# Ottimizzazione Stocastica e Programmazione Stocastica

L. De Giovanni

# Modelli per l'incertezza

Consideriamo due tipologie

- **Ottimizzazione robusta**: considerano un insieme esplicito di possibili *scenari*, senza ipotesi di natura probabilistica
- **Ottimizzazione stocastica*** (sfruttano la conoscenza delle *distribuzioni di probabilità* associate ai parametri incerti)

* Ci concentreremo sulla **Programmazione Stocastica** = ottimizzazione stocastica con programmazione matematica

# Esempi: formalizzare con PL/PLI

- Parametri stocastici in f.o. (e.g., max VA)

$$\max\ 0.4\,(3x_L + 5x_P) + 0.4\,(2x_L + 8x_P) + 0.2\,(5x_L + 4x_P)$$

s.t.

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x_L & + & x_P & \leq & 11 & \text{(ettari)} \\ 7x_L & & & \leq & 70 & \text{(semi)} \\ & & 3x_P & \leq & 18 & \text{(tuberi)} \\ 10x_L & + & 20x_P & \leq & 145 & \text{(concime)} \\ x_L & , & x_P & \geq & 0 & \text{(dominio)} \end{array}\right\} F \text{ (regione ammissibile)}$$

- Par. stocastici nei vincoli (e.g., prob(ok) ≥ soglia)

$$\max\ 3x_L + 5x_P$$

s.t.

$$\begin{array}{rcrcll} x_L & + & x_P & \leq & 11 & \text{(ettari)} \\ 7x_L & & & \leq & 70 & \text{(semi)} \\ & & 3x_P & \leq & 18 + 1000(1 - z_1) & \text{(scen.1-tuberi)} \\ 10x_L & + & 20x_P & \leq & 145 + 1000(1 - z_1) & \text{(scen.1-concime)} \\ & & 3x_P & \leq & 16 + 1000(1 - z_2) & \text{(scen.2-tuberi)} \\ 10x_L & + & 20x_P & \leq & 165 + 1000(1 - z_2) & \text{(scen.2-concime)} \\ & & 3x_P & \leq & 25 + 1000(1 - z_3) & \text{(scen.3-tuberi)} \\ 10x_L & + & 20x_P & \leq & 135 + 1000(1 - z_3) & \text{(scen.3-concime)} \\ 0.4\,z_1 + 0.4\,z_2 & + & 0.2\,z_3 & \geq & 0.5 & \text{(prob. ammissibile)} \\ x_L & , & x_P & \geq & 0 & \text{(dominio)} \\ z_1,\ z_2 & , & z_3 & \in & \{0, 1\} & \end{array}$$

# Modelli di Programmazione Stocastica

- evento aleatorio $\omega$ (in spazio continuo o discreto)
- parametri incerti **$c(\omega)$**, **$T(\omega)$**, **$h(\omega)$**: variabili aleatorie (continue o discrete) relative a f.o., vincoli, termini noti

**Programmazione stocastica**:
modello generale

$$\text{“min”} \quad f(\, x \,,\, c^T(\omega)\,) \qquad \text{f.o.}$$

$$\text{s.t.} \quad g(\, x \,,\, T(\omega)\,) \text{ “=” } h(\omega) \qquad \text{vincoli stocastici}$$

$$x \in X \qquad \text{vincoli determin.}$$

- cosa vuol dire “min” [o “max”]???
- e “soddisfare vincoli stocastici”???

# Modelli di Program. (Lin.) Stocastica

- evento aleatorio $\omega$ (in spazio continuo o discreto)
- parametri incerti **c(ω)**, **T(ω)**, **h(ω)**: (matrici o vettori di) var. aleatorie (continue o discrete)

**Programmazione lineare stocastica** (P.L.S.):
modello generale

$$
\begin{array}{lll}
\text{“min”} & c^T(\omega)\,x & \text{f.o.} \\
\text{s.t.} & T(\omega)\,x \text{ “=” } h(\omega) & \text{vincoli stocastici} \\
 & x \in X & \text{vincoli determin.}
\end{array}
$$

- cosa vuol dire “min” [o “max”]???
- e “soddisfare vincoli stocastici”???

# Definizione: controparte deterministica (c.d.)

- Modello generale di Programmazione Stocastica

| | | |
|---|---|---|
| "min" | $f(x, c^T(\omega))$ | f.o. |
| s.t. | $g(x, T(\omega))$ "=" $h(\omega)$ | vincoli stocastici |
| | $x \in X$ | vincoli deterministici |

- Def. controparte deterministica (**c.d.**):
  modello deterministico ottenuto sostituendo i parametri stocastici con un valore numerico.

  Ad esempio: *contr. determ. con valor medio* (o expected value - EV, valore atteso - VA)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x, E[c^T(\omega)]) \\
\text{s.t.} \quad & g(x, E[T(\omega)]) = E[h(\omega)] \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

# "min"?

Criteri da analisi decisionale

- caso peggiore
- **Valore atteso [più usato]**
- …

Altre misure probabilistiche

- si può includere la *varianza*, ma si perdono proprietà (es. linearità, utile per ridurre i tempi di calcolo su problemi di grandi dimensioni)
- …

# "soddisfare vincoli stocastici"?

**Esempio** $\max z = x_2 - x_1$

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{s.t.} & & x_1 + & x_2 + x_3 & & = 2 \\
& \mathbf{a} & x_1 \mathbf{+ b} & x_2 + & x_4 & = 2 \\
& & -1 \le x_1 \le 1 & x_{2,3,4} \ge 0 & &
\end{array}
$$

