Esercizi su code con risoluzione

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

Esercizio 1

In un ufficio postale sono state fatte delle rilevazioni statistiche presso uno sportello per il pagamento dei conti correnti dopo parecchio tempo dall'apertura, in condizioni stazionarie. Si è misurato che lo sportello ha un'affluenza media di 16 clienti l'ora, la durata media di un'operazione è di 3 minuti e in media ci sono 4 clienti (3 in coda e uno allo sportello). Si chiede di calcolare:

(a) il tempo medio trascorso da un cliente nel sistema;

(b) il tempo medio trascorso aspettando in coda;

(c) la lunghezza media della coda;

(d) il fattore di utilizzazione del servente;

(e) la percentuale di tempo in cui il servente è inoperoso.

Esercizio 1 - risoluzione

Il sistema è in condizioni stazionarie, per cui si può applicare la formula di Little.

Dati:

$\lambda = 16/\mathit{ora}$: tasso degli arrivi

$1/\mu = 3\ \mathit{min} = (1/20)\ \mathit{ora}$

$\rightarrow \quad \mu = 20/\mathit{ora}$: tasso di servizio

$L = 4$: numero medio di clienti nel sistema

$m = 1$

(a) $\overline{W} = L/\lambda = 4/16 = (1/4)\mathit{ora} = 15\ \mathit{min}$

(b) $\overline{W}_q = \overline{W} - 1/\mu = 15 - 3 = 12\ \mathit{min}$

(c) $L_q = \lambda \overline{W}_q = 16 \cdot 12/60 = 3.2$

(d) $\rho = \lambda/\mu = 4/5$

(e) $P[N = 0] = 1 - \rho = 1/5 = 20\%$

Esercizio 1 - precisazione riguardo domanda (e)

Abbiamo visto che la formula $P[N = 0] = 1 - \rho$ vale per sistemi M/M/1 e M/G/1. In realtà vale anche in situazioni più generali.

Teorema 1.

In un generico sistema di code con $m = 1$ in condizioni stazionarie, vale $P[N = 0] = 1 - \rho$.

Dimostrazione.

$$L - L_q = \lambda(W - W_q) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho$$

$$L - L_q = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P_k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) P_k = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k = 1 - P_0 \qquad \square$$

Esercizio 2

Un negozio ha un'unica cassa servita da una cassiera che provvede anche a confezionare i pacchi. I clienti arrivano alla cassa con frequenza media di 30 all'ora e il tempo occorrente perché la cassiera faccia il conto della spesa, confezioni il pacco e riceva il pagamento dal cliente è in media 2 minuti. Inoltre, ogni volta che vi sono 3 o più clienti nel sistema (coda + cassa), il proprietario del negozio aiuta la cassiera a confezionare i pacchi e in questo modo il tempo medio per servire un cliente diventa pari a 1 minuto. Costruire un modello basato sui processi di nascite e morti che rappresenti la situazione descritta determinando la distribuzione stazionaria del numero di clienti nel negozio. Si calcoli anche la percentuale di tempo che in media il proprietario trascorre alla cassa.

Esercizio 2 - risoluzione

Il sistema si può modellizzare come un processo di nascite e morti, con tasso degli arrivi costante e tasso dei servizi che può assumere due valori, a seconda del numero di clienti nel sistema.
Dati:
$\lambda = 30/\mathit{ora}$: tasso degli arrivi
$1/\mu = 2\ \mathit{min} = (1/30)\ \mathit{ora}$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & n \leq 2 \\ 2\mu & n \geq 3 \end{cases} \quad \text{: tasso di servizio}$$

$\pi_0 = 1 \qquad \pi_1 = \lambda/\mu \qquad \pi_2 = (\lambda/\mu)^2 \qquad \pi_3 = 1/2 \cdot (\lambda/\mu)^3 \quad \ldots$

$$\pi_n = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad n \geq 2$$

$P_n = \pi_n P_0$ per ogni $n \geq 0$
Segue il calcolo di P_0

Esercizio 2 - risoluzione

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^k\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}}\right]^{-1} = 1/4$$

Quindi la distribuzione stazionaria é:

$P_0 = 1/4 \qquad P_1 = 1/4 \qquad P_2 = 1/4 \qquad P_3 = 1/8 \quad \dots$

$P_n = \pi_n P_0 = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^n}$ per ogni $\; n \geq 2$

$P[\text{proprietario in cassa}] = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1/4$

La percentuale di tempo che in media il proprietario trascorre alla cassa è il 25%.

