcrit*86400,'ob');
90 set(inters_pointplot,'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','...
    b','MarkerSize',6)
91 xlabel('Downstream distance [m]');
92 ylabel('r_aD, r_dB [mg/l-day]');
93 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
94 box off
95 pause
96
97 subplot(3,2,5)
98 plot(x,0,'k','LineWidth',2.5);
99 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
100 axis([0 L_x 5.5 8.5])
101 xlabel('Downstream distance [m]');
102 ylabel('O [mg/l]');
103 hold on
104 xcpointplot2=plot(x_c,(0s-D_c),'ok');
105 set(xcpointplot2,'MarkerEdgeColor','k','...
    'MarkerFaceColor','k','...
    'MarkerSize',6)
106
107 %
108 %-----
109 %Plots a straight line connecting the points (0,0s), (L_x,0s)
110 Osatplot=plot([0,L_x],[0s,0s],'k-','LineWidth',1.5);
111 %Plots a straight line connecting the points (x_c,0), (x_c,0s-...
    D_c)
112 plot([x_c,x_c],[0,0s-D_c],'k:');
113 %Plots a straight line connecting the points (0,0s-D_c), (x_c...
    ,0s-D_c)
114 plot([0,x_c],[0s-D_c,0s-D_c],'k:');
115 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
116 box off

```

- **Esempio 2.** Grafica: i) il deficit di ossigeno, D , in funzione della distanza dalla sorgente all'aumentare i) della portata volumetrica di inquinante, ii) della temperatura, iii) della portata volumetrica del corso d'acqua, iv) del deficit iniziale di ossigeno disciolto, evidenziando in tutti i casi il comportamento del deficit critico, D_c , e della distanza critica, x_c ;

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the Streeter-Phelps equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 dx=100; % space integration pace, miles
7 L_x=100000; % m total length of the domain
8 x=[0:dx:L_x]; % computational domain along x axis
9 Q=16093.44; % river flowrate, l/s
10 Qw=160934.4; % wastewater mass discharge rate, mg/s
11 B0=Qw/Q; % CBOD concentration at x=0, mg/l (I case)
12 Os=8.0; % saturated oxygen concentration, mg/l

```



```

13 Ozero=8.0;          % dissolved oxygen concentration at x=0, mg/...
14     l
14 Dzero=Os-Ozero;    % dissolved oxygen deficit at x=0., mg/l
15 U=0.3048;          % mean stream velocity, m/s
16 H=1.056;           % mean water depth, m
17 B=50;              % mean stream width, m
18 rd = 0.6;          % first order deoxygenation rate, 1/day
19 ra = 2.0;           % first order reareation rate, 1/day
20 rd = 0.6/86400;     % first order deoxygenation rate, 1/s
21 ra = 2.0/86400;     % first order reareation rate, 1/s
22 %
23 %                  Effect of waste discharge
24 Qw_2=Qw*2;         %wastewater mass discharge rate, mg/s (II case)
25 B0_2=Qw_2/Q;       %CBOD concentration at x=0., mg/l (II case)
26
27 D=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x mg/l (I case)
28 D_2=zeros(1,length(x));%Oxygen Deficit along x, mg/l (II case)
29 for i=1:length(x)
30     % Oxygen Deficit along x (I case)
31     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0)/(ra-rd))*(exp(-rd*x(...
32         i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
33     % Oxygen Deficit along x (II case)
34     D_2(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0_2)/(ra-rd))*(exp(-...
35         rd*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
36 end
37
38 % Critical Distance
39 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/B0));
40 x_c_2=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/B0_2));
41 % Critical Deficit
42 D_c=(rd*B0/ra)*exp(-rd*x_c/U);
43 D_c_2=(rd*B0_2/ra)*exp(-rd*x_c_2/U);
44 %
45 figure(1); hold on
46 subplot(2,2,1)
47 plot(x,D,'b','LineWidth',2);
48 plot(x,D_2,'-r','LineWidth',2);
49 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
50 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
51     'MarkerFaceColor','b',...
52     'MarkerSize',8);
53 xc_2pointplot=plot(x_c_2,D_c_2,'or');
54 set(xc_2pointplot,'MarkerEdgeColor','r',...
55     'MarkerFaceColor','r',...
56     'MarkerSize',8);
57 title('Dissolved oxygen deficit for increasing Q_w values','...
58     FontSize',12,'FontWeight','bold');
59 axis([0 L_x 0 4]);
60 xlabel('Downstream distance [m]');
61 ylabel('D [mg/l]');
62 legend('Q_w=Q_w_0','Q_w=2Q_w_0');
63 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
64 box off
65 %
66 %                  Effect of varying Critical Deficit
67 D_c_2var=zeros(1,10);
68 Qw_2var=[Qw:(Qw_2-Qw)/10:Qw_2];
69 B0_2var=Qw_2var/Q;

```

```

67 B0_2=B0;
68 for i=1:length(B0_2var)
69     % dissolved oxygen Deficit along x (II case)
70     D_c_2var(i)=(rd*B0_2var(i)/ra)*exp(-rd*x_c/U);
71 end
72 subplot(2,2,2)
73 plot(Qw_2var,D_c_2var,'k','LineWidth',2);
74 title('Critical Deficit D_c for increasing Q_w values','...
75     FontSize',12,'FontWeight','bold');
76 axis([Qw Qw_2 0 4]);
77 xlabel('Waste Discharge [mg/s]');
78 ylabel('Critical Deficit D_c [mg/l]');
79 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
80 box off
81 %-----
82 %                               Effect of temperature
83 %T=20C, rd = rd20 = 0.6 1/day
84 %T=40C, rd=rd20*THETA^(40-20)=0.6*1.048^20, with THETA=1.048
85 rd_2 = 0.6*1.048^(20); %deoxygenation rate, 1/day
86 rd_2 = rd_2/86400;      %deoxygenation rate, 1/s
87 %T=20C, ra = ra20 = 2.0 1/day
88 %T=40C, ra=ra20*THETA^(40-20)=0.6*1.0718^20, with THETA=1.0718
89 ra_2 = 2.0*1.024^(20); %re-aeration rate, 1/day
90 ra_2 = ra_2/86400;      %re-aeration rate, 1/s
91
92 D=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l (I ...
93     case)
94 D_2=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l (II ...
95     case)
96 for i=1:length(x)
97     % Oxygen Deficit along x (I case)
98     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0)/(ra-rd))*(exp(-rd*x(...
99         i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
100     % Oxygen Deficit along x (II case)
101     D_2(i)=Dzero*exp(-ra_2*x(i)/U) + ((rd_2*B0)/(ra_2-rd_2))*(...
102         exp(-rd_2*x(i)/U)-exp(-ra_2*x(i)/U));
103 end
104 % Critical Distance
105 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/B0));
106 x_c_2=(U/(ra_2-rd_2))*log((ra_2/rd_2)*(1-(ra_2-rd_2)/rd_2*...
107     Dzero/B0));
108 % Critical Deficit
109 D_c=(rd*B0/ra)*exp(-rd*x_c/U);
110 D_c_2=(rd_2*B0/ra_2)*exp(-rd_2*x_c_2/U);
111 %-----
112 % Plots
113 %-----
114 subplot(2,2,3); hold on
115 plot(x,D,'b','LineWidth',2);
116 plot(x,D_2,'—r','LineWidth',2);
117 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
118 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
119     'MarkerFaceColor','b',...
120     'MarkerSize',8)
121 xc_2pointplot=plot(x_c_2,D_c_2,'or');
122 set(xc_2pointplot,'MarkerEdgeColor','r',...