$(a, b) = (1, 3/4)$ [prob. 0.7] o $(-3, 9/4)$ [prob. 0.3]

- Tentativo: c.d. dei vincoli stoc. con **valori attesi**

  $(a,b) = (-0.2\ , 1.2) \Rightarrow x^* = (-1, 1.5, 1.5, 0)\ ;\ z^*(EV) = 2.5$

[usa PLS.mod]

!!! La soluzione ottenuta potrebbe non essere ammissibile per alcune (o tutte le) realizzazioni

# “soddisfare vincoli stocastici”?

**Esempio**

$$\max z = x_2 - x_1$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$\mathbf{a}\, x_1 + \mathbf{b}\, x_2 + x_4 = 2$$
$$-1 \le x_1 \le 1 \qquad x_{2,3,4} \ge 0$$

$(a, b) = (1, 3/4)$ [prob. 0.7] o $(-3, 9/4)$ [prob. 0.3]

- Tentativo: **Wait and See** (caso ideale con perfetta informazione): risolvere con “tutte” le diverse realizzazioni e mediare f.o. [usa PLS.mod]

$(1, 3/4) \Rightarrow x^* = (-1, 3, 0, 0.75) \quad z^* = 4$

$(-3, 9/4) \Rightarrow x^* = (0.48, 1{,}52, 0, 0) \quad z^* = 1.05$

$z^*(WS) = 3.11$

!!! Non posso implementare due diverse $x^*$: **$z^*$ utopico**

!!! Ciascuna soluzione ottenuta potrebbe non essere ammissibile con probabilità non nulla

# “soddisfare vincoli stocastici”?

**Ridefinire il concetto di ammissibilità**

- Modelli a due (o più) stadi con ricorso
- Modelli con vincoli probabilistici
- … altri (non discussi)

# Ricorso: un esempio introduttivo (TIVAR)

**All'inizio della settimana**, bisogna decidere il piano di utilizzo di 500 macchine per evadere ordini settimanali per 200 kg di dadi e 240 kg di bulloni. Ogni macchina può produrre, in alternativa, dadi o bulloni, al costo settimanale di risp. 150 e 230 €.

**In caso di produzione insufficiente**, si possono acquistare dadi e bulloni all'esterno, a un costo settimanale maggiorato del 30%.

Un **eventuale eccesso** di produzione di dadi e bulloni può essere venduto a un prezzo per kg di risp. 170 e 150 €. Inoltre, le macchine possono anche produrre chiodi, al costo di 260 € per macchina a settimana. I chiodi possono essere esportati, per una quantità massima stimata in 6 tonnellate, al prezzo di 36 €/kg, o venduti localmente a 10 €/kg.

L'esperienza del responsabile della produzione **stima la produzione** settimanale di ogni macchina in, mediamente, 2,5 kg di dadi oppure 3 kg di bulloni oppure 20 kg di chiodi.

Determinare il piano settimanale che **massimizzi il profitto**.

# Esempio introduttivo: analisi

Un problema di produzione

- decidere la destinazione della capacità produttiva (macchine) [variabili decisionali **x**]
- soddisfare la domanda (ordini di dadi, bulloni)
- integrare capacità produttiva (in difetto) con forniture da terzi [var.decis. **y**]
- usare capacità produttiva (in eccesso) per vendite extra (dadi, bulloni) e/o produzioni alternative (chiodi) [v.d. **w**]
- capacità produttiva soggetta a **incertezza**
- possiamo ***prima**** effettuare la produzione e ***dopo**** decidere su forniture da terzi e vendite

*rispetto al momento in cui si realizzano gli eventi incerti

# Esempio introduttivo: modello caso nominale

x1,2,3: macchine dadi, bulloni, chiodi
w1,2,3: vendite dadi, bulloni, chiodi (e,i)
y1,2: acquisti dadi,bulloni

```
maximize
  170 * w1 - 221 * y1
  +150 * w2 - 195 * y2
  + 36 * w3e +  10 * w3i
  -150 * x1 - 230 * x2 - 260 * x3;

subject to {
  num_macchine:   x1 + x2 + x3 <= 500;
  dom_dadi:       parProd * 2.5 * x1 + y1 >= 200 + w1 ;
  dom_bulloni:    parProd *   3 * x2 + y2 >= 240 + w2;
  disp_chiodi:    w3e + w3i <= parProd * 20 * x3;
  lim_export:     w3e <= 6000;
}
```

**parProd = 1 ???**

[vedi tivarN.mod]

# Esempio introduttivo: l'incertezza

La **produttività è variabile aleatoria**: cosa faccio?

[parProd = 1.0 / 1.2 / 0.7 con probabilità = 0.5 / 0.3 / 0.2]

- controparte **deterministica** del modello (**e.g.** param. medi)
  - posso usare decisioni "*dopo*" per *aggiustare* la soluzione
  - i costi/ricavi per aggiustamento sono «fuori controllo»
- applicare **Analisi Decisionale**
  - generare alternative [**e.g.** Sol. Ott. con diversi parProd, media…]
  - valutare il profitto per alternative e scenari [ottimizzo decis. "*dopo*"]
- applicare **Ottimizzazione Stocastica**: ottimizzare in base a informazioni probabilistiche, **integrazione** delle due fasi precedenti (genera, valuta) [**nuovo** modello matematico **integrato**]
  - evita enumerare esplicitamente (tutte le) soluzioni…
  - … ma modello di dimensione elevata

# Es. introduttivo: verso un modello integrato

Possibile modello di **programmazione stocastica**:

- alcune decisioni sono indipendenti dallo scenario (vengono prese **prima**): variabili $x$
- altre decisioni (prese **dopo**) dipendono da come si realizzano i parametri aleatori: variabili $y$ e $w$

  le decisioni di "secondo livello" dipendono dalla realizzazione $s$ dei param. aleatori: $y^s$ e $w^s$
- **associamo una distribuzione di probabilità** ai param. aletori (e.g. discreta per scenari)
- ottimizziamo il valore atteso «complessivo» (calcolato su $x$, $y^s$, $w^s$ e i parametri deterministici e stocastici)

# Modelli a due stadi con ricorso*

**Assunzioni: [decido x → osservo ω → decido y]**

- **Decisioni anticipative** (prima di conoscere la realizzazione di **ω**): variabili decisionali **x** di *primo stadio*
- **Decisioni di ricorso** (dopo la realizzazione di **ω**): variabili **y** di *secondo stadio*
  - Le variabili di secondo stadio sono usate per **correggere le decisioni** di primo stadio e *rendere i vincoli stocastici ammissibili*
  - Le correzioni sono pagate con **penalità** nella funzione obiettivo. La penalità dipende da **ω** e da **x**: la decisione **x** è influenzata dal suo impatto «atteso» dopo **ω**.

* **2 Stages with Recourse: 2SwR**

# Esempio: ricorso con penalità, tentativi

- **Esempio** precedente con due scenari (1 e 2) e
  - tutte variabili $x$ di primo stadio
  - penalità unitaria 0.2 per violazione $y$ del vincolo aleatorio (secondo stadio)
- Modello del problema "nominale"

$$
\begin{array}{llllll}
\underline{\max z} = x_2 - x_1 - 0.2\,|y| & & & & & [\ \textit{nota:}\ \underline{= -\min -z}\ ] \\
\text{s.t.} & x_1 + & x_2 + x_3 & & = 2 & \\
\quad a & x_1 + b & x_2 + & x_4 & = 2 + y & [\ \text{"="} \sim\ + y\ ] \\
\quad -1 \le x_1 \le 1 & & x_{2,3,4} \ge 0 & & & \\
\end{array}
$$

$(a, b) = (1, 3/4)$ [prob. 0.7] o $(-3, 9/4)$ [prob. 0.3]

- Soluzione c.d. con **VA** dei parametri

$x_M^* = (-1,3,0,0,\underline{1.8}^{\#})$, $\underline{z^* = 3.64}^{\#}$

$$
\left.
\begin{array}{l}
z(x_M^*, scen1) = 3.85\ (y=-0.75) \\
z(x_M^*, scen2) = 2.45\ (y=7.75)
\end{array}
\right\} \mathbf{E(z^*)=3.43}
$$

\# <u>non significativo</u>

- Soluzione **WS**

$z^*(scen1)=4.00$ $x^*=(\underline{-1,3,0,0.75}^{\diamond},\ 0\ )$ ;

$z^*(scen2)=2.45$ $x^*=(\underline{-1,3,0,\ \ 0}^{\diamond},7.75)$ ;

$z^*(\underline{WS})=3.54\ ^{\diamond}$

◊ <u>utopico</u>

[usa PLSpen.mod]

# Osservazioni

**Nell'ipotesi 2SwR**, sfrutto la possibilità di posticipare le decisioni di ricorso:

- La decisione $y$ non è unica, ma può variare in funzione della $x$ e di $\omega$
- La decisione $y$ è quella che minimizza il costo per aggiustare le conseguenze di $x$ sull'ammissibilità nella realizzazione $\omega$ (dipende da $x$ e $\omega$)
- Notazione:
  - Il costo minimo del ricorso è indicato con **Q**, ed è funzione di $x$ e $\omega$, quindi $\mathbf{Q}(x,\omega)$
  - Assumiamo un modello nominale lineare: $y$ avrà un coefficiente (stocastico) costante indicato con $\mathbf{q}(\omega)$

# Modelli 2SwR: struttura generale (lineare)

Modello **generale**

**Primo stadio**: minimizza il costo atteso ricorso incluso (la x "tiene conto" di ω)

"min" $c'^T(\omega)\, x'$ **(schema)**
s.t. $T'(\omega)\, x'$ "=" $h'(\omega)$
$x' \in X'$

$$\min \quad c^T x + E[Q(x,\omega)]$$

$$Ax = b \quad [x \in X]$$

$$x \in dom_x$$

Problema di **secondo stadio** (minimizza il costo del ricorso "dati" x e ω – y "dipende" da x e da ω)

$$Q(x,\omega) = \min\ q(\omega)^T y$$

$$T(\omega)x = h(\omega)\ \boxed{-\ W(\omega)\, y}$$

penalità

$$y \in dom_y$$

Correzione per ammissibilità

…(ω): variabili aleatorie

# Modelli 2SwR: «pochi» scenari

I parametri sono variabili aleatorie **discrete** (scenari)