Esercizio 3

Un bar ha due camerieri ugualmente efficienti, ciascuno dei quali è in grado di servire, in media, 60 clienti l'ora e i tempi di servizio sono distribuiti esponenzialmente. I clienti entrano nel bar secondo un processo di Poisson, con frequenza media di 100 l'ora.
Determinare:

(a) il numero medio di clienti in attesa di essere serviti;
(b) il tempo medio di attesa prima di essere serviti;
(c) la probabilità che nel bar ci siano più di 5 clienti;
(d) se utilizzando un terzo cameriere è possibile dimezzare il tempo medio di attesa in coda.

Esercizio 3 - risoluzione

Si tratta di un sistema M/M/2 con:

$m = 2$: numero di serventi

$\mu = 60/ora$: tasso di servizio

$\lambda = 100/ora$: tasso degli arrivi

$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 5/6 < 1$: il sistema è in condizioni stazionarie

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 1/11 = 0.09$$

(a) $L_q = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!(1-\rho)} \cdot P_0 = 125/33 = 3.79$

(b) $\overline{W}_q = L_q/\lambda = 3.79/100 = 0.0379\, ore = 2.27\, min$

(c) Ricordiamo che $P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & n = 0, \ldots, m-1 \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{m^{n-m} m!} P_0 & n = m,\ m+1, \ldots \end{cases}$

$P_1 = 0.15, \qquad P_2 = 0.13, \qquad P_3 = 0.11, \qquad P_4 = 0.09,$
$P_5 = 0.07$ e quindi

$P[N > 5] = 1 - \left(\sum_{k=0}^{5} P_k\right) = 0.36$

(d) se $m = 3$:

$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 5/9 < 1$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{3!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 0.17$$

$$\overline{W}_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!(1-\rho)} \frac{1}{m\mu(1-\rho)} = 0.0037\, ore = 0.22\, min$$

Sì, utilizzando il terzo cameriere il tempo medio di attesa in coda è più che dimezzato.

Esercizio 4

Una stazione di servizio di una strada rurale ha un'unica pompa di benzina. Le automobili arrivano alla stazione per fare benzina secondo un processo di Poisson ad un tasso medio di 10 l'ora. Il tempo occorrente per servire un'automobile risulta distribuito esponenzialmente con un valor medio pari a 2 minuti. La stazione di servizio può contenere al massimo 4 automobili e sulla strada vige il divieto di fermata, per cui non è consentito attendere fuori della stazione. Determinare:

(a) il numero medio di automobili presenti nella stazione di servizio;

(b) la probabilità che un'automobile non possa effettuare il rifornimento;

(c) il tempo medio di attesa nella stazione di servizio prima di iniziare il rifornimento.

Esercizio 4 - risoluzione

Si tratta di un sistema M/M/1/K=4 con coda finita, per il quale la condizione di stazionarietà viene sempre raggiunta.

