Esercizi su Revenue Management con risoluzione

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Ottimizzazione Stocastica

Esercizio 1

Una compagnia aerea serve una rotta tra Washington, DC e Portsmouth con un singolo volo giornaliero e con un aeromobile da 100 posti. La compagnia vende i biglietti con due tariffe, *economy* e *business*. Per un volo che partirà tra due settimane, usando la regola di Littlewood la compagnia ha calcolato il *booking limit* per la classe *economy* uguale a 40 posti.

(a) Qual è il livello di protezione ottimo per la classe *business*?

(b) E' appena stato comunicato alla compagnia che a Portsmouth tra due settimane ci sarà un importante evento popolare. Come conseguenza, la domanda media per la classe *economy* risulta più alta di quella stimata in precedenza, esattamente il 50% in più, mentre la stima della domanda per la classe *business* rimane invariata. Quali sono i nuovi *booking limit* per la classe *economy* e livello di protezione per la classe *business*?

Esercizio 1 (continua)

(c) Subito dopo aver appreso dell'importante evento popolare, la compagnia scopre anche che, per problemi di manutenzione, dovrà usare un aeromobile diverso, che ha 120 posti invece dei 100 posti originariamente previsti. Quali sono i nuovi *booking limit* per la classe *economy* e livello di protezione per la classe *business*?

(d) La tariffa per la classe *business* è 200 dollari, mentre per quella *economy* è 100 dollari. Qual è la domanda attesa nella classe *business*, supponendo che entrambe le domande siano distribuite normalmente?

Esercizio 1 - risoluzione

Dati:
business: classe 1
economy: classe 2
$C = 100$: capacità dell'aeromobile
$b_2 = 40$: *booking limit* della classe 2, calcolato usando Littlewood

(a) livello di protezione ottimo per la classe 1:
$y_1 = C - b_2 = 100 - 40 = 60$

(b) La domanda per la classe 1 rimane invariata, e quindi anche *booking limit* e livello di protezione non cambiano, essendo invarianti rispetto a variazioni della domanda della classe 2.

Esercizio 1 - risoluzione

Dati:
business: classe 1
economy: classe 2
$C = 100$: capacità dell'aeromobile
$b_2 = 40$: *booking limit* della classe 2, calcolato usando Littlewood

(a) livello di protezione ottimo per la classe 1:
$y_1 = C - b_2 = 100 - 40 = 60$

(b) La domanda per la classe 1 rimane invariata, e quindi anche *booking limit* e livello di protezione non cambiano, essendo invarianti rispetto a variazioni della domanda della classe 2.

(c) $C' = 120$: capacità del nuovo aeromobile
La capacità dell'aeromobile non compare nella formula di Littlewood per il livello di protezione, che quindi non cambia:
$y_1' = y_1 = 60$
$b_2' = C' - y_1' = 120 - 60 = 60$: nuovo *booking limit*

Esercizio 1 - risoluzione

(d) $p_1 = \$200, \quad p_2 = \$100, \quad p_2/p_1 = 1/2$
Se la domanda per la classe 1 è distribuita secondo una $N(\mu_1, \sigma_1)$, il livello di protezione è dato dalla:

$$y_1 = \min \left[\mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1} \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) ; \; C' \right]$$

Inserendo i dati diventa:

$$60 = \min \left[\mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1} (1/2) ; \; 120 \right] = \min [\mu_1 ; \; 120]$$

$\Rightarrow \mu_1 = 60$: domanda attesa della classe 1

Esercizio 2

Una compagnia aerea serve la rotta Venezia Milano con un volo giornaliero e con un aereo da 100 posti. Il biglietto scontato costa 100 euro, mentre quello a tariffa piena costa 150 euro. I biglietti scontati possono essere acquistati fino ad una settimana prima del volo; è noto che tutti coloro che vogliono un posto con la tariffa scontata prenotano prima di quelli che pagano un biglietto a prezzo pieno. In base alle molte osservazioni passate, la compagnia stima che la domanda di biglietti a prezzo pieno sia distribuita come una normale di media 56 e scarto q.m. 23, mentre quella di biglietti a prezzo scontato sia ancora una normale, ma con media 88 e scarto q.m. 44.

(a) Stimare il *booking limit* ottimo.

(b) Una compagnia concorrente sta pensando di entrare sul mercato. Se ciò si verificasse, la domanda di biglietti a prezzo ridotto scenderebbe a 44 di media con un scarto q.m. di 30. In tal caso, quale sarebbe il *booking limit* ottimo?