- …($\omega$): var. discrete con num. finito di realizzazioni
- numero finito **N** di scenari (combin. di realizzazioni)
- $p^\ell$ = prob. dello scenario $\ell = 1..N$
- $y^\ell$ : variabili di ricorso **nello scenario** $\ell$

$$\min \; c^T x + \textstyle\sum_{\ell=1..N} p^\ell \, q^{\ell T} \, y^\ell$$

$$Ax = b$$

$$x \in dom_x$$

$$T^\ell x = h^\ell - W^\ell y^\ell \qquad \ell = 1..N$$

$$y^\ell \in dom_y \qquad \ell = 1..N$$

Modello **deterministi-camente equivalente** al modello 2SwR generale

# Esempio: penalità con modello 2SwR

- variabili aleatorie discrete per i parametri aleatori (T, W)
- variabili decisionali $y^1$ e $y^2$ (secondo stadio): scostamento nei due scenari

$$
\begin{array}{lll}
z = & \max & x_2 - x_1 - (0.7 \cdot 0.2\ |y^1| + 0.3 \cdot 0.2\ |y^2|) \\
& \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& & 1\ x_1 + 3/4\ x_2 + x_4 = 2 + y^1 \quad \text{[scenario 1]} \\
& & -3\ x_1 + 9/4\ x_2 + x_4 = 2 + y^2 \quad \text{[scenario 2]} \\
& & -1 \le x_1 \le 1 \quad x_{2,3,4} \ge 0 \\
& & y^1,\ y^2 \text{ libere}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x + \Sigma_{\ell=1..N}\, p^\ell q^{\ell T} y^\ell & \\
& Ax = b & \\
& x \in dom_x & \\
& T^\ell x = h^\ell - W^\ell y^\ell & \ell = 1..N \\
& y^\ell \in dom_y & \ell = 1..N
\end{array}
$$

**Nota**: $h^1 = h^2 = [2]$; $T^1 = [1, \frac{3}{4}, 0, 1]$; $T^2 = [-3, 9/4, 0, 1]$; $W^1 = W^2 = [-1]$;

- soluzione del Recourse Problem [usa PAS2SwRfixsimple.mod]

$x^* = (-1, 3, 0, 0.75)$; $y^* = (0, 3.5)$; $z^*(RP) = 3.49$

**Nominale**

$$
\begin{array}{llll}
\max & x_2 - x_1 - 0.2\ |y| & & \\
\text{s.t.} & x_1 + & x_2 + x_3 & = 2 \\
a & x_1 + b & x_2 + x_4 & = 2 + y \\
& -1 \le x_1 \le 1 & x_{2,3,4} \ge 0 &
\end{array}
$$

(a,b) = (1, 3/4) [prob. 0.7] o (-3, 9/4) [prob. 0.3]

# 2SwR: casi particolari

- **$W(\omega)$ = W** **nota** (non aleatoria)

  **problema con ricorso fisso**

- **$W(\omega)$ = W = ±I** **nota** (coeff. di y +1 o -1)

  **problema con ricorso fisso semplice**

  Applicazioni: il ricorso vuole **minimizzare lo scostamento da valori di riferimento**
  (come nel semplice esempio precedente [vedi PLS2SwRfixsimpleEq1/2.mod])

**nota** *definizione riferita alla "forma standard", con tutti i vincoli di uguaglianza e tutte le variabili decisionali ≥0*

# Nota sulle implementazioni AMPL

- Il modello PLS2SwRfixsimple.mod deriva da una formulazione equivalente lineare della funzione valore assoluto. In particolare:

  max -| β |   equivale a   min | β |

  min |β| non è lineare ma

  |β| = max {β,-β}, quindi min | β | = min max {β,-β}

  min max {β,-β} è quindi equivalente a

  min abs   [ eq. max -abs ]

  s.t.   abs ≥ β

  abs ≥ -β

- I modelli PLS2SwRfixsimpleEq1/2.mod sono ottenuti con trasformazioni equivalenti di PLS2SwRfixsimple.mod:

  ***Eq1***: elimina le variabili y

  ***Eq2***: La definizione di 'ricorso fisso semplice' data prima si riferisce alla forma standard. Nell'esempio abbiamo le variabili y che non sono vincolate in segno, ma possono essere sostituite da $y = y^+ - y^-$, con $y^+, y^- \geq 0$, riconducendosi così alla forma standard (che soddisfa la definizione di ricorso fisso semplice)

# Esempio: ricorso più generale

- ***Azioni di ricorso limitate danno valori ottimi "peggiori"***
  - Esempio da modello nominale precedente

$$
\begin{array}{llllll}
\underline{\max z} = x_2 - x_1 - 0.2\,|y| & & & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 + & x_2 + x_3 & & = 2 \\
 & a & x_1 + b & x_2 + & x_4 & = 2 + y \\
 & -1 \le x_1 \le 1 & & x_{2,3,4} \ge 0 & & \\
\end{array}
$$

$(a, b) = (1, 3/4)$ [prob. 0.7] o $(-3, 9/4)$ [prob. 0.3]

  - come prima, due scenari (var. aleatorie discrete)
  - come prima, penalità 0.2 per violazione unitaria vincolo aleatorio: **$y$** di secondo stadio
  - supponiamo di poter posticipare anche le decisioni $\mathbf{x}_{2,3,4}$: $\mathbf{x}_1$ di primo stadio, $\mathbf{x}_{2,3,4}$ di secondo stadio
  - Nota: è caso 2SwR, ma non fisso (il coefficiente di $\mathbf{x}_2$ cambia nei due scenari)

# Esempio: modello 2SwR caso più generale

- $x_{2,3,4} \rightarrow x_2^{1,2}$ e $x_3^{1,2}$ e $x_4^{1,2}$ (oltre a $y^{1,2}$)

$$z = \max\ 0.7\, x_2^1 + 0.3\, x_2^2 - x_1 - (0.7 \cdot 0.2\, |y^1| + 0.3 \cdot 0.2\, |y^2|)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2^1 + x_3^1 = 2 \\
& 1\, x_1 + 3/4\, x_2^1 + x_4^1 = 2 + y^1 \\
& x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\
& -3\, x_1 + 9/4\, x_2^2 + x_4^2 = 2 + y^2 \\
& -1 \le x_1 \le 1 \\
& x_2^1, x_2^2, x_3^1, x_3^2, x_4^1, x_4^2 \ge 0
\end{aligned}$$

