Ottimizzazione in condizioni di incertezza o rischio

G. Andreatta, L. De Giovanni

Incertezza può riguardare:

- Stato corrente
- Stati futuri
- Eventi imprevisti
- Eccessiva complessità del sistema

- Alcuni parametri (es. scenari, o intervallo)
- Struttura del sistema (es. guasti)

Come affrontare l'incertezza

- *Trascurare* l'incertezza (e.g. azioni di recupero non esplicite)
- Risolvere con parametri / struttura più probabili (e.g., max verisim.) o ***attesi***
  - può orientare la formulazione di alternative, ma…
  - …*sensibile* a piccole variazioni della soluzione
  - …poco adatto al caso combinatorio (ammissibilità)
- ***Includere esplicitamente*** l'incertezza nei modelli matematici e negli algoritmi di ottimizzazione

Modelli per l'incertezza

Consideriamo due tipologie

- **Ottimizzazione robusta**: considerano un insieme esplicito di possibili *scenari*, senza ipotesi di natura probabilistica
- **Ottimizzazione stocastica*** (sfruttano la conoscenza delle *distribuzioni di probabilità* associate ai parametri incerti)

* Ci concentreremo sulla **Programmazione Stocastica** = ottimizzazione stocastica con programmazione matematica

Analisi decisionale e Ottimizzazione robusta/stocastica

- Ottimizzazione robusta
  ~ analisi decisionale in condizioni di incertezza
- Ottimizzazione stocastica
  ~ analisi decisionale in condizioni di rischio

- Analisi decisionale: definire criteri di ottimalità per il confronto di alternative date
- Ottimizzazione: «generare» la migliore alternativa accettabile (secondo criteri di ottimalità e ammissibilità)

Ottimizzazione robusta/stocastica: alcuni esempi introduttivi

Vedi

«Programmazione matematica in condizioni di incertezza o rischio»

...

Def: caso nominale e controparte robusta / stocastica di un probl. di ottimizzazione

Caso nominale: funzione obiettivo, caratteristiche delle soluzioni ammissibili, parametri (senza incertezza)

Caso robusto/stocastico: una delle *controparti robuste/stocastiche* definite da:

- Modalità di **rappresentazione dell'incertezza**
- **Criteri di robustezza** che stabilistono la ragionevolezza della soluzione

Definizione: problemi «facili» e «difficili»

- **Problema «facile»**: è noto un algoritmo che trova la soluzione in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'istanza
  (Classe **P**)
  - Es. cammino minimo «nominale», PL etc.
- **Problema «difficile»: non** è noto…
  (Classe **NP**)
  - Es. traveling salesman problem, PLI etc.

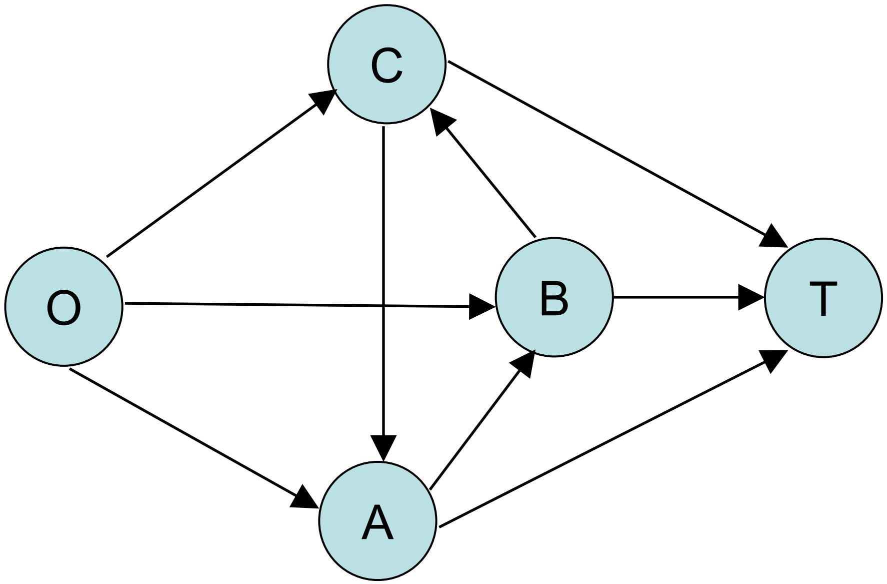
Garey, M. R.; Johnson, D. S. (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman and Co.