```

```

119         'MarkerFaceColor','r',...
120         'MarkerSize',8);
121 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
122
123 title('Dissolved oxygen deficit for increasing T values','...
        FontSize',12,'FontWeight','bold')
124 axis([0 Lx 0 4]);
125 xlabel('Downstream distance [m]');
126 ylabel('D [mg/l]');
127 legend('T=20C','T=40C');
128 box off
129 %
130 % Effects of temperature on critical deficit
131 T_var=[20:1:40];
132 D_c_2var=zeros(1,length(T_var)); % varying Critical Deficit
133 x_c_2var=zeros(1,length(T_var)); % varying Critical Deficit
134 for i=1:length(T_var)
135     rd_2var(i) = 0.6*1.048^(T_var(i)-20);
136     ra_2var(i) = 2.0*1.024^(T_var(i)-20);
137 end
138 rd_2var = rd_2var/86400;
139 ra_2var = ra_2var/86400;
140
141 for i=1:length(T_var)
142     x_c_2var(i)=(U/(ra_2var(i)-rd_2var(i)))*log((ra_2var(i)/...
        rd_2var(i))*(1-(ra_2var(i)-rd_2var(i))/rd_2var(i)*...
        Dzero/B0));
143     D_c_2var(i)=(rd_2var(i)*B0/ra_2var(i))*exp(-rd_2var(i)*...
        x_c_2var(i)/U);
144 end
145 subplot(2,2,4)
146 plot(T_var,D_c_2var,'k','LineWidth',2);
147
148 title('Critical Deficit D_c for increasing T values','FontSize...
        ',12,'FontWeight','bold')
149 axis([20 40 1.7 2.5]);
150 xlabel('T values [C]');
151 ylabel('Critical Deficit D_c [mg/l]');
152 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
153 box off
154 %
155 % Effect of river flowrate Q
156 % If Q increases:
157 %     B0 decreases;
158 %     u, H increase (according e.g., to Strickler relation)
159 %     ra decreases
160 Q_2=Q*2; % river flowrate, l/s (2nd case)
161 B0_2=Qw/Q_2; % CBOD at x=0., mg/l (2nd case)
162 H_2=H*(Q_2/Q)^(3/5);
163 U_2=(Q_2/1000)/(B*H_2);
164 % 1ft/s=0.3048 m/s; 1ft=30.48 centimeters
165 % first order re-aeration rate, 1/day
166 ra_2=12.9*((Q_2/1000/B/H_2)/0.3048)^0.5/(H_2/0.3048)^1.5;
167 % first order reareation rate, 1/s
168 ra_2=ra_2/86400;
169
170 D=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l (I case)
171 D_2=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l (II case...
```

```

    )
172 for i=1:length(x)
173     %Oxygen Deficit along x (I case)
174     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0)/(ra-rd))*(exp(-rd*x(...
        i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
175     %Oxygen Deficit along x (II case)
176     D_2(i)=Dzero*exp(-ra_2*x(i)/U_2) + ((rd*B0_2)/(ra_2-rd))*(...
        exp(-rd*x(i)/U_2)-exp(-ra_2*x(i)/U_2));
177 end
178
179 % Critical Distance
180 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/B0));
181 x_c_2=(U_2/(ra_2-rd))*log((ra_2/rd)*(1-(ra_2-rd)/rd*Dzero/B0_2...
    ));
182 % Critical Deficit
183 D_c=(rd*B0/ra)*exp(-rd*x_c/U);
184 D_c_2=(rd*B0_2/ra_2)*exp(-rd*x_c_2/U_2);
185 %
186 figure(2)
187 subplot(2,2,1); hold on
188 plot(x,D,'b','LineWidth',2);
189 plot(x,D_2,'-r','LineWidth',2);
190
191 title('Dissolved oxygen deficit for increasing Q values','...
    FontSize',12,'FontWeight','bold')
192 axis([0 L_x 0 2])
193 xlabel('Downstream distance [m]');
194 ylabel('D [mg/l]');
195 legend('Q=Q_0','Q=2Q_0')
196 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
197 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
    'MarkerFaceColor','b',...
    'MarkerSize',8)
198 xc_2pointplot=plot(x_c_2,D_c_2,'or');
199 set(xc_2pointplot,'MarkerEdgeColor','r',...
    'MarkerFaceColor','r',...
    'MarkerSize',8)
200
201 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
202 box off
203 %
204 %
205 %
206 %
207 %
208 % Effect of Do
209 D=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l, I case
210 D_2=zeros(1,length(x)); %Oxygen Deficit along x, mg/l, II case
211 Os=10.0; %saturated oxygen, mg/l
212 Ozero=10.0; %oxygen concentration at x=0, mg/l
213 Dzero=Os-Ozero; %Oxygen deficit at x=0, mg/l, I case
214 Dzero_2=2; %Oxygen deficit at x=0, mg/l, II case
215 B0=10;
216 for i=1:length(x)
217     %oxygen Deficit along x (1st case)
218     D(i) = Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0)/(ra-rd))*(exp(-...
        rd*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
219     %oxygen Deficit along x (2nd case)
220     D_2(i)=Dzero_2*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*B0)/(ra-rd))*(exp(-...
        rd*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
221 end
222 % Critical Distance

```

```

223 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/B0));
224 x_c_2=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero_2/B0));
225 % Critical Deficit
226 D_c=(rd*B0/ra)*exp(-rd*x_c/U);
227 D_c_2=(rd*B0/ra)*exp(-rd*x_c_2/U);
228
229 subplot(2,2,3); hold on
230 plot(x,D,'b','LineWidth',2);
231 plot(x,D_2,'-r','LineWidth',2);
232 title('Dissolved oxygen deficit for increasing D_0 values','...
      FontSize',12,'FontWeight','bold');
233 axis([0 L_x 0 3]);
234 xlabel('Downstream distance [m]');
235 ylabel('D [mg/l]');
236 legend('D_0=0','D_0=2');
237 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
238 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
239             'MarkerFaceColor','b',...
240             'MarkerSize',8);
241 xc_2pointplot=plot(x_c_2,D_c_2,'or');
242 set(xc_2pointplot,'MarkerEdgeColor','r',...
243             'MarkerFaceColor','r',...
244             'MarkerSize',8);
245 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
246 box off

