Esercizi su Teoria delle Code

Prof.ssa Carla De Francesco
Università degli Studi di Padova - Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Ottimizzazione Stocastica

Esercizio 1. In un ufficio postale sono state fatte delle rilevazioni statistiche presso uno sportello per il pagamento dei conti correnti dopo parecchio tempo dall'apertura, in condizioni stazionarie. Si è misurato che lo sportello ha un'affluenza media di 16 clienti l'ora, la durata media di un'operazione è di 3 minuti e in media ci sono 4 clienti (3 in coda e uno allo sportello). Si chiede di calcolare:

(a) il tempo medio trascorso da un cliente nel sistema;

(b) il tempo medio trascorso aspettando in coda;

(c) la lunghezza media della coda;

(d) il fattore di utilizzazione del servente;

(e) la percentuale di tempo in cui il servente è inoperoso.

Esercizio 2. Un negozio ha un'unica cassa servita da una cassiera che provvede anche a confezionare i pacchi. I clienti arrivano alla cassa con frequenza media di 30 all'ora e il tempo occorrente perché la cassiera faccia il conto della spesa, confezioni il pacco e riceva il pagamento dal cliente è in media 2 minuti. Inoltre, ogni volta che vi sono 3 o più clienti nel sistema (coda + cassa), il proprietario del negozio aiuta la cassiera a confezionare i pacchi e in questo modo il tempo medio per servire un cliente diventa pari a 1 minuto. Costruire un modello basato sui processi di nascite e morti che rappresenti la situazione descritta determinando la distribuzione stazionaria del numero di clienti nel negozio. Si calcoli anche la percentuale di tempo che in media il proprietario trascorre alla cassa.

Esercizio 3. Un bar ha due camerieri ugualmente efficienti, ciascuno dei quali è in grado di servire, in media, 60 clienti l'ora e i tempi di servizio sono distribuiti esponenzialmente. I clienti entrano nel bar secondo un processo di Poisson, con frequenza media di 100 l'ora. Determinare:

(a) il numero medio di clienti in attesa di essere serviti;

(b) il tempo medio di attesa prima di essere serviti;

(c) la probabilità che nel bar ci siano più di 5 clienti;

(d) se utilizzando un terzo cameriere è possibile dimezzare il tempo medio di attesa in coda.

Esercizio 4. Una stazione di servizio di una strada rurale ha un'unica pompa di benzina. Le automobili arrivano alla stazione per fare benzina secondo un processo di Poisson ad un tasso medio di 10 l'ora. Il tempo occorrente per servire un'automobile risulta distribuito esponenzialmente con un valor medio pari a 2 minuti. La stazione di servizio può contenere al massimo 4 automobili e sulla strada vige il divieto di fermata, per cui non è consentito attendere fuori della stazione. Determinare:

(a) il numero medio di automobili presenti nella stazione di servizio;

(b) la probabilità che un'automobile non possa effettuare il rifornimento;

(c) il tempo medio di attesa nella stazione di servizio prima di iniziare il rifornimento.

Esercizio 5. Una banca ha 3 cassieri e ciascuno di essi ha una coda di clienti davanti a sè. I clienti che arrivano scelgono a caso una coda e aspettano di essere serviti. Gli arrivi dei clienti nella banca sono poissoniani con frequenza di 24 l'ora e i tempi di servizio di ciascun cassiere sono esponenziali con media di 5 minuti. La banca sta considerando la possibilità di introdurre un sistema a coda unica, in cui ogni cliente verrebbe servito dal primo cassiere che si libera, seguendo l'ordine di arrivo dei clienti. Determinare il tempo medio di attesa in coda nei due sistemi (a code separate e a coda unica) in regime stazionario e stabilire se il cambiamento porterebbe dei benefici.

Esercizio 6. Un addetto al reparto spedizioni di un'industria manufatturiera riceve ordini e li evade; egli è in grado di evadere, in media, 15 ordini al giorno e i tempi necessari per elaborare gli ordini sono esponenziali e non dipendono dal tipo di ordine. In media, ogni giorno, vengono ricevuti in maniera casuale (arrivi poissoniani) 12 ordini da evadere; tali ordini si dividono in 3 categorie di importanza che sono:

1. *riordini*: ordini da evadere non appena l'addetto si libera, ovvero non appena termina le operazioni di spedizione dell'ordine che sta elaborando;

2. *ordini normali*: ordine di minore importanza rispetto ai riordini che però è bene evadere al più presto;

3. *ordini secondari*: ordini destinati ad un magazzino e che quindi possono attendere anche un tempo lungo per essere evasi.