**Nota**: $h^1 = h^2 = [2,2]^T$;

$T^1 = [1,1]^T$; $T^2 = [1,-3]^T$;

$$W^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9/4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Soluzione del Recourse Problem gen [usa PLS2SwRgen.mod]
  (-1, 3, 3, 0, 0, 0.75, 0); $y^* = (0, 4.75)$; $z^*(RPg) = 3.54$
- Nota: $z^*(RPg)$ migliore di $z^*(RP)$ (RP considera una politica di ricorso più semplice rispetto a RPg)

**Nominale**

$$\begin{aligned}
\max\quad & x_2 - x_1 - 0.2\, |y| \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& a\, x_1 + b\, x_2 + x_4 = 2 + y \\
& -1 \le x_1 \le 1 \quad x_{2,3,4} \ge 0
\end{aligned}$$

(a,b) = (1, 3/4) [prob. 0.7] o (-3, 9/4) [prob. 0.3]

# Accuratezza e valore dei modelli (i)

- **z*(WS)** : Valore Atteso ottimo se tutte le informazioni fossero disponibili subito (**Wait and See**). Fornisce un **bound**: miglior valor medio ottenibile con incertezza.
  - risolvo le c.d. in tutti gli scenari (param. di scenario)
  - calcolo la media delle funzioni obiettivo ottenute
- **z*(RP)** : VA ottimo con ricorso (**Recourse Problem**)
- **z*(EEV)** : VA ottimo con *primo stadio fissato* secondo il valor medio (**Expected result using Expected Values**)
  - risolvo la c.d. con il valor medio dei param. stocastici e ***fisso*** *le var. decis. di* ***primo stadio*** *al valore ottenuto*
  - risolvo le c.d. in tutti gli scenari (param. di scenario; var. decis. di primo stadio fissate come sopra)
  - calcolo la media delle funzioni obiettivo ottenute

# Accuratezza e valore dei modelli (ii)

- A parità di modello nominale, z*(RP) e z*(EEV) cambiano con la politica di ricorso: converebbe avere più variabili possibile come ricorso, <u>purché la politica resti *implementabile*</u> (o *non anticipativa*)
- Fissata la politica di ricorso, si ha (problemi di minimo)

$$z^*(WS) \leq z^*(RP) \leq z^*(EEV)$$

(relazioni inverse per problemi di max)

- **VAPI** (Valore Atteso della Perfetta Informazione)

$$VAPI = z^*(RP) - z^*(WS)$$

- **VSS** (Valore della Soluzione Stocastica)

$$VSS = z^*(EEV) - z^*(RP)$$

# Accuratezza dei modelli: esempio [max]

## RPa: 2SwR, caso fisso e semplice:

- $z^*(WS)$: $0.7 \cdot 4 + 0.3 \cdot 2.45 =$ **3.54** [usa PLSpen.mod]
- $z^*(EEVa)$: $0.7 \cdot 3.85 + 0.3 \cdot 2.45 =$ **3.43** [PLSeevfixsimple.mod]
- $z^*(RPa)$: **3.49** [PLS2SwRfixsimple.mod]

Verificato $z^*(WS) \geq z^*(RPa) \geq z^*(EEVa)$ [nota: max]

- **VAPI** $= z^*(WS) - z^*(RP) =$ **0.05**
- **VSS** $= z^*(RP) - z^*(EVV) =$ **0.06**

## RPb: 2SwR, caso generale:

- $z^*(WS)$: $0.7 \cdot 4 + 0.3 \cdot 2.45 =$ **3.54** [vedi PLSpen.mod]
- $z^*(EEVb)$: $0.7 \cdot 4 + 0.3 \cdot 2.45 =$ **3.54** [vedi PLSeevgen.mod]
- Siccome $z^*(WS) \geq z^*(RPb) \geq z^*(EEVb)$, allora $z^*(RP) =$ **3.54**. Pertanto:
  - **non ho vantaggi da strategia 2sWR rispetto alla soluzione con valor medio)** [PLS2SwRgen.mod <u>solo per verifica</u> $z^*(RPb)$]
  - **VAPI** = **VSS** = **0.00**

# L'esempio introduttivo (tivar)

È un caso di 2SwR, infatti:

- Decisioni anticipative: var. $x$ (distribuzione della capacità produttiva)
- Decisioni di ricorso, secondo la realizzazione dello scenario $s$ : var. $y^s$ (come colmare eventuali deficit di produzione) e $w^s$ (come destinare eventuali eccessi di produzione)
- Il modello tivar2SwR.mod è il corrispondente modello PLS di tipo **2SwR**
- **Ricorso fisso**: i coefficienti di $y$ e $w$ sono gli stessi nei diversi scenari

# Esercizio (per i volenterosi…)

Usare modelli AMPL per il problema TIVAR (riferirsi a tivarN.mod e tivar2SwR.mod) per:

1. calcolare il valore atteso della soluzione ottima (Wait and See): TIVAR*(WS)
2. calcolare il valore atteso ottimo con soluzione del valore atteso per primo stadio: TIVAR*(EEV)
3. Calcolare, se necessario, il valore ottimo del problema con ricorso a due stadi: TIVAR*(RP):
4. verificare la corretta relazione tra z*(WS), z*(RP) e z*(EEV)
5. calcolare VAPI e VSS [6988.6 e 110]

# "soddisfare vincoli stocastici"?

**Ridefinire il concetto di ammissibilità**

- Modelli a due (o più) stadi con ricorso
- Modelli con vincoli probabilistici
- … altri (non discussi)