```

- **Esempio 3.** Grafica: i) la concentrazione di CBOD, B , ii) il deficit di ossigeno, D , e iii) la concentrazione di ossigeno disciolto, o , in funzione della distanza dalla sorgente, in assenza e in presenza di sedimentazione. In particolare, viene evidenziato come, in presenza di sedimentazione, il deficit critico D_c diminuisce e la sezione in cui si realizza, x_c si sposta verso monte. Confronta inoltre il tasso di deossigenazione, r_d , con il tasso di riossigenazione, r_a , permettendo di verificare che il valore critico del deficit di ossigeno si manifesta quando $r_d = r_a$.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the Streeter-Phelps equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 dx=100;           % spatial integration pace, m
7 L_x=150000;       % total length of the domain, m
8 x=[0:dx:L_x];    % computational domain along x axis
9 Q=16093.4;        % river flowrate, l/s
10 Qw=160934;        % wastewater mass discharge rate, mg/s
11 Bzero=Qw/Q;       % CBOD concentration at x=0., mg/l
12 Os=8.0;           % saturated oxygen concentration, mg/l
13 Ozero=8.0;        % oxygen concentration at x=0., mg/l
14 Dzero=Os-Ozero;   % doxygen deficit at x=0., mg/l
15 U=0.3048;         % stream mean velocity, m/s
16
17 rd = 0.6;         % deoxygenation rate, 1/day
18 ra = 3.0;         % re-aeration rate, 1/day
19 rs = 2.0;         % deoxygenation + sedimentation rate, 1/day
20 rd = rd/86400;    % deoxygenation rate, 1/s

```

```

21 ra = ra/86400; % first order reareation rate, 1/s
22 rs = rs/86400; % deoxygenation + sedimentation rate, 1/day
23
24 % without sedimentation
25 B=zeros(1,length(x)); %CBOD concentration along x, mg/l
26 D=zeros(1,length(x)); %oxygen Deficit along x, mg/l
27 O=zeros(1,length(x)); %oxygen concentration along x, mg/l
28
29 % with sedimentation
30 Bsed=zeros(1,length(x)); %CBOD concentration along x, mg/l
31 Dsed=zeros(1,length(x)); %oxygen Deficit along x, mg/l
32 Osed=zeros(1,length(x)); %oxygen concentration along x, mg/l
33 %
34 for i=1:length(x)
35     %CBOD concentration along x
36     B(i)=Bzero*exp(-rd*x(i)/U);
37     %CBOD concentration along x in case of sedimentation
38     Bsed(i)=Bzero*exp(-rs*x(i)/U);
39     %oxygen Deficit along x
40     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*Bzero)/(ra-rd))*(exp(-rd...
        *x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
41     %oxygen Deficit along x in case of sedimentation
42     Dsed(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*Bzero)/(ra-rs))*(exp...
        (-rs*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
43     %oxygen Concentration along x
44     O(i)=Os-(Os-Ozero)*exp(-ra*x(i)/U) - ((rd*Bzero)/(ra-rd))...
        *(exp(-rd*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U));
45     %oxygen Concentration along x in case of sedimentation
46     Osed(i)=Os-Dsed(i);
47 end
48
49 % Critical Distance
50 x_c=(U/(ra-rd))*log((ra/rd)*(1-(ra-rd)/rd*Dzero/Bzero));
51 xsed_c=(U/(ra-rs))*log((ra/rs)*(1-(ra-rs)/rd*Dzero/Bzero));
52 % Critical Deficit
53 D_c=(rd*Bzero/ra)*exp(-rd*x_c/U);
54 Dsed_c=(rd*Bzero/ra)*exp(-rs*xsed_c/U);
55 %
56 %plotting
57 subplot(3,2,1); hold on
58 plot(x,B,'b','LineWidth',2.5);
59 plot(x,Bsed,'—r','LineWidth',2.5);
60
61 title('Ultimate CBOD concentration','FontSize',12,'FontWeight'...
    , 'bold')
62 axis([0 L_x 0 1.2*Bzero])
63 xlabel('Downstream distance [m]');
64 ylabel('B [mg/l]');
65 legend('deoxygen', 'deoxygen + sediment')
66 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
67 box off
68
69 subplot(3,2,2); hold on
70 plot(x/U/86400,log(B),'b','LineWidth',2.5);
71 plot(x/U/86400,log(Bsed),'—r','LineWidth',2.5);
72 xlabel('Travel time [days]');
73 ylabel('Log(B)');
74 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);

```