Dati:

$\lambda = 10/ora$: tasso degli arrivi

$1/\mu = 2\ min = 1/30\ ora$

$\mu = 30/ora$: tasso del servizio

$\rho = 1/3 \neq 1$

(a) $L_q = \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{\rho(1+K\rho^K)}{1-\rho^{K+1}} = 0.15$

tasso delle entrate effettive nel sistema:

$\lambda' = \lambda \cdot (1 - P_4) = \lambda \cdot \left(1 - \dfrac{\rho^4(1-\rho)}{1-\rho^5}\right) = 9.9/ora$

$L = \lambda' \overline{W} = \lambda' \left(\overline{W}_q + 1/\mu\right) = L_q + \lambda'/\mu = 0.48$

(b) probabilità che un'automobile non possa effettuare il rifornimento $= P_4 = \frac{\rho^4(1-\rho)}{1-\rho^5} = 0.01$

(c) $\overline{W}_q = L_q/\lambda' = 0.015\ ore = 0.9\ min = 54.5\ sec$

Esercizio 5

Una banca ha 3 cassieri e ciascuno di essi ha una coda di clienti davanti a sè. I clienti che arrivano scelgono a caso una coda e aspettano di essere serviti. Gli arrivi dei clienti nella banca sono poissoniani con frequenza di 24 l'ora e i tempi di servizio di ciascun cassiere sono esponenziali con media di 5 minuti. La banca sta considerando la possibilità di introdurre un sistema a coda unica, in cui ogni cliente verrebbe servito dal primo cassiere che si libera, seguendo l'ordine di arrivo dei clienti. Determinare il tempo medio di attesa in coda nei due sistemi (a code separate e a coda unica) in regime stazionario e stabilire se il cambiamento porterebbe dei benefici.

Esercizio 5 - risoluzione

Attualmente gli sportelli della banca sono tre sistemi indipendenti, ciascuno è un M/M/1 con

$\lambda = 24/3 = 8/\textit{ora}$: tasso degli arrivi

$1/\mu = 5\,\textit{min} = 1/12\,\textit{ora}$

$\mu = 12/\textit{ora}$: tasso del servizio di un servente

$\rho = 2/3 < 1$: in grado di raggiungere il regime stazionario

$$\overline{W}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.17\,\textit{ore} = 10\,\textit{min}$$

Esercizio 5 - risoluzione

La banca sta ipotizzando di trasformare il sistema in un unico M/M/3 con
$\lambda' = 24/ora$
$\mu = 12/ora$
$\rho' = \frac{\lambda'}{3\mu} = 24/36 = 2/3 < 1$, quindi in grado di raggiungere il regime stazionario

$$P_0' = \left[1 + \frac{\lambda'}{\mu} + \frac{(\lambda'/\mu)^2}{2!} + \frac{(\lambda'/\mu)^3}{3!} \cdot \frac{1}{1-\rho'}\right]^{-1} = 1/9 = 0.11$$

$$\overline{W}_q' = P_0' \cdot \frac{(\lambda'/\mu)^m}{m!(1-\rho')} \cdot \frac{1}{m\mu(1-\rho')} = 0.04\, ore = 2.4\, min$$

$\Rightarrow$ il cambiamento porterebbe notevoli benefici in termini di tempo medio di attesa in coda.

Esercizio 6

Un addetto al reparto spedizioni di un'industria manufatturiera riceve ordini e li evade; egli è in grado di evadere, in media, 15 ordini al giorno e i tempi necessari per elaborare gli ordini sono esponenziali e non dipendono dal tipo di ordine. In media, ogni giorno, vengono ricevuti in maniera casuale (arrivi poissoniani) 12 ordini da evadere; tali ordini si dividono in 3 categorie di importanza che sono:

1. *riordini*: ordini da evadere non appena l'addetto si libera, ovvero non appena termina le operazioni di spedizione dell'ordine che sta elaborando;
2. *ordini normali*: ordine di minore importanza rispetto ai riordini che però è bene evadere al più presto;
3. *ordini secondari*: ordini destinati ad un magazzino e che quindi possono attendere anche un tempo lungo per essere evasi.

In media, ogni giorno arrivano 2.5 riordini, 4 ordini normali e 5.5 ordini secondari.

Esercizio 6 (continua)

Descrivere un sistema di code che permetta di costruire un modello di questo reparto spedizioni e determinare, per ciascun tipo di ordine:

(a) il tempo medio di attesa in coda;

(b) il tempo medio di permanenza nel reparto spedizioni;

(c) il numero medio di ordini in attesa di essere evasi;

(d) il numero medio di ordini presso il reparto spedizioni.