Ottimizzazione Robusta

Ottimizzazione robusta

- Non si hanno informazioni di tipo probabilistico, ma scenari (diverse realizzazioni [es. domanda bassa o alta] o situazioni [es. giorno/notte])
- Soluz. robusta = ***valida e di valore ragionevole*** con ***ogni*** scenario in un insieme definito:
  - la decisione, una volta presa, non si può più correggere (nella versione classica)
  - si sceglie un criterio di *conservativismo* (➔ livello di robustezza)
  - compromesso tra robustezza e valore (rispetto al caso *nominale*)

Problema guida:
Cammino minimo in una rete



Nominale: minimizza costo
Dijkstra, Bellman-Ford (Polinomiale)

Incertezza:

- condizioni di congestione (variazioni di c_{ij})
- condizioni di guasto (disponibilità di nodi/archi)
- etc. etc.

Cammino Minimo (C.M.) Robusto:
determinare un cammino valido e di costo "accettabile" (ragionevole) sotto ogni condizione

Alcune modalità di

RAPPRESENTAZIONE DELL'INCERTEZZA

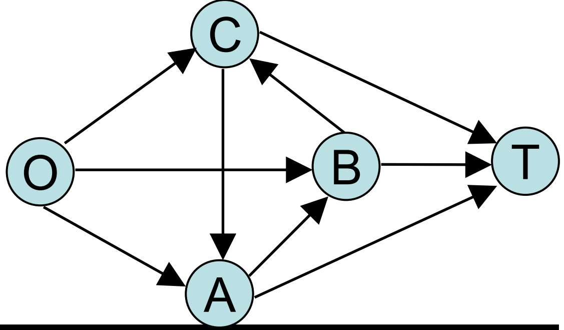
Rappresentazione dell'incertezza

Incertezza legata ai **parametri** del problema.
Rappresentazione/modellazione:

1. Mediante scenari (possibili realizzazioni dei parametri incerti)
   - $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$
2. Mediante intervalli (*)
   - Parametro incerto $a \in [a^- , a^+]$
3. Mediante poliedri (*)
   - Poliedro HOSE
4. (e altri … , che potrebbero però portare a controparti troppo difficili da trattare)

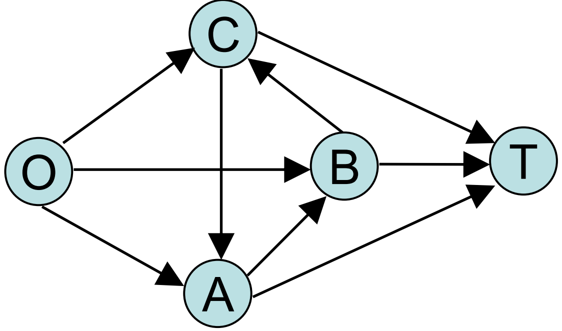
(*) caso particolare di 1: *infiniti* scenari

Rappresentazione mediante Scenari



	Scenario 1	Scenario 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5

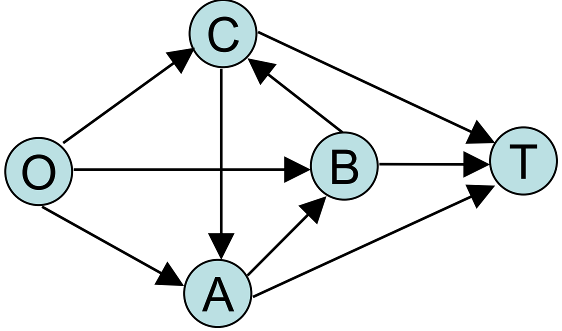
Rappresentazione mediante Scenari



	scen 1	scen 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5

Cammino OBT ha un tempo di attraversamento pari a 2 (scen. 1) e 20 (scen. 2);