Esercizio 2 - risoluzione

Dati:
$C = 100$: capacità dell'aeromobile
$p_2 = 100$€: tariffa scontata
$p_1 = 150$€: tariffa piena
$D_2 \sim N(88, 44)$: domanda per tariffa scontata
$D_1 \sim N(56, 23)$: domanda per tariffa piena

(a) $$b^* = \left[C - \sigma_1 \Phi^{-1} \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) - \mu_1 \right]^+$$
$$= \left[100 - 23\, \Phi^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) - 56 \right]^+$$
$$= [100 + 23 \cdot 0.415 - 56]^+ = 53.545$$
usando la formula $\Phi^{-1}(a) = -\Phi^{-1}(1-a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 - risoluzione

Dati:
$C = 100$: capacità dell'aeromobile
$p_2 = 100$€: tariffa scontata
$p_1 = 150$€: tariffa piena
$D_2 \sim N(88, 44)$: domanda per tariffa scontata
$D_1 \sim N(56, 23)$: domanda per tariffa piena

(a) $$b^* = \left[C - \sigma_1 \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) - \mu_1\right]^+$$
$$= \left[100 - 23\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - 56\right]^+$$
$$= [100 + 23 \cdot 0.415 - 56]^+ = 53.545$$
usando la formula $\Phi^{-1}(a) = -\Phi^{-1}(1-a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(b) Il *booking limit* non dipende da D_2 e quindi non cambia.

Esercizio 3

Si consideri un volo effettuato da un aereo con 100 posti. Usando l'euristica EMSR-b, si trovino i livelli di protezione per le classi 1 e 2, supponendo di avere tre classi (ciascuna con domanda normale di media 20, 40 e 80 rispettivamente e varianza 16) caratterizzate dai prezzi 1000, 600 e 200 euro rispettivamente.
Ripetere usando l'euristica EMSR-a e confrontare i risultati.

Esercizio 3 - risoluzione

Dati:

$C = 100$: capacità dell'aeromobile

classe 1: $D_1 \sim N(20, 4)$ $p_1 = 1000$

classe 2: $D_2 \sim N(40, 4)$ $p_2 = 600$

classe 3: $D_3 \sim N(80, 4)$ $p_3 = 200$

EMSR-b:

$j = 1$:

$\mu = \mu_1 = 20, \quad p = p_1 = 1000, \quad \sigma = \sigma_1 = 4$

$$\begin{aligned} y_1^* &= \min\left[\mu + \sigma\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_2}{p}\right);\; C\right] \\ &= \min\left[20 + 4\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{600}{1000}\right);\; 100\right] \\ &= \min\left[20 + 4 \cdot (-0.255);\; 100\right] = 18.98 \end{aligned}$$

Esercizio 3 - risoluzione

Dati:

$C = 100$: capacità dell'aeromobile

classe 1: $D_1 \sim N(20, 4)$ $p_1 = 1000$

classe 2: $D_2 \sim N(40, 4)$ $p_2 = 600$

classe 3: $D_3 \sim N(80, 4)$ $p_3 = 200$

<u>EMSR-b</u>:

$j = 2$:

$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 60, \quad p = \frac{1000 \cdot 20 + 600 \cdot 40}{60} = 733.\bar{3}, \quad \sigma = 4\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
y_2^* &= \min \left[\mu + \sigma\, \Phi^{-1} \left(1 - \frac{p_3}{p} \right);\ C \right] \\
&= \min \left[60 + 4\sqrt{2}\, \Phi^{-1} \left(1 - \frac{200}{733.\bar{3}} \right);\ 100 \right] \\
&= \min \left[60 + 4\sqrt{2} \cdot 0.605;\ 100 \right] = 63.42
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 - risoluzione

Dati:
$C = 100$: capacità dell'aeromobile
classe 1: $D_1 \sim N(20, 4)$ $p_1 = 1000$
classe 2: $D_2 \sim N(40, 4)$ $p_2 = 600$
classe 3: $D_3 \sim N(80, 4)$ $p_3 = 200$

EMSR-a:
$y_1^* = 18.98$ come per EMSR-b

$$\begin{aligned} y_2^* &= \min\left[\mu_1 + \sigma_1\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_3}{p_1}\right) + \mu_2 + \sigma_2\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right);\ C\right] \\ &= \min\left[20 + 4\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{200}{1000}\right) + 40 + 4\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{200}{600}\right);\ 100\right] \\ &= \min\left[20 + 4 \cdot 0.845 + 40 + 4 \cdot 0.435;\ 100\right] = 65.12 \end{aligned}$$

Esercizio 4

Una compagnia aerea opera un volo da Venezia a Roma ed offre ai clienti 2 classi, A e B. Un biglietto di classe A costa 600 euro, uno di classe B solo 200 euro. La capacità dell'aeromobile è di 80 posti. La domanda per la classe A è distribuita secondo una normale con media 40 e varianza 9; quella per la classe B secondo una normale di media 60 e varianza 25.