# Modelli con vincoli probabilistici

- I vincoli stocastici possono essere **violati con probabilità sotto una soglia fissata p (livello di affidabilità)**
- Applicazione: livello di servizio garantito

Caso lineare

$\min\ c^T x$

$x \in X$

$P[\ T(\omega)x \geq h(\omega)\ ] \geq p$ [v. probab. **congiunto**]

$P[\ T_i(\omega)x \geq h_i(\omega)\ ] \geq p_i$ [v. probab. **singoli**]

- Se $\Sigma_i(1 - p_i) \leq 1 - p$, allora (singoli $\Rightarrow$ congiunto)
[si noti che usare vincoli singoli tende a semplificare]

# Esempio: agricoltore, caso R(eg)A(mm).b

- Ricordo: problema dell'agricoltore con incertezza data da tre scenari sulla disponibilità di alcune risorse e vincolo "soluzione ammissibile con probabilità almeno del 50%"
- Modello nominale e stocastico

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_L + 5x_P \\
\text{s.t.} \quad & x_L + x_P \le 11 \\
& 7x_L \le 70 \\
& 10x_L + 20x_P \le 145 \\
& 3x_P \le 18
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} x_L + x_P &\le 11 \\ 7x_L &\le 70 \end{aligned}\right\} \quad x \in X$$

$$\left.\begin{aligned} h_1(\omega) \\ h_2(\omega) \end{aligned}\right\} \quad \mathbb{P}\left[\begin{aligned} 10x_L + 20x_P &\le h_1(\omega) \\ 3x_P &\le h_2(\omega) \end{aligned}\right] \ge 0{,}5$$

- È un caso di vincolo probabilistico congiunto

# Esempio: agricoltore, caso R(eg)A(mm).b

Introduciamo variabili binarie $z_s$ che indicano se decidiamo di soddisfare i vincoli dello scenario $s$ (valore 1) o meno (valore 0).

max $3x_L + 5x_P$

s.t.

$$\begin{array}{rcrcll}
x_L & + & x_P & \leq & 11 & \text{(ettari)} \\
7x_L & & & \leq & 70 & \text{(semi)} \\
 & & 3x_P & \leq & 18 + 1000(1 - z_1) & \text{(scen.1-tuberi)} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 145 + 1000(1 - z_1) & \text{(scen.1-concime)} \\
 & & 3x_P & \leq & 16 + 1000(1 - z_2) & \text{(scen.2-tuberi)} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 165 + 1000(1 - z_2) & \text{(scen.2-concime)} \\
 & & 3x_P & \leq & 25 + 1000(1 - z_3) & \text{(scen.3-tuberi)} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 135 + 1000(1 - z_3) & \text{(scen.3-concime)} \\
0.4\, z_1 + 0.4\, z_2 & + & 0.2\, z_3 & \geq & 0.5 & \text{(prob. ammissibile)} \\
x_L & , & x_P & \geq & 0 & \text{(dominio)} \\
z_1,\ z_2 & , & z_3 & \in & \{0, 1\} &
\end{array}$$

**Una possibile realizzazione** di un vincolo probabilistico congiunto in un caso con incertezza definita da pochi scenari

# Espress. analitica di vincoli probab. (i)

- Difficile trovare espressione analitica
- In generale, regione ammissibile **non convessa**

$$X(p) = \{x \in X \mid P[T(\omega)x \geq h(\omega)] \geq p\} =$$

$$= \bigcup_{G \subseteq \Omega : P(G) \geq p} \bigcap_{\omega \in G} \{x \in X \mid T(\omega)x \geq h(\omega)\}$$

## Esempio

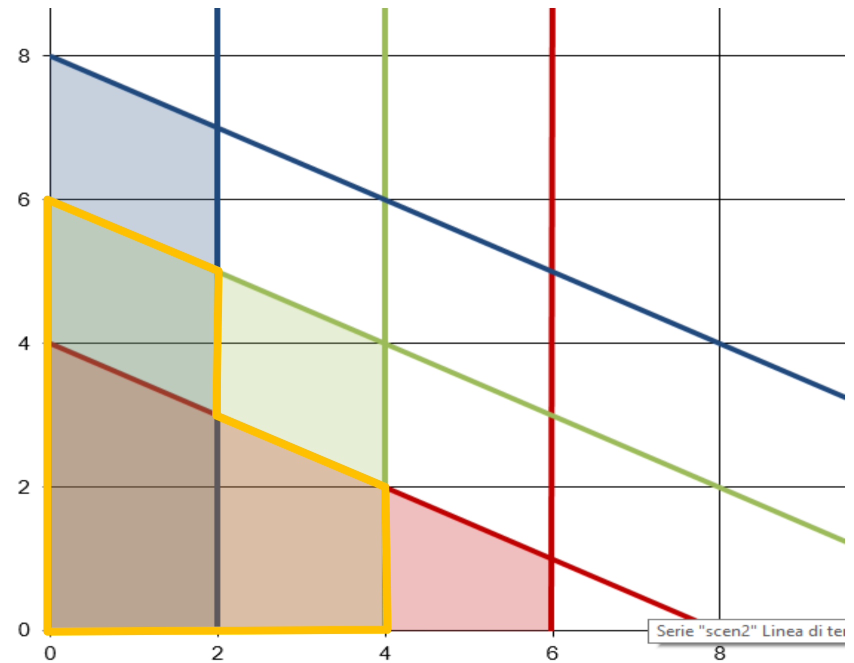
$$P\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \leq h_1 \\ x_1 \leq h_2 \end{bmatrix} \geq p$$