Rappresentazione mediante Scenari



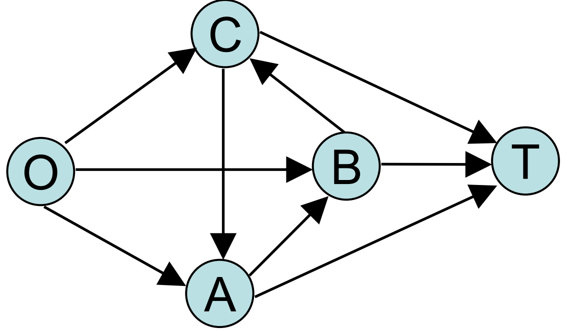
	scen. 1	scen. 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5

Cammino OBT ha un tempo di attraversamento pari a 2 (scen. 1) e 20 (scen. 2);

Cammino OABCT ha un tempo di attraversamento pari a 40 (scen. 1) e 4 (scen. 2);

Rappresentazione mediante Scenari

	scen. 1	scen. 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5



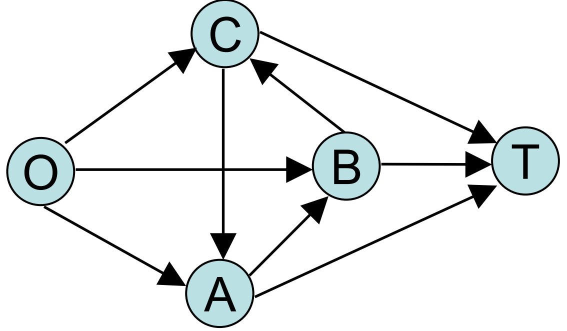
Cammino OBT ha un tempo di attraversamento pari a 2 (scen. 1) e 20 (scen. 2);

Cammino OABCT ha un tempo di attraversamento pari a 40 (scen. 1) e 4 (scen. 2);

Cammino OCAT ha un tempo di attraversamento pari a 15 (scen. 1) e 15 (scen. 2);

…

Rappresentazione mediante Scenari



	scen. 1	scen. 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5

Cammino OBT ha un tempo di attraversamento pari a 2 (scen. 1) e 20 (scen. 2);

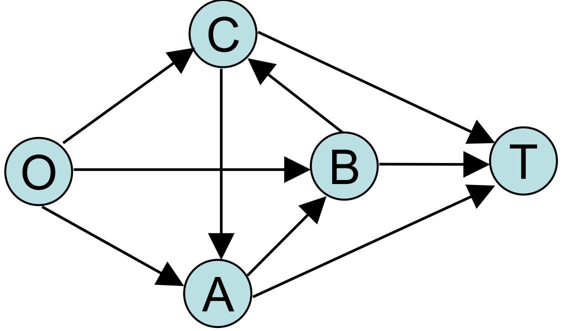
Cammino OABCT ha un tempo di attraversamento pari a 40 (scen. 1) e 4 (scen. 2);

Cammino OCAT ha un tempo di attraversamento pari a 15 (scen. 1) e 15 (scen. 2);

…

Nota: abbiamo dedotto alternative trattabili con l'analisi decisionale. Tratteremo criteri e modalità di scelta «robusti» (≈ an. decis.)

Rappresentazione mediante **Intervalli**



	c_{ij}^-	c_{ij}^+
OC	3	5
OB	1	10
OA	1	10
CT	1	10
BT	1	10
AT	3	7
AB	1	10
BC	1	10
CA	5	7

Cammino OBT ha un tempo di attraversamento che va da 2 (min) a 20 (max);

Cammino OABCT ha un tempo di attraversamento che va da 4 (min) a 40 (max);

Cammino OCAT ha un tempo di attraversamento che va da 11 (min) a 19 (max);

…

Nota: abbiamo dedotto alternative **valutate con un intervallo**. Tratteremo criteri e modalità di scelta «robusti» (≠ an. decis.)

