Reti di code

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

Comunicazioni

Materiale per l'esame sulla teoria delle code:

- Cap 2, sez 2.12 e 2.13 (processo degli arrivi di Poisson, incidenza casuale)
- Cap 4 fino a sez 4.7 compresa (notazione, legge di Little, processi di nascita e morte e relative code, M/G/1)
- Cap 4, sez 4.9 e 4.10 (code con priorità e reti di code)

Riferimenti:
Larson, Odoni, Urban Operations Research, Prentice Hall, 1981, disponibile anche in http://web.mit.edu/urban_or_book/www/book/

Un risultato utile per l'analisi delle reti di code

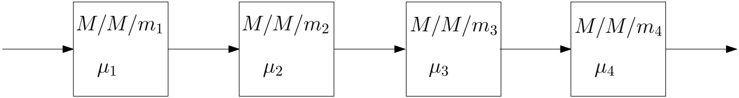
Rete di code: insieme di più sistemi di code interconnessi tra loro

Proprietà di un sistema di code M/M/m con parametro degli arrivi λ e capacità infinita della coda, in condizioni di equilibrio ($\lambda < m\mu$): il processo di partenza dal sistema (o uscita dal servizio) è ancora poissoniano con parametro λ.
(facile da dimostrare nel caso m=1)

Utile per l'analisi delle reti aperte acicliche formate da code M/M/m con capacità infinita della coda.

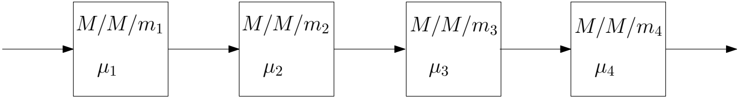
Rete di code $M/M/m_i$ in serie

- K sistemi di code di tipo $M/M/m_i$ collegati tra loro in serie, in condizioni di equilibrio
- con capacità infinita di ciascuna coda
- tasso degli arrivi alla prima coda uguale a λ.



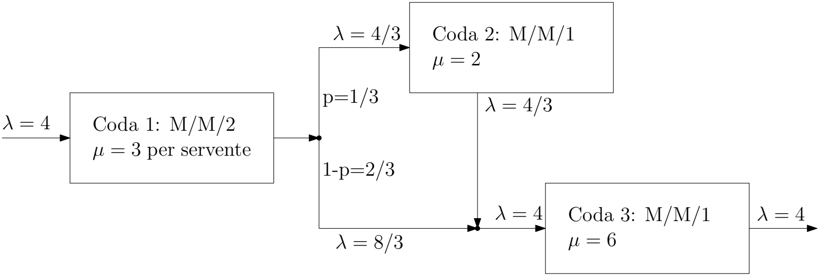
Rete di code $M/M/m_i$ in serie

- K sistemi di code di tipo $M/M/m_i$ collegati tra loro in serie, in condizioni di equilibrio
- con capacità infinita di ciascuna coda
- tasso degli arrivi alla prima coda uguale a λ.



Il processo di uscita dal primo sistema è poissoniano con tasso λ, ed è uguale al processo di entrata al secondo sistema, e così via per i successivi sistemi.
La rete può essere studiata come K sistemi $M/M/m_i$ indipendenti.
Condizione di equilibrio della rete: $\lambda < m_i \mu_i$ per ogni $i = 1, \ldots, K$

Reti aperte acicliche di sistemi $M/M/m_i$



Reti aperte acicliche di sistemi $M/M/m_i$

In condizioni di equilibrio ($\lambda_i < m_i\mu_i$ per ogni i) ciascun sistema di code può essere analizzato come un $M/M/m_i$ indipendente dagli altri.

- NB: ciascuna coda deve avere capacità infinita.
- Brutta notizia: tutte le ipotesi sopra sono indispensabili. Se cambia qualche condizione, il processo di uscita non è più poissoniano. Che fare?