```

75 box off
76 %
77 subplot(3,2,3); hold on
78 plot(x,D,'b','LineWidth',2.5);
79 plot(x,Dsed,'—r','LineWidth',2.5);
80 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
    bold')
81 axis([0 L_x 0 2])
82 hold on
83 xlabel('Downstream distance [m]');
84 ylabel('D [mg/l]');
85 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
86 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
87     'MarkerFaceColor','b',...
88     'MarkerSize',6);
89 xsedcpointplot=plot(xsed_c,Dsed_c,'or');
90 set(xsedcpointplot,'MarkerEdgeColor','r',...
91     'MarkerFaceColor','r',...
92     'MarkerSize',6);
93 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
94 box off
95
96 subplot(3,2,4); hold on
97 plot(x,ra*D*86400,'b-','LineWidth',2.5);
98 plot(x,rd*B*86400,'b:','LineWidth',2.5);
99 title('Deoxygenation vs Reaeration','FontSize',12,'FontWeight'...
    , 'bold')
100 axis([0 L_x 0 7])
101 box off
102 plot(x,ra*Dsed*86400,'r—','LineWidth',2.5);
103 plot(x,rd*Bsed*86400,'r:','LineWidth',2.5);
104 xlabel('Downstream distance [m]');
105 ylabel('r_aD vs r_dB, r_sB [mg/l-day]');
106 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
107 box off
108 %
109 subplot(3,2,5); hold on
110 plot(x,O,'b','LineWidth',2.5);
111 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
112 axis([0 L_x 6.5 8.5])
113 xlabel('Downstream distance [m]');
114 ylabel('O [mg/l]');
115 plot(x,Osed,'—r','LineWidth',2.5);
116 xcpointplot2=plot(x_c,(Os-D_c),'ob');
117 set(xcpointplot2,'MarkerEdgeColor','b',...
118     'MarkerFaceColor','b',...
119     'MarkerSize',6)
120 xsedcpointplot2=plot(xsed_c,(Os-Dsed_c),'or');
121 set(xsedcpointplot2,'MarkerEdgeColor','r',...
122     'MarkerFaceColor','r',...
123     'MarkerSize',6);
124 Osatplot=plot([0,L_x],[Os,Os],'k-','LineWidth',1.5);
125 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
126 box off

```

- **Esempio 4.** Grafica, per modello di Streeter-Phelps generalizzato, il vari

contributi al deficit di ossigeno (CBOD, NOD, SOD, etc), la relativa somma, D e la concentrazione di ossigeno disciolto, O , in funzione della distanza dalla sorgente.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of generalized Streeter-Phelps equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 dx=100;           %spatial integration pace, m
7 L_x=200000;       %total length of the domain, m
8 x=[0:dx:L_x];     %computational domain along x axis
9 Q=16093.4;        %river flowrate, l/s
10 Qw=160934;        %wastewater mass discharge rate, mg/s
11 Bzero=Qw/Q;       %ultimate CBOD concentration at x=0., mg/l
12 Bzero=10;         %ultimate CBOD concentration at x=0., mg/l
13 Os=10.5;          %saturated oxygen concentration, mg/l
14 Ozero=10.0;       %dissolved oxygen concentration at x=0, mg/l
15 Dzero=Os-Ozero;   %dissolved oxygen deficit at x=0., mg/l
16 Bzero=Qw/Q;       %ultimate CBOD concentration at x=0., mg/l
17 U=0.3048;         %mean stream velocity, m/s
18 H=3.0;            %mean water depth, m
19 rd = 0.6;         %CBOD deoxygenation rate, 1/day
20 ra = 1.0;         %CBOD reareation rate, 1/day
21 rs = 2.0;         %CBOD deoxygenation+sedimentation rate, 1/day
22 rn = 2.0;         %NBOD deoxygenation rate, 1/day
23
24 rd = rd/86400;    %CBOD deoxygenation rate, 1/s
25 ra = ra/86400;    %CBOD reareation rate, 1/s
26 rs = rs/86400;    %CBOD deoxygenation + sedimentation rate, 1/s
27 rn = rn/86400;    %NBOD deoxygenation rate, 1/s
28
29 Nzero=2.;         %NBOD concentration at x=0., mg/l
30 S=5.0;            %Sediment oxygen demand g m^2/day
31 S=S*1000/86400/100; %Sediment oxygen demand mg/(dm^2-s)
32 SsuH=S/(10*H);    %Sediment oxygen demand mg/(l-s)
33
34 P_R=1.5;          %Daily averaged net primary production, mg/l/...
                    %day
35 P_R=P_R/86400;    %Daily averaged net primary production, mg/l/s
36
37 Bb=1.0;           % Background BOD, mg/l
38
39 B=zeros(1,length(x)); % ultimate CBOD concentration along x, ...
                    %mg/l
40 D=zeros(1,length(x)); % dissolved oxygen Deficit along x, ...
                    %mg/l
41 O=zeros(1,length(x)); % dissolved oxygen Concentration ...
                    %along x, mg/l
42 %
43 for i=1:length(x)
44     % ultimate CBOD concentration along x
45     B(i)=Bzero*exp(-rd*x(i)/U);
46     % dissolved oxygen Deficit along x
47     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*Bzero)/(ra-rs))*(exp(-rs...
                    *x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U))...
```



```

48         + ((rn*Nzero)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/...
          U))...
49         + SsuH/(ra)*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
50         + (-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
51         + rd*Bb/ra ;
52     D0term(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U);
53     CBOD(i)=((rd*Bzero)/(ra-rs))*(exp(-rs*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)...
          /U));
54     NBOD(i)=((rn*Nzero)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)...
          /U));
55     Sterm(i)=SsuH/(ra)*(1-exp(-ra*x(i)/U));
56     R_P(i)=(-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U));
57     Bbterm(i)=rd*Bb/ra;
58 end
59 %
60 %plot results
61
62 figure(1); hold on
63 D0termplot=plot(x/U/86400,D0term,'b—','LineWidth',1.5);
64 CBODplot=plot(x/U/86400,CBOD,'b—','LineWidth',1.5);
65 NBODplot=plot(x/U/86400,NBOD,'c—','LineWidth',3);
66 Stermplot=plot(x/U/86400,Sterm,'r—','LineWidth',2);
67 R_Pplot=plot(x/U/86400,R_P,'—g','LineWidth',3);
68 Bbtermplot=plot(x/U/86400,Bbterm,'r:','LineWidth',2.5);
69
70 title('Influence of the various terms','FontSize',12,'...
       FontWeight','bold')
71 axis([0 5 -2 2])
72 xlabel('Travel time [days]');
73 ylabel('D — components [mg/l]');
74 legend('D_0','CBOD','NBOD','S','R-P','D_b')
75 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
76 pause
77
78 figure(2)
79 D0termplot=plot(x/U/86400,D,'b—','LineWidth',2.5);
80 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
       bold')
81 axis([0 5 -1 5])
82 xlabel('Travel time [days]');
83 ylabel('D [mg/l]');
84 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
85 pause
86
87 figure(3);hold on
88 O(:)=Os-D(:);
89 plot(x/U/86400,O,'k','LineWidth',2.5);
90 Csatplot=plot([0,L_x/U/86400],[Os,Os],'k-','LineWidth',1.5);
91 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...
       FontWeight','bold')
92 xlabel('Downstream distance [m]');
93 ylabel('O [mg/l]');
94 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);