Rappresentazione mediante poliedri

Il vettore dei parametri ignoti $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (i c_{ij} nell'esempio) soddisfano insieme di vincoli. Con vincoli lineari, poliedro:

$$Q = \{\alpha : H\alpha \leq g\} \qquad g \in \mathbb{R}^m, H \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Rappr. mediante intervalli è un caso particolare della rappr. mediante poliedri:

$$Q = \{c : c_{ij}^- \leq c_{ij} \leq c_{ij}^+, \forall (i,j) \in A\}$$

Ogni punto in Q costituisce uno scenario

Rappresentazione mediante poliedri: Esempio

$c_{OC} + c_{OB} + c_{OA} \leq 15$ [uscenti da O]

$c_{CT} + c_{BT} + c_{AT} \leq 15$ [entranti in T]

$c_{AB} + c_{BC} + c_{CA} \leq 20$ [nel ciclo a-b-c-a]

$c_{OC} + c_{BC} + c_{CT} \geq 5$ [...]

$c_{OB} + c_{BC} + c_{BT} + c_{AB} = 10$ [...]

Poliedro Hose (Hose demand uncertainty)

- Esempio: Rete di telecomunicazioni (o trasporti)
- Insieme di k coppie di **O**rigine-**D**estinazione
- d_h = richiesta di comunicazione da nodo O_h a nodo D_h (demand, coppia h)
- Dato un nodo v, ci sono dei limiti B_v^- / B_v^+ alla domanda entrante / uscente
- Hose = {$d \in R^k$ | per ogni nodo v,

  $\Sigma(d_h$: O_h,D_h aventi origine in v) $\leq B_v^+$ &

  $\Sigma(d_h$: O_h,D_h aventi destin. in v) $\leq B_v^-$ }

Poliedro Hose: esempio

- 2 origini (O e W)
- 2 destinazioni (U e T)
- 4 coppie O-D (OU, OT, WU, WT)
- Esempio di Hose:

  Hose = $\{d \in R^4$: $d_{OT} + d_{OU} \leq 1$* &
  $d_{WT} + d_{WU} \leq 1$ & $d_{OT} + d_{WT} \leq 2$**
  & $d_{OU} + d_{WU} \leq 1\ \}$

* La domanda generata da O verso ciascuna destinazione è incerta, sappiamo solo che il totale è al massimo 1

** La domanda generata da ciascuna origine verso la destinazione T è incerta, sappiamo solo che il totale è al massimo 2

Un "modello" per l'incertezza

La scelta della modalità di rappresentazione dell'incertezza è un compromesso tra:

- Natura dell'incertezza
- Natura del problema
- Possibilità di modellare il problema e di trattarlo con metodi di soluzione (**scelta modellistica**, semplifica la realtà)

Le modalità precedenti non sono le uniche e non è detto che rispecchino sempre in modo fedele la realtà dell'incertezza e del problema, ma sono quelle che, a seconda dei casi, come vedremo, ci permettono dei modelli "utili" [trovare il modello giusto per la realtà]

Determinazione di una soluzione robusta:

CRITERI E MODELLI PER LA ROBUSTEZZA

Criteri di Robustezza: schema

- Caso nominale (fissiamo problema di min):

$$\min \{ c(x) : x \in F \}$$

- **Controparte robusta**: incertezza su un vettore α di n tra i parametri che definiscono c o F

- Robustezza **in senso assoluto (S.A.)** [e.g., maxmin]
  - Incertezza a livello di funzione obiettivo
  - Incertezza a livello di regione ammissibile
  - Robustezza in S.A. con parametro di controllo

- Robustezza **in senso relativo** [e.g., min regret]

Rob. in senso assoluto: incertezza a livello della funzione obiettivo

- *Incertezza data mediante scenari (più generale)*
- S = possibili scenari s relativi ai parametri α (vettore)
- F = regione ammissibile
- $c(x)$ = funzione obiettivo (f.o.) che dipende da α
- $c^s(x)$ = f.o. con realizzazioni di α secondo $s \in S$

Soluzione (minimax):

$$\text{MIN}_x \{\text{MAX}_s [c^s(x): s \in S]: x \in F\}$$

Molto conservativo! individua la soluzione che si comporta meglio nel **peggiore** dei casi

Esempio: agricoltore, caso FO.a

Caso FO.a: max - min

$$\max \ \min\{3x_L + 5x_P \ ; \ 1x_L + 6x_P \ ; \ 5x_L + 4x_P\}$$

s.t.