NB: non essendo specificato dal testo, immaginiamo che l'addetto lavori 24 ore su 24 (poveretto!); in questo modo, sapendo che è in grado di evadere 15 ordini al giorno, sappiamo anche che ogni ordine lo occupa per 1/15 di giornata. Analogamente, supponiamo che gli arrivi siano distribuiti sulle 24 ore.

Esercizio 6 - risoluzione

Un modello che rappresenta correttamente il sistema è una coda M/M/1 con tre classi di priorità non preemptive, con

$\mu = 15/\textit{giorno}$: tasso del servizio

$\lambda = 12/\textit{giorno}$: tasso complessivo degli arrivi

$\lambda_1 = 2.5/\textit{giorno} \quad \lambda_2 = 4/\textit{giorno} \quad \lambda_3 = 5.5/\textit{giorno}$: tassi degli arrivi di ciascuna classe.

I tassi di utilizzo differenziati per classi sono:

$\rho_1 = \lambda_1/\mu = 0.167$

$\rho_2 = \lambda_2/\mu = 0.267$

$\rho_3 = \lambda_3/\mu = 0.367$

e il tasso di utilizzo complessivo è:

$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0.801 < 1$,

quindi tutte le classi possono raggiungere lo stato stazionario.

Esercizio 6 - risoluzione

(a) il tempo medio di attesa in coda per un ordine di classe k è dato dalla
$\overline{W}_{qk} = \frac{\overline{W}_0}{(1-a_{k-1})(1-a_k)}$
dove $a_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i, \quad a_0 = 0, \quad \overline{W}_0 = 1/2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i E[S_i^2]$
ed S_i è la v.a. $Exp(\mu)$ tempo di servizio, con $E[S^2] = 2/\mu^2$.
Quindi:
$a_0 = 0$
$a_1 = \rho_1 = 0.167$
$a_2 = \rho_1 + \rho_2 = 0.434$
$a_3 = \rho = 0.801$
$\overline{W}_0 = 1/2 \cdot 12 \cdot 2/\mu^2 = 0.053\, giorni$
$\overline{W}_{q1} = \frac{\overline{W}_0}{(1-a_0)(1-a_1)} = 0.064\, giorni = 1.536\, ore$
$\overline{W}_{q2} = \frac{\overline{W}_0}{(1-a_1)(1-a_2)} = 0.112\, giorni = 2.69\, ore$
$\overline{W}_{q3} = \frac{\overline{W}_0}{(1-a_2)(1-a_3)} = 0.471\, giorni = 11.304\, ore$

Esercizio 6 - risoluzione

(b) il tempo medio di permanenza nel reparto spedizioni per un ordine di classe k è:
$\overline{W}_1 = \overline{W}_{q1} + 1/\mu = 0.13\,\textit{giorni} = 3.14\,\textit{ore}$
$\overline{W}_2 = \overline{W}_{q2} + 1/\mu = 4.29\,\textit{ore}$
$\overline{W}_3 = \overline{W}_{q3} + 1/\mu = 12.904\,\textit{ore}$

(c) il numero medio di ordini di classe k in attesa di essere evasi:
$L_{q1} = \lambda_1 \overline{W}_{q1} = 0.16$
$L_{q2} = \lambda_2 \overline{W}_{q2} = 0.448$
$L_{q3} = \lambda_3 \overline{W}_{q3} = 2.60$

(d) il numero medio di ordini presso il reparto spedizioni:
$L_1 = \lambda_1 \overline{W}_1 = 0.325$
$L_2 = \lambda_2 \overline{W}_2 = 0.72$
$L_3 = \lambda_3 \overline{W}_3 = 2.96$

Esercizio 7

Alla mia fermata dell'autobus, l'intervallo di tempo tra il passaggio di un bus e il passaggio del bus successivo è di 3 minuti con probabilità del 40%, di 5 minuti con probabilità del 50% e di 12 minuti con probabilità del 10%. Io arrivo alla fermata del bus in un istante casuale.