```

- **Esempio 5.** Ulteriore esempio di applicazione del modello di Streeter-Phelps generalizzato.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of generalized Streeter-Phelps equation
4 %
5 % Definition and initialization of parameters and variables
6 dx=500;           %spatial integration pace, m
7 L_x=1000000;      %total length of the domain,m
8 x=[0:dx:L_x];     %computational domain along x axis
9 Cs=10.5;          %saturated oxygen concentration, mg/l
10 C0=10.0;          %dissolved oxygen concentration at x=0., mg/l
11 D0=0.5;           %dissolved oxygen deficit at x=0, mg/l D0=C0-...
    C0;
12 L0=10;            %ultimate CBOD concentration at x=0., mg/l
13 N0=5.;            %ultimate NBOD concentration at x=0., mg/l
14
15 rd = 0.3;          %CBOD deoxygenation rate, 1/day
16 ra = 0.4;          %CBOD reareation rate, 1/day
17 rs = 0.0;          %CBOD sedimentation rate, 1/day
18 rr = rs+rd;        %CBOD deoxygenation + sedimentation rate, 1/...
    day
19 rn = 0.25;         %NBOD deoxygenation rate, 1/day
20
21 rd = rd/86400;      %CBOD deoxygenation rate, 1/s
22 ra = ra/86400;      %CBOD reareation rate, 1/s
23 rr = rr/86400;      %CBOD deoxygenation + sedimentation rate, 1/s
24 rn = rn/86400;      %NBOD deoxygenation rate, 1/s
25
26 U=0.4;             %mean stream velocity, m/s
27 H=3.0;             % mean water depth, m
28
29 S=5.0;             %Sediment oxygen demand g/(m^2-day)
30 S=S*1000/86400;    %Sediment oxygen demand mg/(m^2-s)
31 SsuH=S/H/10/100;   %Sediment oxygen demand mg/(l-s)
32
33 P_R=5.0;           %Daily averaged net primary production, mg/l/...
    day
34 P_R=P_R/86400;     %Daily averaged primary production, mg/l/s
35
36 Bb=1.0;            % Background BO Deficit, mg/l
37
38 L=zeros(1,length(x)); %CBOD concentration along x, mg/l
39 D=zeros(1,length(x)); %oxygen Deficit along x, mg/l
40 C=zeros(1,length(x)); %oxygen Concentration along x, mg/l
41 %
42 for i=1:length(x)
43     % ultimate CBOD concentration along x
44     L(i)=L0*exp(-rd*x(i)/U);
45     % dissolved oxygen Deficit along x
46     D(i)=D0*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*L0)/(ra-rr))*(exp(-rr*x(i)/...
        U)-exp(-ra*x(i)/U))...
47         + ((rn*N0)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U))...
        ...
48         + SsuH/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
49         + (-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
50         + rd*Bb/ra ;
51     D0term(i)=D0*exp(-ra*x(i)/U);
52     CBOD(i)=((rd*L0)/(ra-rr))*(exp(-rr*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U))...

```

```

    );
53    NBOD(i)=((rn*N0)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U)...
    );
54    Sterm(i)=SsuH/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U));
55    R_P(i)=(-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U));
56    Bbterm(i)=rd*Bb/ra;
57 end
58 %
59 %plotting
60 figure(1); hold on
61
62 D0termplot=plot(x/U/86400,D0term,'b—','LineWidth',1.5);
63 CBODplot=plot(x/U/86400,CBOD,'b—','LineWidth',2);
64 NBODplot=plot(x/U/86400,NBOD,'c—','LineWidth',2);
65 Stermplot=plot(x/U/86400,Sterm,'r—','LineWidth',2);
66 R_Pplot=plot(x/U/86400,R_P,'g','LineWidth',1.5);
67 Lbtermplot=plot(x/U/86400,Bbterm,'r:','LineWidth',1.5);
68
69 title('Influence of the various terms','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
70 %axis([0 5 -2 2])
71 xlabel('Travel time [days]');
72 ylabel('D — components [mg/l]');
73 legend('D_0','CBOD B','NBOD N','S','R-P','B_b')
74
75 figure(2)
76 D0termplot=plot(x/U/86400,D,'b—','LineWidth',2.5);
77 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
    bold')
78 %axis([0 5 -1 3])
79 xlabel('Travel time [days]');
80 ylabel('D [mg/l]');
81
82 figure(3); hold on
83 C(:)=Cs-D(:);
84 plot(x/U/86400,C,'k','LineWidth',2.5);
85 Csatplot=plot([0,L_x/U/86400],[Cs,Cs],'k—','LineWidth',1.5);
86 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
87 xlabel('Travel time [days]');
88 ylabel('O [mg/l]');

```

- **Esempio 6.** Grafica: i) la concentrazione di CBOD, B , ii) il deficit di ossigeno, D , iii) la concentrazione di ossigeno disciolto, O , in funzione della distanza dalla sorgente, in assenza e in presenza di dispersione longitudinale. Evidenzia inoltre come all'aumentare della velocità U tendano a dominare i processi avvevativi, mentre all'aumentare di K prevalgono i processi dispersivi.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the Streeter-Phelps equation
4 % generalized to the case of non negligible dispersion
5 %
6 % Definition and initialization of parameters and variables
7 dx=100; %space integration step, m

```

```

8  L_x=200000;%0;      %total length of the domain, m
9  x=[0:dx:L_x];      %computational grid along x axis
10 xdisp=[-L_x:dx:L_x]; %computational domain along x axis
11      %in the case of dispersion
12  Q=16093.4;          %river flowrate, l/s
13  W=160934;           %wastewater mass discharge rate, mg/s
14  Bzero=W/Q;          %CBOD concentration at x=0, mg/l
15  Os=10.0;            %saturated oxygen concentration, mg/l
16  Ozero=10.0;         %oxygen concentration at x=0, mg/l
17  Dzero=Os-Ozero;     %oxygen deficit at x=0, mg/l
18  U=0.3048,*10;       %mean stream velocity, m/s
19  r_d = 0.6;          %deoxygenation rate, 1/day
20  r_a = 2.0;          %re-aeration rate, 1/day
21  k_r = 3.0;          %deoxygenation + sedimentation rate, 1/day
22
23  r_d = r_d/86400;     %deoxygenation rate, 1/s
24  r_a = r_a/86400;     %re-aeration rate, 1/s
25  k_r = k_r/86400;     %deoxygenation + sedimentation rate, 1/day
26
27  Kx=10*15*2589988.11/86400; %Dispersion coefficient (m^2/s)
28      %1mi^2=2589988.11 m^2
29  m_1=sqrt(1+4*r_d*Kx/U/U);
30  m_2=sqrt(1+4*r_a*Kx/U/U);
31
32  %case of non negligible dispersion
33  Bzerodisp=W/Q/m_1;   %CBOD concentration at x=0, mg/l
34  Bdisp=zeros(1,length(xdisp)); %CBOD along x, mg/l
35  Ddisp=zeros(1,length(xdisp)); %oxygen Deficit along x, mg/l
36  Odisp=zeros(1,length(xdisp)); %oxygen concentration along x, ...
37      mg/l
38  %case of negligible dispersion
39  B=zeros(1,length(x)); %CBOD concentration along x, mg/l
40  D=zeros(1,length(x)); %oxygen Deficit along x, mg/l
41  O=zeros(1,length(x)); %oxygen Concentration along x, mg/l
42  %
43  % Case of pure advection
44  for i=1:length(x)
45      %CBOD concentration along x
46      B(i)=Bzero*exp(-r_d*x(i)/U);
47      %dissolved oxygen Deficit along x
48      D(i)=Dzero*exp(-r_a*x(i)/U) + ((r_d*Bzero)/(r_a-r_d))*(exp...
49          (-r_d*x(i)/U)-exp(-r_a*x(i)/U));
50      %dissolved oxygen Concentration along x
51      O(i)=Os-(Os-Ozero)*exp(-r_a*x(i)/U) - ((r_d*Bzero)/(r_a-...
52          r_d))*(exp(-r_d*x(i)/U)-exp(-r_a*x(i)/U));
53  end
54  % Critical Distance
55  x_c=(U/(r_a-r_d))*log((r_a/r_d)*(1-(r_a-r_d)/r_d*Dzero/Bzero))...
56      ;
57  % Critical Deficit
58  D_c=(r_d*Bzero/r_a)*exp(-r_d*x_c/U);
59
60  % Case of advection and dispersion
61  gdisp=0.5*U*(1+m_1)/Kx;
62  jdisp=0.5*U*(1-m_1)/Kx;
63  for i=1:length(xdisp)
64      %CBOD concentration along x