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x_L & + & x_P & \leq & 11 & \text{(ettari)} \\ 7x_L & & & \leq & 70 & \text{(semi)} \\ & & 3x_P & \leq & 18 & \text{(tuberi)} \\ 10x_L & + & 20x_P & \leq & 145 & \text{(concime)} \\ x_L & , & x_P & \geq & 0 & \text{(dominio)} \end{array}\right\} F \text{ (regione ammissibile)}$$

Attenzione: la funzione obiettivo può essere resa lineare come segue:

$$\begin{array}{rrcl} \max & y & & \\ \text{s.t.} & y & \leq & 3x_L + 5x_P \\ & y & \leq & 1x_L + 6x_P \\ & y & \leq & 5x_L + 4x_P \\ & (x_L, x_P) & \in & F \\ & y & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Osservazioni

- Criterio **maxmin** se f.o. di max
- Simile a minimax o maxmin di analisi decisionale (ma qui non abbiamo alternative e/o scenari espliciti)
- Modalità di soluzione dipendono dal problema specifico e da come è rappresentata l'incertezza. Si può usare, ad esempio, modellazione in programmazione matematica.
- **In generale, problemi difficili** (anche partendo da casi nominali polinomiali), con modelli e metodi di soluzione specifici

Esempio cammino minimo robusto S.Assol.: rappr. incertezza con "pochi" scenari

- $[c^s(x): s \in S]$ = costo del cammino x se si verifica lo scenario s;
- $MAX_{\_s}$ $[c^s(x): s \in S]$ = lunghezza del cammino x nel caso (scenario) peggiore;
- Con numero "piccolo" di scenari, è possibile formulare un modello di PL simile al caso dell'agricoltore FO.a (*vedi note*)
- La controparte robusta in senso assoluto per f.o. è **"NP-hard"** (anche se il caso nominale è "polinomiale" e gli scenari sono "pochi")

Note: Modello PL per C.M. robusto in senso assoluto con due scenari

	scen. 1	scen. 2
OC	5	3
OB	1	10
OA	10	1
CT	10	1
BT	1	10
AT	3	7
AB	10	1
BC	10	1
CA	7	5

Note: Modello PL per C.M. robusto in senso assoluto con due scenari

$$\min y$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,s)\in A} x_{is} - \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = \begin{cases} -1 & \text{se } s = O \\ +1 & \text{se } s = T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x \in P$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

$$y = \max \left\{ \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^1 x_{ij} \, ; \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^2 x_{ij} \right\}$$

$$\to \quad y \geq \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^1 x_{ij}$$

$$y \geq \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^2 x_{ij}$$

Implementazione in `cmRobAssFOscen.mod` (con dati c_{ij}^1 e c_{ij}^2 da slide 11)

Esempio C.M. robusto senso assoluto: rappresentazione incertezza per intervalli

- In questo caso, controparte robusta è polinomiale
  ➔ E' sufficiente risolvere un problema di C.M. usando, per ogni arco, il valore c_{ij}^+
- ***Dim.*** da modello di progr. matematica:

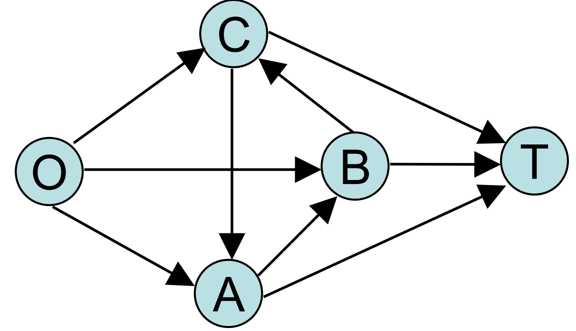
Esempio C.M. robusto senso assoluto: rappresentazione incertezza per intervalli

- In questo caso, controparte robusta è polinomiale
  ➔ E' sufficiente risolvere un problema di C.M. usando, per ogni arco, il valore c_{ij}^+
- Dim. da modello di progr. matematica:

$$\left\{\begin{array}{l} \min\limits_x \; y \\ \text{s.t. } x \in P \\ \qquad y = \left.\begin{array}{l} \max\limits_c \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \quad \text{s.t. } c_{ij} \geq c_{ij}^-, \; \forall (i,j) \in A \\ \qquad\;\; c_{ij} \leq c_{ij}^+, \; \forall (i,j) \in A \end{array}\right\} \equiv \boxed{y = \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{ij}^+ x_{ij}} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \min \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{ij}^+ x_{ij} \\ \text{s.t. } x \in P \end{array}}$$

