

Soluzione dell'appello in rete

martedì 28 giugno 2022 19:00

Esercizio 1 (Code)

Ad una stazione di servizio le automobili arrivano secondo un processo di Poisson con una media di 6 auto ogni 10 minuti. Ogni auto è servita da un solo addetto e la durata del servizio è esponenziale con media 4 minuti.

1.1 Qual è il minimo numero di addetti che devono essere in servizio perché il sistema sia in condizioni di equilibrio? (si supponga che ci sia a disposizione una pompa per ogni addetto)

1.2 Supponendo che il numero di addetti in servizio sia uguale al minimo calcolato al punto precedente, si calcolino:

- la probabilità che un cliente in arrivo debba attendere prima di essere servito;
- il tempo medio di attesa di un cliente prima di essere servito.

1.3 Sempre in condizioni di equilibrio, quanti clienti in media vengono serviti in un'ora?

$$\lambda = 6 \text{ auto} / 10 \text{ min} = \frac{3}{5} \text{ auto} / \text{min}$$

$$\frac{1}{\mu} = 4 \text{ min} / \text{auto} \Rightarrow \mu = \frac{1}{4} \text{ auto} / \text{min}$$

Il sistema è $M|M|m$

1.1) cond. di equilibrio è $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1 \rightarrow$

$$\rho = \frac{3/5}{m \cdot 1/4} = \frac{12}{5m} < 1 \text{ implica } m > \frac{12}{5}$$

m deve essere intero, e quindi il minimo numero di addetti per avere cond. stab. è $\lceil 12/5 \rceil = 3$

1.2) Sistema di code $M|M|3$ con $\rho = \frac{12}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5} < 1$

$$P_0 = P[N=0] = \left[\sum_{n=0}^2 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{3!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = \dots = \frac{5}{89} = 0.056$$

$$\begin{aligned} \text{Prob. che un cliente in arrivo debba attendere} &= C = \\ &= P[N \geq 3] = P_0 \cdot \frac{(\lambda/\mu)^3}{3! (1-\rho)} = \dots = 0.647 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{W}_q &= \text{tempo medio di attesa di un cliente prima del servizio} = \\ &= \frac{C}{3\mu(1-\rho)} = \dots = \frac{384}{89} = 4.315 \text{ min.} \end{aligned}$$

1.3) in cond. stazionarie,

num. medio di clienti serviti in un'ora =

num. medio di clienti arrivati in un'ora =

$$= \lambda \times 60 \text{ min} = \frac{3}{5} 60 = 36 \text{ auto}$$

Esercizio 2 (Revenue Management)

L'Hotel "Al Teatro" a Padova è vicino al teatro Verdi. Quando al teatro Verdi c'è uno spettacolo importante, l'Hotel si riempie sempre. In base ai dati storici è noto che il numero di clienti che disdicono all'ultimo momento la loro prenotazione (o equivalentemente non si presentano) è distribuito secondo una normale di media 5 e scarto quadratico medio 3. Il prezzo medio per cliente di una stanza è 80 euro. L'Hotel adotta una politica di overbooking: se un cliente prenotato si presenta e l'Hotel è già pieno, allora il cliente verrà alloggiato presso un altro hotel di categoria superiore, che costa all'Hotel Al Teatro (non al cliente) 200 euro.

Quale livello di overbooking dovrebbe praticare l'Hotel, se decide di adottare il Simple Risk based model?

$X = \text{numero di no-show} \sim N(5, 3)$, con funz. di rip. $G(x)$

$$p = 80 \text{€}$$

$$b = 200 \text{€}$$

Simple risk-based policy:

$$\bullet \text{ se } \frac{p}{b} > G(b-C) \longrightarrow b := b+1$$

$$\bullet \text{ se } \frac{p}{b} \leq G(b-C) \longrightarrow b-C: \text{ overbooking per ottimo}$$

in questo caso non conosciamo la capacità C , ma possiamo det. $b-C$, il numero di prenotazioni eccedenti la capacità

Risolviamo la diseq. $\frac{p}{b} > G(b-C)$

$$\frac{80}{200} > \Phi\left(\frac{b-C-5}{3}\right)$$

$$\frac{2}{5} > \Phi\left(\frac{b-C-5}{3}\right)$$

$$\frac{b-C-5}{3} < \Phi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$b-C < 5 + 3 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 5 + 3 \cdot \left(-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{2}{5}\right)\right) = \dots = 4.235$$

Quindi, applicando la procedura SRBM per valori crescenti di b , a partire da C , quando $b = C+4$ la SRBM suggerisce di aumentare b ; quando $b = C+5$ la SRBM termina dichiarando di essere arrivata all'ottimo -

In conclusione, conviene accettare 5 prenotazioni in overbooking.