```

```

62     if xdisp(i) ≤ 0
63         Bdisp(i) = Bzerodisp * exp(gdisp * xdisp(i));
64     else
65         Bdisp(i) = Bzerodisp * exp(jdisp * xdisp(i));
66     end
67     %oxygen Deficit along x
68     if xdisp(i) ≥ 0
69         Ddisp(i) = (r_d * W / (r_a - r_d) / Q) * (1 / m_1 * exp(U * xdisp(i) / 2 / ...
70             Kx * (1 - m_1)) - 1 / m_2 * exp(U * xdisp(i) / 2 / Kx * (1 - m_2)));
71     else
72         Ddisp(i) = (r_d * W / (r_a - r_d) / Q) * (1 / m_1 * exp(U * xdisp(i) / 2 / ...
73             Kx * (1 + m_1)) - 1 / m_2 * exp(U * xdisp(i) / 2 / Kx * (1 + m_2)));
74     end
75     %oxygen concentration along x
76     Odisp(i) = Os - Ddisp(i);
77 end
78 %
79 %displays results on video
80 disp(sprintf('r_a*Kx/U/U = %g', r_a * Kx / U / U))
81 disp(sprintf('r_d*Kx/U/U = %g', r_d * Kx / U / U))
82 %
83 %plot results
84 %
85 subplot(3,2,1); hold on
86 plot(x,B,'—b','LineWidth',2.5);
87 title('Ultimate CBOD concentration','FontSize',12,'FontWeight'...'bold')
88 axis([-L_x L_x 0 Bzero*1.2])
89 xlabel('Upstream-Downstream distance [m]');
90 ylabel('B [mg/l]');
91 plot(xdisp,Bdisp,'r','LineWidth',2.5);
92 yaxistplot=plot([0,0],[0,Bzero*1.2],'k-');
93 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
94
95 subplot(3,2,3); hold on
96 plot(x,D,'—b','LineWidth',2.5);
97 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...'bold')
98 axis([-L_x L_x 0 2])
99 xcpointplot=plot(x_c,D_c,'ob');
100 set(xcpointplot,'MarkerEdgeColor','b',...
101     'MarkerFaceColor','b',...
102     'MarkerSize',8)
103 xlabel('Downstream distance [m]');
104 ylabel('D [mg/l]');
105 plot(xdisp,Ddisp,'r','LineWidth',2.5);
106 yaxistplot=plot([0,0],[0,Bzero],'k-');
107 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);
108
109 subplot(3,2,5); hold on
110 plot(x,O,'—b','LineWidth',2.5);
111 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...'FontWeight','bold')
112 axis([-L_x L_x 8 12])
113 xlabel('Downstream distance [m]');
114 ylabel('O [mg/l]');
115 xcpointplot2=plot(x_c,(Os-D_c),'ok');
116 set(xcpointplot2,'MarkerEdgeColor','b',...

```

```

115             'MarkerFaceColor','b',...
116             'MarkerSize',8)
117 plot(xdisp,Odisp,'r','LineWidth',2.5);
118 yaxisplot=plot([0,0],[0,2*Os],'k-');
119 Osatplot=plot([-L_x,L_x],[0s,0s],'k-','LineWidth',1.5);
120 set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2 1 1]);

```

- **Esempio 7.** Grafica i) la concentrazione di CBOD, B , ii) il deficit di ossigeno, D , in funzione della distanza dalla sorgente, nel caso di dispersione longitudinale non trascurabile. Confronta inoltre il tasso di deossigenazione, r_d con il tasso di riossigenazione, r_a . Grafica infine i flussi avvevativi e dispersivi.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Analytical solution of the Streeter-Phelps model
4 % generalized to account for dispersion
5 %
6 % Definition and initialization of parameters and variables
7 dx=100; %space integration pace, m
8 L_x=100000; %total length of the domain, m
9 xdisp=[-L_x/5:dx:L_x]; %computational grid along x axis
10 % for non negligible dispersion
11 WsuQ=18.5; %CBOD concentration at x=0, mg/l
12 Os=10.0; %saturated oxygen concentration, mg/l
13 Ozero=10.0; %oxygen concentration at x=0, mg/l
14 Dzero=Os-Ozero; %oxygen deficit at x=0, mg/l
15 U=3.57*1609.344/86400; %mean stream velocity, m/s
16 r_d = 0.15; %deoxygenation rate, 1/day
17 r_a = 0.18; %reareation rate, 1/day
18 r_d = r_d/86400; %deoxygenation rate, 1/s
19 r_a = r_a/86400; %reareation rate, 1/s
20
21 Kx=15*2589988.11/86400; %Dispersion coefficient (m^2/s)
22 % 1mi^2=2589988.11 m^2
23 m_1=sqrt(1+4*r_d*Kx/U/U);
24 m_2=sqrt(1+4*r_a*Kx/U/U);
25
26 % non negligible dispersion
27 Bzerodisp=WsuQ/m_1; %CBOD at x=0, mg/l
28 Bdisp=zeros(1,length(xdisp)); %CBOD along x, mg/l
29 Ddisp=zeros(1,length(xdisp)); %oxygen Deficit along x, mg/l
30 %
31 % Case of advection and dispersion
32 gdisp=0.5*U*(1+m_1)/Kx;
33 jdisp=0.5*U*(1-m_1)/Kx;
34 for i=1:length(xdisp)
35     %CBOD concentration along x
36     if xdisp(i)<=0
37         Bdisp(i)=Bzerodisp*exp(gdisp*xdisp(i));
38     else
39         Bdisp(i)=Bzerodisp*exp(jdisp*xdisp(i));
40     end
41     %oxygen Deficit along x
42     if xdisp(i)>=0

```