Esempio (robustezza in S.A., intervalli)



	c_{ij}^-	c_{ij}^+
OC	3	5
OB	1	10
OA	1	10
CT	1	10
BT	1	10
AT	3	7
AB	1	10
BC	1	10
CA	5	7

Il C.M. Robusto in S.A. risulta il cammino OCT che nel caso peggiore costa 15.

Tale cammino si ottiene risolvendo un normale problema di C.M. associando ad ogni arco il massimo dei possibili costi per quell'arco.

La soluzione si ottiene applicando e.g. Dijkstra o risolvendo un modello PL (vedi `cmRobAssFOinterv.mod`) [in questo semplice caso anche con argomenti combinatorici, osservando che non esistono cammini con un solo arco, e che 15 è la somma dei due costi più bassi in un cammino]

Esempio C.M. robusto S.A.: incertezza sui costi con poliedro

- Possibile approccio con programmazione matematica (vedi note)
- La linearizzazione di "y = max…" comporterebbe l'introduzione di un numero infinito di vincoli
- Problema NP-Hard, come nel caso generale

Note: Modello Progr. Mat. per C.M. robusto S.A. con poliedro di incertezza (dati da slide 18)

Note: Modello Progr. Mat. per C.M. robusto S.A. con poliedro di incertezza (dati da slide 18)

$$
\begin{cases}
\min_x \; y \\
\text{s.t. } x \in P \\
\qquad y = \max_c \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\qquad\qquad \text{s.t. } \left.\begin{array}{l}
c_{OC} + c_{OB} + c_{OA} \le 15 \\
c_{CT} + c_{BT} + c_{AT} \le 15 \\
c_{AB} + c_{BC} + c_{CA} \le 20 \\
c_{OC} + c_{BC} + c_{CT} \ge 5 \\
c_{OB} + c_{BC} + c_{BT} + c_{AB} = 10
\end{array}\right\} c \in I
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\min \; y \\
\text{s.t. } x \in P \\
\qquad y \ge \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}, \quad \forall c \in I \;\left(c = [c_{ij}]_{(i,j)\in A}\right)
\end{array}}
$$

$\Rightarrow$ numero infinito di vincoli!

Rob. in senso assoluto: incertezza a livello della regione ammissibile

- S = possibili scenari s relativi al parametro α
- $c(x)$ = funzione obiettivo
- $F(s)$ = regione ammissibile (che dipende da α)
- $F^* = \cap_{s \in S} F(s)$

Soluzione:

$$\mathrm{MIN}_x \ \{ c(x) : x \in F^* \}$$

Molto conservativo! soluzione migliore tra quelle che sono **sempre** ammissibili

Osservazioni

- I possibili modelli e metodi di soluzione dipendono dal problema nominale e dalle modalità di rappresentazione dell'incertezza
- In genere, le controparti robuste sono difficili, con metodi di soluzione specifici

Esempio: agricoltore, caso FO.a

Caso RA.a: robustezza assoluta

Le soluzioni devono soddisfare i vincoli di tutti gli scenari.

max $3x_L + 5x_P$

s.t.

$$
\begin{array}{rcrcrl}
x_L & + & x_P & \leq & 11 & \text{(ettari)} \\
7x_L & & & \leq & 70 & \text{(semi)} \\
 & & 3x_P & \leq & 18 & \text{(scen. 1 - tuberi)*} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 145 & \text{(scen. 1 - concime)*} \\
 & & 3x_P & \leq & 16 & \text{(scen. 2 - tuberi)} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 165 & \text{(scen. 2 - concime)*} \\
 & & 3x_P & \leq & 25 & \text{(scen. 3 - tuberi)*} \\
10x_L & + & 20x_P & \leq & 135 & \text{(scen. 3 - concime)} \\
x_L & , & x_P & \geq & 0 & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