(a) Quanto tempo in media devo aspettare fino all'arrivo del bus successivo?

(b) Qual è la probabilità che io arrivi in un intervallo di 12 minuti?

(c) Qual è la probabilità che io attenda meno di un minuto prima che arrivi il bus successivo?

Esercizio 7 - commento del testo

Commento: Si tratta chiaramente del problema di incidenza casuale, che a lezione abbiamo considerato nel caso in cui i tempi di interarrivo seguano una distribuzione continua. La trattazione vista a lezione si può comunque adeguare al caso discreto. In particolare, usando la stessa notazione:

la formula che permette di calcolare il tempo medio di attesa è ancora valida;

la variabile W è discreta e assume gli stessi valori della Y ($W \in \{3, 5, 12\}$), e le sue probabilità sono date da $P[W = k] = \frac{k \cdot P[Y=k]}{E[Y]}$;

la densità della variabile V si trova ancora condizionando V rispetto ai valori che assume W, quindi

$$\begin{aligned} f_V(v) = & f_{V|W}(v|3) \cdot P[W = 3] + f_{V|W}(v|5) \cdot P[W = 5] + \\ & f_{V|W}(v|12) \cdot P[W = 12]; \end{aligned}$$

il risultato che si ottiene è comunque uguale alla $\frac{1-F_Y(v)}{E[Y]}$ riportata a lezione.

Esercizio 7 - risoluzione

La v.a. tempo di interarrivo Y tra un bus e il successivo è discreta a valori in $\{3, 5, 12\}$ con probabilità:

$P[Y = 3] = 0.4, \quad P[Y = 5] = 0.5, \quad P[Y = 12] = 0.1$

$E[Y] = 4.9$

$E[Y^2] = 30.5$

La v.a. tempo rimanente di attesa V è continua, e la sua media si può calcolare con la stessa formula data a lezione.

(a) $E[V] = \dfrac{E[Y^2]}{2E[Y]} = \dfrac{30.5}{2 \cdot 4.9} = 3.11\ min$

(b) La probabilità che io arrivi in un intervallo di 12 minuti è la probabilità che la v.a. W sia uguale a 12. La v.a. durata dell'intervallo di incidenza W è discreta a valori in $\{3, 5, 12\}$ con probabilità:

$P[W = 3] = \frac{3 \cdot P[Y=3]}{E[Y]} = \frac{3 \cdot 0.4}{4.9} = 0.245$

$P[W = 5] = 0.51$

$P[W = 12] = 0.245$

Esercizio 7 - risoluzione

(c) La densità della V si ricava passando per la $V|W$:

$$f_V(v) = f_{V|W}(v|3) \cdot P[W = 3] + f_{V|W}(v|5) \cdot P[W = 5] + f_{V|W}(v|12) \cdot P[W = 12]$$

ricordando che la densità della $V|W$ è $f_{V|W}(v|w) = 1/w$ per $v \in [0, w]$. Quindi

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{3}0.245 + \frac{1}{5}0.51 + \frac{1}{12}0.245 = 0.204 & 0 \leq v \leq 3 \\ \frac{1}{5}0.51 + \frac{1}{12}0.245 = 0.122 & 3 < v \leq 5 \\ \frac{1}{12}0.245 = 0.020 & 5 < v \leq 12 \end{cases}$$

Integrando

$P[V < 1] = \int_0^1 f_V(v)\mathrm{d}v = 0.204$

<u>OPPURE</u>:

$$P[V < 1] = P[V < 1|W = 3] \cdot P[W = 3] + P[V < 1|W = 5] \cdot P[W = 5] + P[V < 1|W = 12] \cdot P[W = 12] = \frac{1}{3}0.245 + \frac{1}{5}0.51 + \frac{1}{12}0.245 = 0.204$$

