Code M/G/1

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

M/G/1: nozioni fondamentali

- Arrivi di Poisson con tasso λ
- tempi di servizio distribuiti secondo una v.a. S, di cui conosciamo $f_S(s)$, $E[S] = 1/\mu$, σ_S
- coda con capacità infinita
- disciplina FIFO della coda

Il sistema non è un processo di Markov a tempo continuo, in generale "ha memoria".

Si possono identificare alcuni istanti di tempo, detti *epoche*, in cui basta conoscere il numero dei clienti nel sistema per determinare la probabilità che nell'epoca successiva ci siano 0, 1, 2, ... clienti nel sistema.

Epoca = istante immediatamente successivo al completamento di un servizio

M/G/1: probabilità di transizione (1)

N = numero di clienti nel sistema in un'epoca casuale t_{i-1}, quindi subito dopo il completamento del servizio del cliente $i-1$

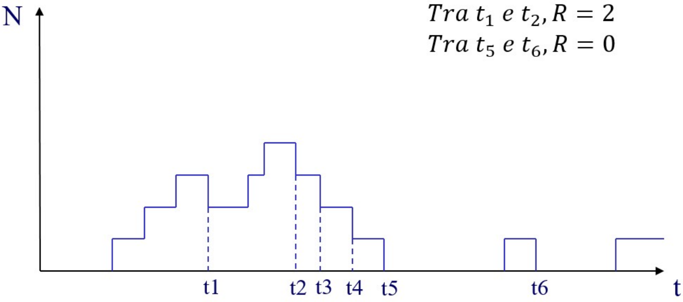
N' = numero di clienti nel sistema nella successiva epoca t_i, subito dopo il completamento del servizio del cliente i

R = numero di <u>nuovi</u> clienti arrivati <u>durante</u> il tempo di servizio del cliente i

$$\begin{cases} N' = N + R - 1 & N > 0 \\ N' = R & N = 0 \end{cases}$$

M/G/1: epoche e valore di *R*

Ribadiamo la definizione di *R*:
R = numero di nuovi clienti arrivati durante il tempo di servizio del cliente *i*



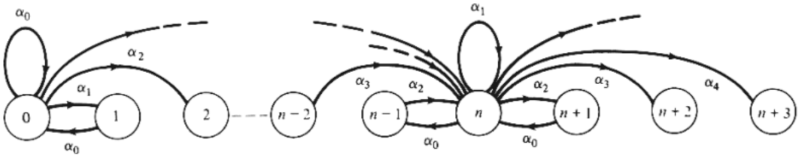
M/G/1: probabilità di transizione (2)

$$\begin{aligned}\alpha_r &= Prob\,\{r \text{ nuovi arrivi durante un tempo di servizio}\}\\ &= \int_0^\infty Prob\,\{r \text{ nuovi arrivi durante } S\,|\,S=t\}\, f_s(t)\,dt\\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!}\, f_s(t)\,dt \qquad per \quad r = 0,1,2,\dots\end{aligned}$$

Si può disegnare un **diagramma delle transizioni di stato ad epoche**.
Probabilità di transizione:

$$\begin{array}{ll} P\,[N' =\ n+r-1\,|\,N=n] = \alpha_r & n>0 \\ P\,[N' =\ r\,|\,N=0] = \alpha_r & n=0 \end{array}$$

M/G/1: diagramma delle transizioni di stato



Proprietà PASTA = Poisson Arrivals See Time Averages

Se il sistema M/G/1 è in condizioni stazionarie,
la probabilità $P[N = n]$ di avere n clienti nel sistema in un'epoca casuale è uguale
alla probabilità di avere n clienti nel sistema in qualunque istante casuale.

(dimostrazione omessa)

M/G/1: condizione di ergodicità

Si può dimostrare che:

- $P[N = 0] = 1 - (\lambda/\mu)$
- **la condizione di ergodicità è:** $\rho = \lambda/\mu < 1$

ρ è il **tasso di utilizzazione del sistema**:
si supponga di aver osservato il sistema in condizioni stazionarie per un lungo periodo T:

$$\rho = \frac{\text{tempo in cui il servente è occupato}}{T} = \frac{\lambda T \cdot E[S]}{T} = \lambda \cdot E[S] = \frac{\lambda}{\mu}$$

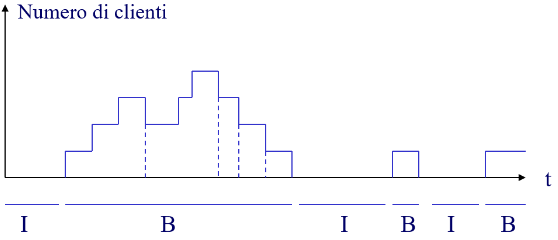
M/G/1: periodi inattivi e periodi occupati - $E[B]$