Nota (*): possiamo eliminare alcuni vincoli ridondanti

Esempio: routing stabile (multicommodity flow) con incertezza Hose sulla domanda

Modello: nominale → controparte robusta

u_{ij} : capacità arco $(i,j) \in A$ variabili x_{ij}^h : frazione di domanda h su $(i,j) \in A$

(O_h : origine di h
D_h : destinazione di h)

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \sum_{h\in K} d_h x_{ij}^h$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,v)\in A} x_{iv}^h - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj}^h = \begin{cases} -1 & \text{se } v = O_h \\ +1 & \text{se } v = D_h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in N,\ h \in K$$

$$\sum_{h\in K} d_h x_{ij}^h \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A, \forall d \in \text{Hose}^* \ (d = [d_h]_{h\in K})$$

INFINITI VINCOLI !

$$x_{ij}^h \geq 0, \ \forall (i,j) \in A, h \in K$$

$$^* \ \text{Hose} = \left\{ d \in \mathbb{R}^{|K|} \mid \forall v \in N, \sum_{h: v = O_h} d_h \leq B_v^+ \wedge \sum_{h: v = D_h} d_h \leq B_v^- \right\}$$

limite sul totale delle diverse domande originate/destinate in un nodo

- Trasformato in problema di PL con numero finito di vincoli (applicando il teorema della dualità forte per la PL - vedi testo [opzionale] …)

Rob. in S.A. con param. di controllo: def.

- Parametro incerto α (vettore n-dimensionale)
- È definito un valore di riferimento (nominale) per ciascuno dei parametri incerti
- Sia Γ un intero fra 0 e n: $0 \leq \Gamma \leq n$
- $S(\Gamma)$ è il sottoinsieme di scenari di S in cui al più Γ componenti di α (su n) differiscono dal valore nominale. Il parametro Γ controlla il livello di conservativismo
  - Se $\Gamma = 0$, il problema si riduce al problema nominale (nessuna incertezza)
  - Se $\Gamma = n$, il problema coincide con la controparte robusta in S.A.

Rob. in S.A. con param. di controllo

- Ipotesi: il param. incerto α **solo** nella F.O.
- Controparte rob. con param. di controllo Γ:

$$MIN\_{x} \{ MAX\_{s} [c^s(x): s \in S(\Gamma)]: x \in F\}$$

- In genere è NP-hard
- Se il problema nominale è un problema di ottimizzazione binaria polinomiale (es. C.M.) e si considera intervallo di incertezza ➔ controparte robusta in S.A. con P.d.C. è polinomiale! (tramite soluzione di al più n+1 problemi "nominali", vedi libro di testo [opzionale])

Robustezza in senso relativo

- Consideriamo incertezza a livello di f.o.
- sia c_s^* = MIN_x [$c^s(x)$] (costo minimo in corrispondenza dello scenario s)
- definiamo ***Regret*** di x in s la differenza

$$c^s(x) - c_s^*$$

Soluzione (minimax regret)

$$\text{MIN}_x \{ \text{MAX}_s \{[c^s(x) - c_s^*]: s \in S\}: x \in F\}$$

Meno conservativo: soluzione che "mi fa meno pentire", in ogni circostanza (analogo a *mancato guadagno* di analisi decisionale)

C.M. Robusto in senso relativo

$p \sim x$

$p \in P \sim x \in F$

- **P** = insieme di tutti i cammini da O a T

$$\mathrm{MIN}_p \{ \mathrm{MAX}_s [(\Sigma_{(i,j)\in p} c^s_{ij}) - c_s^*: s \in S] : p \in P\}$$

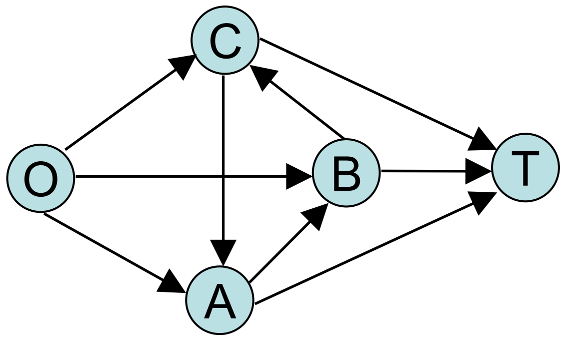
- NP-Hard
- Caso "intervalli di incertezza" (NP-Hard)

