



Metodi Montecarlo (pillole)

prof.ssa Carla De Francesco
prof. Luigi De Giovanni

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

Metodi Montecarlo

Determinano (stimano) la soluzione di un problema basandosi sulla generazione di numeri casuali.

1. Si esprime la soluzione come un parametro di una popolazione
2. Si genera un campione della popolazione mediante sequenze di numeri casuali (simulazione!)
3. Si esamina il campione e si stima il parametro che esprime la soluzione del problema in esame

Origini negli anni '40 nell'ambito del progetto Manhattan per la costruzione delle prime bombe atomiche (Enrico Fermi, John von Neumann, Stanislaw Marcin Ulam); il nome, dato da Nicholas Constantine Metropolis, si riferisce al casinò di Montecarlo nel Principato di Monaco

Esempio

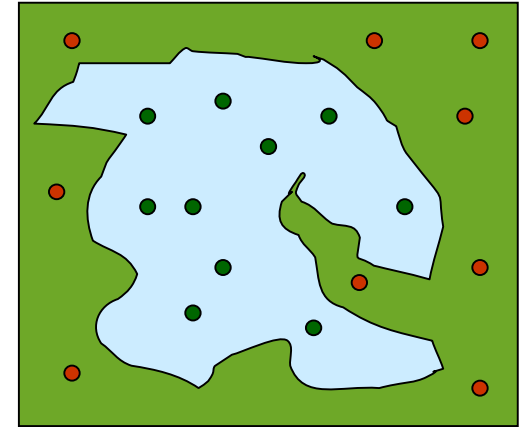
Problema: determinare un valore incognito μ

1. Sia μ interpretabile come il valor medio di una variabile casuale X *
 2. Generare un campione di n valori di X (generazione di numeri casuali secondo una data distribuzione)
 3. Stimare μ come la media del campione (grazie alla *legge dei grandi numeri*)
- * La distribuzione di X potrebbe non essere nota esplicitamente e/o il calcolo analitico della media potrebbe non essere efficiente dal punto di vista computazionale...

Esempio: area di un lago

Problema:

determinare l'area A di un lago



1. Inscrivere il lago in un rettangolo di area R :

$$A \approx R \cdot \text{Prob}(\text{"punto generato casualmente nel rettangolo cade nel lago"})$$

2. Generare casualmente n punti nel rettangolo, secondo una distribuzione uniforme
3. Sia k il numero dei punti generati che cadono nel lago:
$$A \approx R \cdot (k / n)$$

Problema simile: determinare il volume di un solido

Caratteristiche

- Basato su

- legge (forte) dei grandi numeri (~convergenza della media campionaria al valore atteso)

- generatori di numeri casuali secondo distribuzioni date

- Affidabilità legata al numero di campioni n , che deve essere sufficientemente elevato

- ci sono metodi analitici per determinare n fissato un livello di tolleranza

- Complessità limitata rispetto a metodi analitici o ad altri metodi di approssimazione

- conviene soprattutto quando la dimensione del problema è molto elevata

Esempio: calcolo di un integrale definito

Problema: calcolare $I = \int_a^b g(x) dx$

Data $U_{[a,b)}$ v.a. uniforme in $[a,b)$, con densità $f_U(u)$, vale:

$$I = E[g(U_{[a,b)})] (b-a)$$

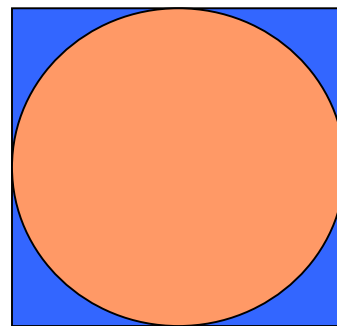
Infatti:

$$E[g(U_{[a,b)})] = \int_a^b g(u) f_U(u) du = (b-a)^{-1} \int_a^b g(u) du$$

1. Generare n numeri casuali x_i secondo $U_{[a,b)}$
2. Stimare $E[g(U_{[a,b)})]$ come $(1/n) \cdot \sum_{i=1}^n g(x_i)$ e ottenere I

Esempio: calcolo di π

- Cerchio di raggio 1 e area π
- Quadrato di lato 2 e area 4
- $\pi/4 = \text{area}(\text{C}) / \text{area}(\text{Q})$
- Si procede come per l'area del lago, vedi file Excel...



Altre applicazioni

- In fisica (alternativa ai metodi analitici per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali)
- Calcolo finanziario (valori attesi di derivati e opzioni non standard)
- Gli esempi visti finora possono essere interpretati come applicazioni del metodo Montecarlo (strillone, fondo pensioni etc.)