$(h_1,h_2) = (16,2)$ con prob. 1/3

$(h_1,h_2) = (12,4)$ con prob. 1/3

$(h_1,h_2) = (8,6)$ con prob. 1/3

X ( p=0.5 )



# Espress. analitica di vincoli probab. (ii)

Alcuni casi particolari con **vincoli singoli**:

- **$T(\omega) = T$** [deterministica]

  $P[T_i\, x \geq h_i(\omega)] \geq p_i \; (\Leftrightarrow F_i(T_i\, x) \geq p_i) \Leftrightarrow T_i\, x \geq F_i^{-1}(p_i)$

  $F_i^{-1}(p_i)$ : $p_i$-quantile della f. di ripart. $F_i$ di $h_i(\omega)$

- **$T(\omega)$ con componenti normali di medie $\mu$ e matrice di covarianza $C$, h deterministico**

  $P[T_i(\omega)\, x \geq h] \geq p_i \Leftrightarrow \mu^T x \geq h - F^{-1}(p_i)(x^T C x)^{\frac{1}{2}}$

  $F^{-1}(p)$ : p-quantile della normale standard

# Esempio: Valore a Rischio (VAR)

- Capitale iniziale 15000
- 4 investimenti con rendimenti aleatori $R_{1,2,3,4}$ con valori attesi 1%, 2%, 1%, 3%.
- Vincolo sul valore a rischio (VAR): limitare eventuali perdite a 2000 con prob. di almeno il 95%.
- Massimizzare il valore atteso dell'investimento.

$$\max \; 0.01\, x_1 + 0.02\, x_2 + 0.01\, x_3 + 0.03\, x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15000$$

$$P[\; (R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_4 x_4) \geq -2000 \;] \geq 0.95$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0$$

# Esempio VAR

- Rendimenti con distribuzione normale congiunta con

$$\mu = [\, 0.203, 0.053, 0.150, 0.152 ]$$

$$C = [\, 0.205, 0.037, 0.107, 0.049, \\ 0.037, 0.079, 0.035, 0.102, \\ 0.107, 0.035, 0.086, 0.044, \\ 0.049, 0.102, 0.044, 0.443 \,]$$

- Il vincolo probabilistico diventa

$$0.203x_1 + 0.053x_2 + 0.150x_3 + 0.152x_4 \geq -2000 + \\ - 1.645\,(\, 0.205\,(x_1)^2 + 0.079\,(x_2)^2 + 0.086\,(x_3)^2 + 0.443\,(x_4)^2 + \\ 0.074\,x_1x_2 + 0.214\,x_1x_3 + 0.098\,x_1x_4 + \\ 0.070\,x_2x_3 + 0.204\,x_2x_4 + 0.088\,x_3x_4\,)^{\frac{1}{2}}$$

[1.645 : 0.95-quantile della normale std.]

[vedi VARnl.mod/.run: non lineare! solver *minos* con opportuna inizializzazione]

# Soluzione di modelli di PLS

Modelli Prog. Stoc. in generale difficili da risolvere:

- Dimensioni elevate dei modelli
- Presenza di componenti non lineari o non convesse

Si cerca di:

- Sfruttare la struttura (decomposizione)
- Applicare euristiche (soluzioni “buone”) se i tempi di calcolo a disposizione sono limitati
- Risolvere problemi deterministici equivalenti, se possono garantire buona accuratezza

# …note (possibile struttura a blocchi della matrice dei vincoli)

Caso 2sWR con scenari

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|l}
 & x & y^1 & y^2 & \dots & y^n & & \\
\hline
 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & b & \text{det.} \\
 & T^1 & W^1 & 0 & 0 & 0 & h^1 & \text{scen } 1 \\
 & T^2 & 0 & W^2 & 0 & 0 & h^2 & \text{scen } 2 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & T^n & 0 & 0 & 0 & W^n & h^n & \text{scen } n
\end{array}
$$

Struttura "a blocchi", utile per DECOMPOSITION METHODS

# Esercizio

Si consideri il seguente modello nominale per un problema di ottimizzazione stocastica a due stadi con ricorso, variabili di primo stadio x e y, e variabili di secondo stadio z e w:

$$\begin{array}{llllll}
\max & 5x - 7y & + \; b\,z & & & \\
\text{s.t.} & 4x + 2y & & & \le & 9 \\
 & x + a\,y & + \; z & & \ge & 7 \\
 & x + & z & + 2w & \le & 5 \\
 & x,y,z \ge 0 \text{ e intere}, & w \ge 0 & & &
\end{array}$$

dove i parametri aleatori **(a,b)** assumono valore (1,3) con probabilità 0,4 e (2,-1) con probabilità 0,6.

a. Si scriva il corrispondente modello a due stadi con ricorso

b. Si tratta di ricorso fisso?

c. Attribuire i valori -5.4, -2.4, -3.1, -4.2: al valore atteso EEV, al valore atteso WS, alle soluzioni ottime con ricorso come descritto (RP1) e con solo w di primo stadio (RP2)

Giustificare tutte le risposte.