Proprietà: dato un cammino p, il max regret relativo a p si ha nello scenario $\sigma(p)$ in cui

$$c_{ij}^{\sigma(p)} = c_{ij}^{+} \quad \text{se } (i,j) \in p$$
$$c_{ij}^{\sigma(p)} = c_{ij}^{-} \quad \text{se } (i,j) \notin p$$

[max regret (p) = $c^{\sigma(p)}(p) - c_{\sigma(p)}^*$]

Esempio



	c_{ij}^{-}	c_{ij}^{+}	$c_{ij}^{\sigma(p)}$
OC	3	5	5
OB	1	10	1
OA	1	10	1
CT	1	10	1
BT	1	10	1
AT	3	7	7
AB	1	10	1
BC	1	10	1
CA	5	7	7

Se p = OCAT, lo scenario peggiore σ ha come costi quelli indicati a fianco
Per cui:

$c^{\sigma(p)}(p) = 19$,

$c_\sigma^* = 2$, quindi

$c^{\sigma(p)}(p) - c_\sigma^* = 17$

C.M. Robusto in senso relativo

- Il problema diventa: $\mathrm{MIN}\_p \{c^{\sigma(p)}(p) - c_{\sigma(p)}^* : p \in P\}$
- Una possibile soluzione
  - enumerare **tutti** i possibili cammini p da O a T;
  - Calcolare maximum regret $c^{\sigma(p)}(p) - c_{\sigma(p)}^*$ per ciascun cammino p (= *deviazione robusta* di p)
  - scegliere il cammino p* cui corrisponde la minima *deviazione robusta.*
- Computazionalmente troppo pesante (**|P| exp.**): algoritmi combinatorici (es. enumeraz. implicita)
- Esiste un modello PLIM: sfrutta condizioni di ottimalità di Bellman sui *costi relativi*, corrispondenti ai $c_{ij}^{\sigma(p)}$ (vedi libro di testo [opzion.]).

Esercizio

Si consideri una rete stradale con 3 scenari (G = giorno; N = notte e P = ora di punta), caratterizzata dai tempi di percorrenza che seguono:

	oc	ob	oa	ct	bt	at	ab	bc	ca
G	15	3	30	30	3	9	30	30	21
N	9	30	3	3	30	21	3	3	15
P	19	102	21	21	102	55	21	21	39

1. si calcoli il costo dei cammini C1 = obt, C2 = oabct e C3 = ocat nello scenario P.
2. quale tra C1 e C2 è migliore in senso assoluto rispetto ai tre scenari?
3. è possibile calcolare in tempo polinomiale il cammino minimo robusto in senso assoluto rispetto ai tre scenari?
   [opzionale: calcolarlo con AMPL (cmra1.3.mod) – ris.: OCT, costo 45]
4. per ogni arco (i,j) sia $c^-_{ij} = \min \{c^G_{ij}; c^N_{ij}; c^P_{ij}\}$ e sia $c^+_{ij} = \max \{c^G_{ij}; c^N_{ij}; c^P_{ij}\}$. Rispetto a questi intervalli di variabilità si calcoli un cammino minimo robusto in senso assoluto. *[opz.: *verificare* con AMPL (cmra1.4.mod)]*

Esercizio

In una rete stradale, il tempo di attraversamento di ciascun arco va da un minimo ad un massimo come riportato nella seguente tabella:

	A	**B**	**C**	**T**
S	2 - 5	3 - 7	7 - 9	2 - 8
A		3 - 9	1 - 9	1 - 7
B	6 - 7		8 - 9	5 - 5
C	1 - 2	6 - 9		2 - 6

1. si determini un cammino minimo per andare dal nodo S al nodo T secondo il criterio di robustezza in senso assoluto;
   *[opz.: *verificare* con AMPL]*
2. supponendo che gli unici cammini possibili per andare da S a T siano P1 = (S, A, B, C, T) oppure P2 = (S, C, B, A, T), quale dei due è più robusto in senso relativo?
   *[opz.: *verificare* con AMPL i calcoli sui cammini minimi nominali]*