Esercizio 8

Si consideri una stazione di taxi dove i tassisti che ricercano i passeggeri e i passeggeri che ricercano i tassisti arrivano secondo processi di Poisson, con tassi medi di 1 al minuto e 1,25 al minuto rispettivamente. Un tassista aspetta indipendentemente dal numero di taxi in fila, mentre un passeggero che arriva si mette ad aspettare solo se davanti a lui ci sono due o meno passeggeri in attesa di un taxi. Assumendo le condizioni di stabilità, trovare:

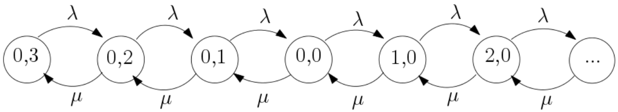
(a) il numero medio di tassisti che aspettano un passeggero;

(b) il numero medio di passeggeri che aspettano un taxi;

(c) il numero medio di passeggeri che nel corso di un'ora non aspettano il taxi perché ci sono almeno tre passeggeri che stanno già aspettando.

Esercizio 8 - risoluzione

La stazione di taxi può essere vista come un processo di nascite e morti, rappresentando gli stati del sistema come le coppie (i, j) con $i \in \mathbb{N}$ numero di taxi e $j \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ numero di passeggeri in attesa.



La transizione da uno stato a quello successivo verso destra rappresenta l'arrivo di un taxi (che se ne va subito se c'è un cliente ad aspettarlo), con tasso $\lambda = 1/min$

La transizione verso sinistra rappresenta l'arrivo di un passeggero (che se ne va subito se c'è un taxi ad aspettarlo), con tasso $\mu = 1.25/min$

Gli stati possono anche venir rinominati: $(i, j) \Rightarrow i - j$

Il sistema è M/M/1 con stato iniziale $(0, 3) \Rightarrow -3$

Esercizio 8 - risoluzione

$\rho = \lambda/\mu = 0.8 < 1$: condizione per l'esistenza dello stato stazionario

$P(-3) = 1 - \rho = 0.2$

$P(k) = \rho^{k+3}(1-\rho) \quad \text{per} \quad k \geq -3$

(a) numero medio di tassisti che aspettano un passeggero

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k+3}(1-\rho)$$

$$= \rho^3 \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho^3 \frac{\rho}{1-\rho} = 2.05 \text{ tassisti}$$

(b) numero medio di passeggeri che aspettano un taxi

$$= 3P(-3) + 2P(-2) + 1P(-1)$$

$$= 3(1-\rho) + 2\rho(1-\rho) + 1\rho^2(1-\rho) = 1.05 \text{ passeggeri}$$

(c) numero medio di passeggeri "rifiutati" in un'ora

$$= P(-3) \cdot (\text{tasso orario degli arrivi dei passeggeri})$$

$$= 0.2 \cdot 1.25 \cdot 60 = 15 \; passeggeri/ora$$

Esercizio 9

Il gestore di un'officina meccanica vuole decidere quanti meccanici utilizzare per formare una squadra di riparatori di autobus. Gli autobus da riparare arrivano in officina in modo casuale, secondo un processo di Poisson con media di uno all'ora. Quando c'è un bus da riparare, tutta la squadra lavora sullo stesso bus, eseguendo la riparazione in un tempo distribuito esponenzialmente; se la squadra è formata da K meccanici, è in grado di riparare $K/2$ bus in un'ora.
Si vuole stabilire il numero di meccanici nella squadra che minimizza il costo orario totale, sapendo che ogni meccanico viene pagato 10$ l'ora e che il mancato utilizzo di un bus in officina è stimato in 40$ l'ora.