## …note (svolgimento)

$$\begin{array}{llr}
\max & 5x - 7y + \mathbf{b}\,z & \\
\text{s.t.} & 4x + 2y & \le 9 \\
& x + \mathbf{a}\,y + z & \ge 7 \\
& x + z + 2w & \le 5 \\
& x, y, z \ge 0 \text{ e intere}, \quad w \ge 0 &
\end{array}$$

**(a,b)** = (1,3) p 0,4 ; (2,-1) p 0,6

a) $\max\ 5x - 7y + 0.4 \cdot 3 z^1 - 0.6 z^2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 4x + 2y && \le 9 \\ & x + y + z^1 && \ge 7 \\ & x + 2y + z^2 && \ge 7 \\ & x + z^1 + 2w^1 && \le 5 \\ & x + z^2 + 2w^2 && \le 5 \\ & x, y, z^1, z^2 \ge 0 \text{ intere}, && w^1, w^2 \ge 0 \end{aligned}$$

b) SI $\quad W^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = W^2$

c) $z(WS) \ge z(RP1) \ge z(RP2) \ge z(EEV)$

$\quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

$-2{,}4 \qquad -3{,}1 \qquad -4{,}2 \qquad -5{,}4$

# Esercizio

***Problema del newsvendor***

Ogni giorno un giornalaio deve decidere quanti quotidiani ordinare per il giorno successivo tenendo conto dell'incertezza della domanda. Assumiamo che ogni quotidiano abbia un costo di 0.50 € e possa essere venduto al prezzo di 1.20 €. I quotidiani invenduti possono essere riciclati recuperando 0.15 €. Supponiamo che in base al budget disponibile il giornalaio voglia fissare il limite massimo di 100 sul numero di quotidiani da acquistare. Assumendo che la domanda incerta sia rappresentabile attraverso 3 scenari equiprobabili pari a 30, 60 e 120, formulare il problema come modello a due stadi con ricorso, avente come obiettivo la massimizzazione del profitto atteso.

# …note (svolgimento)

NOMINALE

$\max -0{,}5x + 1{,}2y + 0{,}15r$

s.t. $x \le 100$

$y + r \le x$ $\quad y \le D$

$x, y, r \in \mathbb{Z}_+$

- $x$: numero giornali acquistati
- $y_s$: num. giornali venduti nello scenario $s$
- $r_s$: num. giornali riciclati nello scenario $s$

$$
\begin{aligned}
z = \max\ -0.5\,x + {} & \tfrac{1}{3}(1.2\,y_1 + 0.15\,r_1) + \\
& + \tfrac{1}{3}(1.2\,y_2 + 0.15\,r_2) + \\
& + \tfrac{1}{3}(1.2\,y_3 + 0.15\,r_3)
\end{aligned}
$$

s.t.

$$x \le 100$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + r_1 &\le x & \qquad y_1 &\le 30 \\
y_2 + r_2 &\le x & \qquad y_2 &\le 60 \\
y_3 + r_3 &\le x & \qquad y_3 &\le 120
\end{aligned}
$$

$x, y_1, y_2, y_3, r_1, r_2, r_3 \ge 0$, interi

# Esercizio

Formulare un modello di programmazione stocastica a due stadi per il problema della pianificazione della produzione dell'energia elettrica su un orizzonte temporale di 24 ore. Si suppone che un produttore gestisca I impianti termici e voglia soddisfare ad ogni intervallo temporale una domanda casuale rappresentata da un insieme di N scenari che indichiamo con $d_t^s$, s=1…N, t=1…24. Ciascuno scenario ha probabilità $p^s$. Le decisioni di primo stadio sono di tipo binario e si riferiscono allo stato di ciasciuno degli impianti (on/off) al periodo t, mentre le decisioni di secondo stadio rappresentano le potenze da produrre in ciascun impianto i, i=1…I al periodo t, in modo da minimizzare il costo totale atteso di produzione, considerando che un impianto comporta un costo $F_i$ ogni volta che viene (ri)acceso, e un costo $V_i$ per ogni unità di potenza prodotta.

# …note (svolgimento)

NOMINALE: $x_{it}$ : impianto $i$ produce al tempo $t$

$x'_{it}$ : " " RIACCESO " " "

$y_{it}$ : potenza impianto $i$ al tempo $t$

$$\min \sum_{i\in I}\sum_{t\in T}\left(F_i x'_{it} + V_i y_{it}\right) \quad (*)$$

$T = \{1 .. 24\}$

s.t.

$$y^s_{it} \le M x_{it}, \quad \forall i \in I,\ t\in T,\ \forall s\in S$$

$$\sum_{i\in I} y^s_{it} \ge d^s_t, \quad \forall t\in T,\ \forall s \in S$$

$$x'_{it} \ge x_{it} - x_{i(t-1)}, \quad \forall i\in I,\ t\in T$$

$$x_{i0} = 0$$

$$x'_{it}, x_{it} \in \{0,1\},\ y^s_{it} \ge 0, \quad \forall i\in I,\ t\in T,\ s\in S$$

2SwR: $y_{it} \rightsquigarrow y^s_{it}$

$$(*) \quad \sum_{s\in S} p^s V_i y^s_{it}$$

- $x_{it}$: 1 se impianto produce al tempo t, 0 altrimenti
- $x'_{it}$: 1 se impianto viene acceso al tempo t, 0 altrimenti
- $y_{it}^s$: potenza al tempo t nell'impianto i, nello scenario s

$$\min \quad \Sigma_{i,t} F_i x'_{it} + \Sigma_s p^s \; \Sigma_{i,t} V_i y_{it}^s$$

s.t. $y_{it}^s \leq BIGM\, x_{it} \qquad \forall\, i,t,s$ [BIGM = costante elevata]

$\Sigma_i y_{it}^s \geq d_t^s \qquad \forall\, t,s$

$x'_{it} \geq x_{it} - x_{i(t-1)} \qquad \forall\, i,t$ (ponendo $x_{i,0} = 0$)

$x_{it}, x'_{it} \in \{0,1\} \qquad y_{it}^s \geq 0$