```

43         Ddisp(i)=(r_d*WsuQ/(r_a-r_d))*(1/m_1*exp(U*xdisp(i)/2/...
           Kx*(1-m_1))-1/m_2*exp(U*xdisp(i)/2/Kx*(1-m_2)));
44     else
45         Ddisp(i)=(r_d*WsuQ/(r_a-r_d))*(1/m_1*exp(U*xdisp(i)/2/...
           Kx*(1+m_1))-1/m_2*exp(U*xdisp(i)/2/Kx*(1+m_2)));
46     end
47 end
48 % Advective fluxes
49 a_Bdisp=U*Bdisp; % BOD
50 a_Ddisp=U*Ddisp; % oxygen deficit
51
52 % Dispersive fluxes computed through
53 % the matlab function diff(X)
54 % type help diff(X) on matlab shell for more information
55 d_Bdisp=-Kx*diff(Bdisp)/dx; %BOD
56 d_Ddisp=-Kx*diff(Ddisp)/dx; %oxygen deficit
57
58 % Alternatively: dispersive fluxes computed through
59 % finite differences
60 %for i=1:length(xdisp)-1
61 %     d_Bdisp(i)=-Kx*(Bdisp(i+1)-Bdisp(i))/dx; % BOD dispersive...
        flux
62 %     d_Ddisp(i)=-Kx*(Ddisp(i+1)-Ddisp(i))/dx; % Deficit ...
        dispersive flux
63 %end
64 %
65 % display results on video
66 disp(sprintf('r_a*Kx/U/U = %g',r_a*Kx/U/U))
67 disp(sprintf('r_d*Kx/U/U = %g',r_d*Kx/U/U))
68 %
69 %plot results
70 figure(1)
71 subplot(2,2,1); hold on
72 yaxisplot=plot([0,0],[0,20],'k-');
73 plot(xdisp/1609.344,Bdisp,'-b','LineWidth',2);
74 title('BOD concentration','FontSize',12,'FontWeight','bold')
75 axis([-20 60 0 20])
76 xlabel('Upstream-Downstream distance [mi]');
77 ylabel('B [mg/l]');
78
79 subplot(2,2,4); hold on
80 plot(xdisp/1609.344,Ddisp,'-b','LineWidth',2);
81 yaxisplot=plot([0,0],[0,6],'k-');
82 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
        bold')
83 axis([-20 60 0 6])
84 xlabel('Upstream-Downstream distance [mi]');
85 ylabel('D.O. Deficit D [mg/l]');
86
87 subplot(2,2,2); hold on
88 plot(xdisp/1609.344,(r_d*86400*Bdisp),'-b','LineWidth',2);
89 plot(xdisp/1609.344,(r_a*86400*Ddisp),'-b','LineWidth',2);
90 yaxisplot=plot([0,0],[0,3],'k-');
91 title('Reaction Rates','FontSize',12,'FontWeight','bold')
92 axis([-20 60 0 3])
93 xlabel('Upstream-Downstream distance [mi]');
94 ylabel('r_dB, r_aD [mg/l-day]');
95 legend('r_dB','r_aD');

```

```

96 pause
97
98 figure(2)
99 subplot(2,2,1); hold on
100 plot(xdisp/1609.344,(a_Bdisp*86400/1609.344),'-b','LineWidth'...
    ,2);
101 plot(xdisp/1609.344,(a_Ddisp*86400/1609.344),'—b','LineWidth'...
    ,2);
102 yaxisplot=plot([0,0],[0,60],'k-');
103 title('Advective Fluxes','FontSize',12,'FontWeight','bold')
104 axis([-20 60 0 60])
105 xlabel('Upstream-Downstream distance [mi]');
106 ylabel('Advective Fluxes [mg-mi/l-day]');
107 legend('U \cdot B, BOD advection','U \cdot D, Deficit ...
    advection');
108
109 subplot(2,2,3); hold on
110 plot(xdisp(2:length(xdisp))/1609.344,(d_Bdisp*86400/1609.344),...
    '-b','LineWidth',2);
111 plot(xdisp(2:length(xdisp))/1609.344,(d_Ddisp*86400/1609.344),...
    '-b','LineWidth',2);
112 yaxisplot=plot([0,0],[-6000,2000],'k-');
113 title('Dispersive Fluxes','FontSize',12,'FontWeight','bold')
114 axis([-20 60 -60 20])
115 xlabel('Upstream-Downstream distance [m]');
116 ylabel('Dispersive Fluxes [mg-mi/l-day]');
117 legend('-K_x dB/dx, BOD dispersion','-K_x dD/dx, Deficit ...
    dispersion');

```

- **Esempio 8.** Confronta la soluzione analitica per la concentrazione di ossigeno disciolto, O , in funzione della distanza dalla sorgente, come conseguenza dei diversi contributi, con la soluzione numerica. La soluzione analitica converge verso la soluzione numerica.

```

1 clear all; close all; clc
2 %
3 % Comparison between analytical and numerical solution of the
4 % generalized Streeter-Phelps model
5 %
6 % Definition and initialization of parameters and variables
7 dx=1000;          %spatial integration step, m
8 L_x=1000000;      %total length of the domain,m
9 x=[0:dx:L_x];     %computational grid along x axis
10 Os=8.4;           %saturated oxygen concentration, mg/l
11 Ozero=7.0;        %dissolved oxygen concentration at x=0, mg/l
12 Dzero=Os-Ozero;   %oxygen deficit at x=0, mg/l D0=Cs-C0;
13 Bzero=10;         %CBOD concentration at x=0, mg/l
14 Nzero=5.;         %NBOD concentration at x=0, mg/l
15
16 rd = 0.3;         %CBOD deoxygenation rate, 1/day
17 ra = 0.4;         %CBOD reareation rate, 1/day
18 rs = 0.0;         %CBOD sedimentation rate, 1/day
19 rr = rs+rd;       %CBOD deoxygenation + sedimentation rate, 1/...
    day
20 rn = 0.25;       %NBOD deoxygenation rate, 1/day

```