(a) Si calcoli il livello di protezione per la classe A.

(b) Supponiamo adesso di avere solo passeggeri di classe B; la probabilità che un cliente con un posto prenotato (in classe B) si presenti alla partenza è 0.80. La compagnia ha deciso di usare un *overbooking limit* uguale a 100 ed è riuscita a prenotare tutti i posti consentiti dall'overbooking limit. Si calcoli la proporzione di passeggeri cui verrà rifiutato l'imbarco (lasciando indicata la sommatoria finale, non serve fare i calcoli).

Esercizio 4 - risoluzione

Dati:
$C = 80$: capacità dell'aereo
classe A: $p_A = 600$€, $D_A \sim N(40, 3)$
classe B: $p_B = 200$€, $D_B \sim N(60, 5)$

(a) livello di protezione per la classe A :

$$y^* = \min\left[\mu_A + \sigma_A\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_B}{p_A}\right);\ C\right]$$
$$= \min\left[40 + 3\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{200}{600}\right);\ 80\right]$$
$$= \min\left[40 + 3 \cdot 0.435;\ 80\right] = 41.305$$

Esercizio 4 - risoluzione

(b) $C = 80$: capacità dell'aereo, solo classe B
$\rho = 0.80$: probabilità di *show*
$b = 100$: *overbooking limit*
proporzione di passeggeri cui verrà rifiutato l'imbarco:

$$\sigma_2(b) = \frac{E\left[(S(b) - C)^+\right]}{E\left[S(b)\right]}$$

dove $S(b) \sim Bi(b, \rho)$: numero di *show* effettivi
$P\left[S(b) = k\right] = \binom{b}{k} \rho^k (1-\rho)^{b-k} \quad \forall\, k \in \{0, \ldots, b\}$

$$\begin{aligned}\sigma_2(100) &= \frac{E\left[(S(100) - 80)^+\right]}{E\left[S(100)\right]} \\ &= \frac{\sum_{k=81}^{100} (k-80) \cdot P\left[S(100) = k\right]}{100 \cdot 0.80} \\ &= \frac{1}{80} \sum_{k=81}^{100} (k-80) \binom{100}{k} 0.80^k\, 0.20^{100-k} = \ldots \simeq 0.02\end{aligned}$$

Esercizio 5

Un volo ha 100 posti e la tariffa (unica) è di 135 euro. Il numero di coloro che non si presentano alla partenza è indipendente dal numero di prenotazioni ed è distribuito secondo una normale di media 22 e scarto quadratico medio 15. Negare l'imbarco ad un passeggero ha un costo di 300 euro. Si trovi l'*overbooking limit* ottimo utilizzando la *Simple Risk-based policy*.

Esercizio 5 - risoluzione

Dati:

$C = 100$: capacità dell'aereo

$p = 135€$: tariffa di un biglietto

$D = 300€$: compenso per imbarco negato

$x \sim N(22, 15)$: numero di *no-show*, con funzione di ripartizione $G(x) = \Phi\left(\frac{x-22}{15}\right)$

b: *overbooking limit* da determinare

Esercizio 5 - risoluzione

Dati:
$C = 100$: capacità dell'aereo
$p = 135$€: tariffa di un biglietto
$D = 300$€: compenso per imbarco negato
$x \sim N(22, 15)$: numero di *no-show*, con funzione di ripartizione
$G(x) = \Phi\left(\frac{x-22}{15}\right)$
b: *overbooking limit* da determinare

Risolviamo la disequazione:
$p/D > G(b - C)$
$135/300 > \Phi\left(\frac{b-100-22}{15}\right)$
$0.45 > \Phi\left(\frac{b-122}{15}\right)$
$b < 122 + 15\,\Phi^{-1}(0.45)$
$\quad = 122 - 15\,\Phi^{-1}(0.55) = 122 - 15 \cdot 0.125 = 120.125$
Quindi se $b = 120$ l'algoritmo indica di aumentare a 121;
quando $b = 121$ la disequazione non è più valida si è ottenuto l'*overbooking limit* cercato.