Si osservi un gran numero, K, di *busy periods*

$$\rho = \frac{K \cdot E[B]}{K \cdot E[B] + K/\lambda} = \frac{E[B]}{E[B] + 1/\lambda}$$

e quindi

$$E[B] = \frac{\rho/\lambda}{1-\rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$



M/G/1: derivazione di L e $\overline{W}$ (1)

(Qui diamo una derivazione dell'espressione di L nel sistema M/G/1 più semplice di quella del libro; assumiamo una disciplina di tipo FIFO)

Definiamo:

- W = quantità di tempo che un cliente j arrivato casualmente trascorrerà nel sistema
- T_1 = tempo di servizio rimanente del cliente correntemente in servizio
- T_2 = tempo richiesto per servire i clienti in attesa davanti a j nella coda
- T_3 = tempo di servizio di j

Chiaramente valgono:

- $W = T_1 + T_2 + T_3$
- $\overline{W} = E[W] = E[T_1] + E[T_2] + E[T_3]$

M/G/1: derivazione di L e $\overline{W}$ (2)

- $E[T_3] = E[S] = 1/\mu$
- Se quando arriva il cliente j ci sono $n > 0$ clienti nel sistema, uno di questi sta ricevendo il servizio, mentre i rimanenti $n-1$ sono in coda; quindi
  $E[T_2|n] = (n-1)E[S] \qquad se \quad n \geq 1$
  $E[T_2|n] = 0 \qquad se \quad n = 0$
- Quindi

$$
\begin{aligned}
E[T_2] &= \sum_n E[T_2|n]P_n = \sum_{n\geq 1}(n-1)E[S]\,P_n \\
&= E[S]\cdot(\sum_{n\geq 1} nP_n - \sum_{n\geq 1} P_n) \\
&= E[S]\cdot(L-\rho) = (L-\rho)/\mu
\end{aligned}
$$

M/G/1: derivazione di L e $\overline{W}$ (3)

- Dall'incidenza casuale:

$$E[T_1|n] = \frac{\sigma_S^2 + (E[S])^2}{2\,E[S]} \qquad se \quad n \geq 1$$
$$E[T_1|n] = 0 \qquad n = 0$$

- Da cui:

$$\begin{aligned} E[T_1] &= \sum_n E[T_1|n] P_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_S^2 + (E[S])^2}{2\,E[S]} \cdot P_n \\ &= \frac{\sigma_S^2 + (E[S])^2}{2\,E[S]} \cdot (1 - P_0) \\ &= \frac{\sigma_S^2 + (E[S])^2}{2\,E[S]} \cdot \rho \end{aligned}$$

M/G/1: derivazione di L e $\overline{W}$ (4)

Infine abbiamo:

1. la legge di Little: $L = \lambda \overline{W}$
2. $\overline{W} = E[W] = E[T_1] + E[T_2] + E[T_3]$

Risolvendo (1) e (2) finalmente si ottengono le seguenti relazioni, per un sistema M/G/1 in condizioni stazionarie, quindi con $\rho < 1$:

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2(1-\rho)}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

M/G/1: valori attesi in condizioni stazionarie

- $L = \rho + \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2(1-\rho)}$
- $\overline{W} = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2\lambda(1-\rho)}$
- $\overline{W}_q = \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2\lambda(1-\rho)}$
- $L_q = \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_S^2}{2(1-\rho)}$

Esempio dell’aeroporto

- Aeroporto con una sola pista di decollo,
  S = v.a. durata operazione di decollo
- $E[S] = 75$ secondi; $\sigma_S = 25$ secondi
  $\mu = 3600/75 = 48/\text{ora}$
- Si ritiene che la domanda sia relativamente costante per un periodo di tempo sufficientemente lungo in modo da avere approssimativamente delle condizioni di equilibrio
- Si assume che il processo di Poisson sia una approssimazione ragionevole per gli istanti in cui avviene la domanda
- Il sistema può quindi essere rappresentato come un sistema di code M/G/1

L_q e $\overline{W}_q$ (a fronte di un aumento dell'1% nella domanda)

λ (all'ora)	ρ	L_q	L_q (% cambio)	W_q (secondi)	W_q (% cambio)
30	0.625	0.58		69	
30.3	0.6313	0.60	3.4%	71	2.9%
36	0.75	1.25		125	
36.36	0.7575	1.31	4.8%	130	4%
42	0.875	3.40		292	
42.42	0.8838	3.73	9.7%	217	8.6%
45	0.9375	7.81		625	
45.45	0.9469	9.38	20.1%	743	18.9%

Estensioni

- M/G/m: le *epoche* non sono più utili, nell'istante in cui un servizio viene completato, altri sono in corso, e la loro durata non ha la "mancanza di memoria".
- G/G/1: i tempi di interarrivo hanno "memoria", e quindi, in una *epoca*, per conoscere quando arriverà il prossimo cliente dobbiamo conoscere quanto tempo è trascorso dal precedente arrivo
- G/G/m: sempre più complicato!

In alternativa: **simulazione**