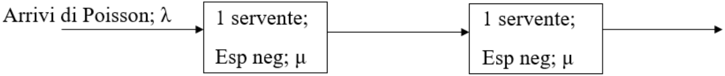
Diagramma delle transizioni di stato

Quando gli arrivi esterni sono poissoniani e i tempi di servizio esponenziali negativi, si può:

1. costruire il diagramma delle transizioni di stato della rete
2. scrivere le equazioni di bilancio per le probabilità degli stati della rete in condizioni stazionarie
3. cercare di risolvere le equazioni di bilancio

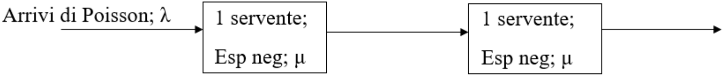
Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

Due sistemi M/M/1 in serie (macchine), con uguale tasso di servizio, ma senza spazio per l'attesa:

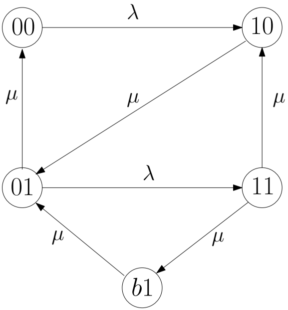


Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

Due sistemi M/M/1 in serie (macchine), con uguale tasso di servizio, ma senza spazio per l'attesa:



Il sistema a destra può bloccare quello a sinistra.
I clienti in arrivo al primo sistema vengono respinti sia se il servente è occupato, sia se è *bloccato*.
Stati del primo sistema: 0, 1, b=*bloccato*
Stati del secondo: 0, 1
Stati della rete:
(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (b,1)



Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

Equazioni di bilancio:

$\mu P_{01} = \lambda P_{00}$

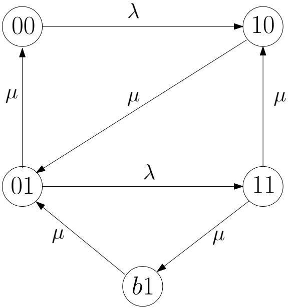
$\lambda P_{00} + \mu P_{11} = \mu P_{10}$

$\mu P_{10} + \mu P_{b1} = (\mu + \lambda) P_{01}$

$\lambda P_{01} = 2\mu P_{11}$

$\mu P_{11} = \mu P_{b1}$

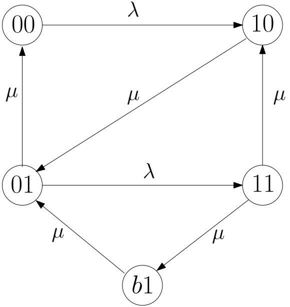
$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{b1} = 1$



Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

Equazioni di bilancio:

$\mu P_{01} = \lambda P_{00}$
$\lambda P_{00} + \mu P_{11} = \mu P_{10}$
$\mu P_{10} + \mu P_{b1} = (\mu + \lambda) P_{01}$
$\lambda P_{01} = 2\mu P_{11}$
$\mu P_{11} = \mu P_{b1}$
$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{b1} = 1$

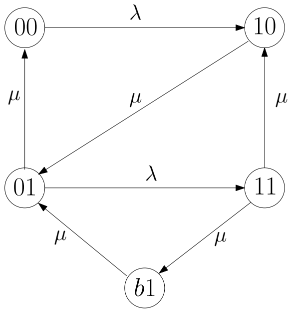


Risolvendole si ottiene, posto $F = 3\rho^2 + 4\rho + 2$:

$P_{11} = P_{b1} = \rho^2 / F$
$P_{10} = (2\rho + \rho^2)/F$
$P_{01} = 2\rho / F$
$P_{00} = 2/F$

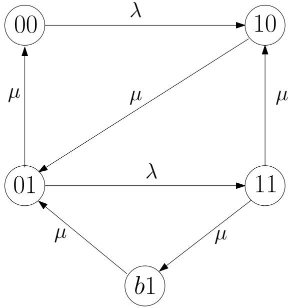
Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

$$F = 3\rho^2 + 4\rho + 2$$
$$P_{11} = P_{b1} = \rho^2/F$$
$$P_{10} = (2\rho + \rho^2)/F$$
$$P_{01} = 2\rho/F$$
$$P_{00} = 2/F$$



Esempio: due sistemi M/M/1 senza spazio di attesa

$F = 3\rho^2 + 4\rho + 2$
$P_{11} = P_{b1} = \rho^2/F$
$P_{10} = (2\rho + \rho^2)/F$
$P_{01} = 2\rho/F$
$P_{00} = 2/F$



Numero medio di utenti nel sistema $= L = (5\rho^2 + 4\rho)/F$
Numero medio di serventi occupati $= (4\rho^2 + 4\rho)/F$
Percentuale di utenti respinti $= P_{11} + P_{b1} + P_{10} = (3\rho^2 + 2\rho)/F$

Simulazione quando...

- Quando il diagramma degli stati è troppo complicato
- Quando non siamo in grado di risolvere le equazioni di bilancio
- Quando la domanda è dinamica (λ dipende dal tempo)
- Quando vogliamo studiare il sistema in condizioni non stazionarie