```

21
22 rd = rd/86400; %CBOD deoxygenation rate, 1/s
23 ra = ra/86400; %CBOD reareation rate, 1/s
24 rr = rr/86400; %CBOD deoxygenation + sedimentation rate, 1/s
25 rn = rn/86400; %NBOD deoxygenation rate, 1/s
26
27 U=0.4; %mean stream velocity, m/s
28 H=3.0; %mean water depth, m
29
30 S=5.0; %Sediment oxygen demand g/(m^2-day)
31 S=S*1000/86400; %Sediment oxygen demand mg/(m^2-s)
32 SsuH=S/H/10/100; %Sediment oxygen demand mg/(l-s)
33
34 P_R=1.0; %Daily averaged net primary production, mg/l/...
    day
35 P_R=P_R/86400; %Daily averaged net primary production, mg/l/s
36
37 Bb=0.; %Background BO Deficit, mg/l
38
39 B=zeros(1,length(x)); %CBOD concentration along x, mg/l
40 D=zeros(1,length(x)); %dissolved oxygen Deficit along x, mg/l
41 O=zeros(1,length(x)); %oxygen Concentration along x, mg/l
42 %
43 % Stationary analytical solution
44 %
45 for i=1:length(x)
46     %CBOD concentration along x
47     B(i)=Bzero*exp(-rd*x(i)/U);
48     %dissolved oxygen Deficit along x
49     D(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U) + ((rd*Bzero)/(ra-rr))*(exp(-rr...
        *x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/U))...
50         + ((rn*Nzero)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)/...
            U))...
51         + SsuH/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
52         + (-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U))...
53         + rd*Bb/ra ;
54     D0term(i)=Dzero*exp(-ra*x(i)/U);
55     CBOD(i)=((rd*Bzero)/(ra-rr))*(exp(-rr*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)...
        /U));
56     NBOD(i)=((rn*Nzero)/(ra-rn))*(exp(-rn*x(i)/U)-exp(-ra*x(i)...
        /U));
57     Sterm(i)=SsuH/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U));
58     R_P(i)=(-P_R)/ra*(1-exp(-ra*x(i)/U));
59     Bbterm(i)=rd*Bb/ra;
60 end
61 %
62 %plot results
63 figure(1); hold on
64 D0termplot=plot(x/U/86400,D0term,'b-', 'LineWidth',1.5);
65 CBODplot=plot(x/U/86400,CBOD,'b-', 'LineWidth',2);
66 NBODplot=plot(x/U/86400,NBOD,'c-', 'LineWidth',2);
67 Stermplot=plot(x/U/86400,Sterm,'r-', 'LineWidth',2);
68 R_Pplot=plot(x/U/86400,R_P,'g', 'LineWidth',1.5);
69 Bbtermplot=plot(x/U/86400,Bbterm,'r:', 'LineWidth',1.5);
70
71 title('Influence of the various terms','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
72 %axis([0 5 -2 2])

```

```

73 xlabel('Travel time [days]');
74 ylabel('D.O. Deficit [mg/l]');
75 legend('D_0', 'CBOD B', 'NBOD N', 'S', 'R-P', 'B_b')
76 pause
77
78 figure(2)
79 D0termplot=plot(x/U/86400,D,'b-','LineWidth',2.5);
80 title('Dissolved oxygen deficit','FontSize',12,'FontWeight','...
    bold')
81 %axis([0 5 -1 3])
82 xlabel('Travel time [days]');
83 ylabel('D.O. Deficit [mg/l]');
84 pause
85
86 figure(3); hold on
87 %calculates the oxygen concentration as 0s-D
88 O(:)=0s-D(:);
89 plot(x/U/86400,0,'k','LineWidth',2.5);
90 0satplot=plot([0,L_x/U/86400],[0s,0s],'k-','LineWidth',1.5);
91 title('Dissolved oxygen concentration','FontSize',12,'...
    FontWeight','bold')
92 xlabel('Downstream distance [m]');
93 ylabel('D.O. Conc. 0 [mg/l]');
94 pause
95 %
96 %Numerical solution
97 %
98 duration=86400*12;          %duration of the simulation
99 dt=1500.;                  %integration time step
100 ntime=ceil(duration/dt);    %number of temporal steps
101
102 %CBOD and NBOD concentrations as a function of x
103 CBODnum(1)=Bzero;
104 NBODnum(1)=Nzero;
105 for j=2:length(x)
106     CBODnum(j)=CBODnum(j-1)*(1-rd*dx/U);
107     NBODnum(j)=NBODnum(j-1)*(1-rn*dx/U);
108 end
109
110 %Inizialization to zero of the oxygen concentration vector
111 Onum=zeros(ntime,length(x));
112
113 %concentration of the oxygen at the section x=0
114 %given as an external forcing (Ozero = 0 —> clear water)
115 Ozero=0;
116 Onum(1,1)=Ozero;
117
118 contafig=0.;
119 figure(4)
120 for i=2:ntime
121     Onum(i,1)=Ozero;
122     for j=2:length(x)
123         Onum(i,j)=(1/(1+ra*dt))*(Onum(i-1,j)-(U*dt/dx)*(Onum(i...
            -1,j)-Onum(i-1,j-1))+dt*(ra*0s-rd*CBODnum(j)-rn*...
            NBODnum(j)+P_R-SsuH));
124         concentrationplot(j)=Onum(i,j);
125     end
126     concentrationplot(1)=Onum(i,1);

```

```

127 concentrationplot_plot=plot(x,concentrationplot,'-b','...
    Linewidth',3.0);
128 axis([0 max(x) 0 11])
129 title(['Instant is ',num2str(i*dt),'s'])
130 ylabel(' oxygen concentration','FontSize',12)
131 xlabel('x(m)','FontSize',12)
132 hold on
133 Osatplot=plot([0,max(x)],[0s,0s],'k-.','LineWidth',1.5);
134 plot(x,0,'r','LineWidth',1.5);
135
136 %produces a movie directly from Matlab
137 set(gca,'nextplot','replacechildren')
138 %contafig=contafig+1.;
139 contafig=1;
140 M(contafig) = getframe;
141
142 %print a series of numbered figures to be manages by
143 %another software in order to produce a movie
144 %print( '-djpeg',['fig' sprintf('%g',contafig)])
145 end
146
147 %command to create a movie with Matlab
148 %disp('Playing the movie...')
149 %movie(M)
150 %movie2avi(M,'Conc_0','compression','Cinepak','colormap',jet,'...
    fps',20,'quality',100)

```

Bibliografia

- Batchelor, G.K. (1967), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Batchelor, G.K. (1959), *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Chatwin, P.C., Allen, C.M.. (1985), Mathematical models of dispersion in rivers and Estuaries, *Annual Rev. Fluid Mech.*, 17, 119-149.
- Ghetti, A. (1981), *Idraulica*, Libreria Cortina, Padova.
- Kundu, P.K., Cohen, I.M., Dowling, D.R. (2011), *Fluid Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, NL.
- Pigozzi, G. (2009), *Lezioni di Meccanica Razionale*, Libreria Cortina, Padova.
- Fischer, H.B., List E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., Brooks, N.H. (1979), *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York.
- Rutherford, J.C. (1994), *River Mixing*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester.
- Shames, I.H. (1992), *Mechanics of Fluid*, McGraw-Hill, New York.
- Schnoor, J.L. (1996), *Environmental Modeling: Fate and Transport of Pollutants in Water, Air and Soil*, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Tennekes, H., Lumley, J.L. (1972), *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.