Esercizio 9 - risoluzione

K= numero di meccanici nella squadra
Il sistema si comporta come un M/M/1 con:
$\lambda = 1/ora$
$\mu = \frac{K}{2}/ora$
$\rho = 2/K < 1$ se $K \geq 3$
$\rightarrow$ se $K \in \{1, 2\}$ il problema non ha soluzione
Costo totale orario $= f(K) = 10K + 40$(numero di bus in officina)

$$= 10K + 40\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 10K + \frac{80}{K-2}$$

<u>Problema</u>: $\min\{f(K): \; K \in \mathbb{N}, \; k \geq 3\}$

$$f'(K) = 10 - \frac{80}{(K-2)^2},$$

punto di minimo $K = 2 + \sqrt{8} \approx 4.8$
Confrontando $f(4)$ e $f(5) \quad \Rightarrow \quad K^* = 5$

Esercizio 10

In un sistema di servizio con un singolo servente, gli arrivi sono poissoniani con media di 0.6 al minuto e i clienti sono di due tipi: il 40% è di tipo A, il rimanente 60% è di tipo B. I clienti di tipo A hanno priorità non preemptive su quelli di tipo B. I tempi di servizio non dipendono dalla tipologia di cliente, e sono distribuiti uniformemente da 1 a 2 minuti. Calcola il tempo medio di attesa in coda per ciascun tipo di clienti.

Esercizio 10 - risoluzione

$\lambda = 0.6/min$
$\lambda_1 = 0.6 \cdot 40/100 = 0.24/min$: tasso degli arrivi di tipo A
$\lambda_2 = 0.6 \cdot 60/100 = 0.36/min$: tasso degli arrivi di tipo B
$S \sim U[1, 2)$: tempi di servizio (in minuti)
$E[S] = 1/\mu = 1.5\, min$
$E[S^2] = \int_1^2 s^2 ds = 7/3\, min^2$
$\rho_1 = \lambda_1/\mu = 0.24 \cdot 1.5 = 0.36$
$\rho_2 = \lambda_2/\mu = 0.36 \cdot 1.5 = 0.54$
$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0.9 < 1$: stato stazionario per entrambe le classi

Esercizio 10 - risoluzione

Tempo medio di attesa in coda per un cliente di classe k:

$$\overline{W}_{qk} = \frac{\overline{W}_0}{(1 - a_{k-1})(1 - a_k)}$$

dove $a_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i, \quad a_0 = 0, \quad \overline{W}_0 = 1/2 \sum_{i=1}^{2} \lambda_i E[S_i^2]$

Nel caso specifico:

$a_0 = 0, \quad a_1 = \rho_1 = 0.36, \quad a_2 = \rho_1 + \rho_2 = 0.9$

$\overline{W}_0 = 1/2 \cdot \lambda \cdot 7/3 = 0.7\, min$

$$\overline{W}_{q1} = \frac{\overline{W}_0}{(1 - a_0)(1 - a_1)} = \frac{0.7}{1 - 0.36} = 1.09\, min$$

$$\overline{W}_{q2} = \frac{\overline{W}_0}{(1 - a_1)(1 - a_2)} = \frac{0.7}{(1 - 0.36)(1 - 0.9)} = 10.94\, min$$

Esercizio 11

Qual è la probabilità che spezzando in tre pezzi a caso (cosa significa?) un'asta lunga un metro io ottenga i lati di un triangolo? Si chiede di stimare questa probabilità con Excel, simulando 100 volte l'esperimento e contando il numero di successi. Stimare la media e la varianza campionaria di questa probabilità e individuare un intervallo di confidenza per la media con livello di fiducia del 95%. ...

Esercizio 11 - risoluzione

Generare due numeri casuali X_1 e X_2 uniformi in $[0, 1)$.
Tagliare l'asta in corrispondenza dei due numeri.
Si ottengo tre pezzi lunghi rispettivamente:
$A = \min\{X_1, X_2\}$
$B = \max\{X_1, X_2\} - A$
$C = 1 - A - B$
I tre pezzi sono lati di un triangolo se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} A \leq B + C \\ B \leq A + C \\ C \leq A + B \end{cases}$$

Per la implementazione: vedere file Excel Lati_triangolo.xlsx