In media, ogni giorno arrivano 2.5 riordini, 4 ordini normali e 5.5 ordini secondari. Descrivere un sistema di code che permetta di costruire un modello di questo reparto spedizioni e determinare, per ciascun tipo di ordine:

(a) il tempo medio di attesa in coda;

(b) il tempo medio di permanenza nel reparto spedizioni;

(c) il numero medio di ordini in attesa di essere evasi;

(d) il numero medio di ordini presso il reparto spedizioni.

NB: non essendo specificato dal testo, immaginiamo che l'addetto lavori 24 ore su 24 (poveretto!); in questo modo, sapendo che è in grado di evadere 15 ordini al giorno, sappiamo anche che ogni ordine lo occupa per 1/15 di giornata. Analogamente, supponiamo che gli arrivi siano distribuiti sulle 24 ore.

Esercizio 7. Alla mia fermata dell'autobus, l'intervallo di tempo tra il passaggio di un bus e il passaggio del bus successivo è di 3 minuti con probabilità del 40%, di 5 minuti con probabilità del 50% e di 12 minuti con probabilità del 10%. Io arrivo alla fermata del bus in un istante casuale.

(a) Quanto tempo in media devo aspettare fino all'arrivo del bus successivo?

(b) Qual è la probabilità che io arrivi in un intervallo di 12 minuti?

(c) Qual è la probabiltà che io attenda meno di un minuto prima che arrivi il bus successivo?

Commento: Si tratta chiaramente del problema di incidenza casuale, che a lezione abbiamo considerato nel caso in cui i tempi di interarrivo seguano una distribuzione continua. La trattazione vista a lezione si può comunque adeguare al caso discreto. In particolare, usando la stessa notazione:
la formula che permette di calcolare il tempo medio di attesa è ancora valida;
la variabile W è discreta e assume gli stessi valori della Y ($W \in \{3, 5, 12\}$), e le sue probabilità sono date da $P[W = k] = \frac{k \cdot P[Y=k]}{E[Y]}$;
la densità della variabile V si trova ancora condizionando V rispetto ai valori che assume W, quindi $f_V(v) = f_{V|W}(v|3) \cdot P[W = 3] + f_{V|W}(v|5) \cdot P[W = 5] + f_{V|W}(v|12) \cdot P[W = 12]$; il risultato che si ottiene è comunque uguale alla $\frac{1-F_Y(v)}{E[Y]}$ riportata a lezione.

Esercizio 8. Si consideri una stazione di taxi dove i tassisti che ricercano i passeggeri e i passeggeri che ricercano i tassisti arrivano secondo processi di Poisson, con tassi medi di 1 al minuto e 1,25 al minuto rispettivamente. Un tassista aspetta indipendentemente dal numero di taxi in fila, mentre un passeggero che arriva si mette ad aspettare solo se davanti a lui ci sono due o meno passeggeri in attesa di un taxi. Assumendo le condizioni di stabilità, trovare:

(a) il numero medio di tassisti che aspettano un passeggero;

(b) il numero medio di passeggeri che aspettano un taxi;

(c) il numero medio di passeggeri che nel corso di un'ora non aspettano il taxi perchè ci sono almeno tre passeggeri che stanno già aspettando.

Esercizio 9. Il gestore di un'officina meccanica vuole decidere quanti meccanici utilizzare per formare una squadra di riparatori di autobus. Gli autobus da riparare arrivano in officina in modo casuale, secondo un processo di Poisson con media di uno all'ora. Quando c'è un bus da riparare, tutta la squadra lavora sullo stesso bus, eseguendo la riparazione in un tempo distribuito esponenzialmente; se la squadra è formata da K meccanici, è in grado di riparare $K/2$ bus in un'ora.
Si vuole stabilire il numero di meccanici nella squadra che minimizza il costo orario totale, sapendo che ogni meccanico viene pagato 10$ l'ora e che il mancato utilizzo di un bus in officina è stimato in 40$ l'ora.

Esercizio 10. In un sistema di servizio con un singolo servente, gli arrivi sono poissoniani con media di 0.6 al minuto e i clienti sono di due tipi: il 40% è di tipo A, il rimanente 60% è di tipo B. I clienti di tipo A hanno priorità non preemptive su quelli di tipo B. I tempi di servizio non dipendono dalla tipologia di cliente, e sono distribuiti uniformemente da 1 a 2 minuti. Calcola il tempo medio di attesa in coda per ciascun tipo di clienti.

Esercizio 11. (Simulazione) Qual è la probabilità che spezzando in tre pezzi a caso (cosa significa?) un'asta lunga un metro io ottenga i lati di un triangolo?
Si chiede di stimare questa probabilità con Excel, simulando 100 volte l'esperimento e contando il numero di successi. Stimare la media e la varianza campionaria di questa probabilità e individuare un intervallo di confidenza per la media con livello di fiducia del 95%.