Incidenza Casuale

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

Incidenza Casuale

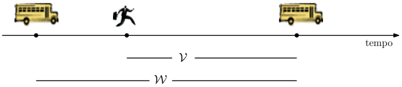
- Arrivi avvengono in particolari istanti: $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots$
- Tempi di interarrivo: $\mathcal{Y}_i = \mathcal{T}_i - \mathcal{T}_{i-1}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$
- Assumiamo $f_{\mathcal{Y}_i}(y) = f_{\mathcal{Y}}(y)$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$
  Quindi le $\mathcal{Y}_i$ hanno la stessa distribuzione, ma in generale non sono indipendenti tra loro

Incidenza casuale: iniziando l'osservazione in un istante casuale, qual è la distribuzione del tempo intercorso tra l'istante di incidenza e il successivo arrivo?

Es: un cliente arriva alla fermata del bus in un istante casuale e vuole determinare il tempo di attesa fino all'arrivo del successivo bus

Incidenza Casuale: definizioni

- $\mathcal{Y}$ = lunghezza dell'intervallo di tempo fra due arrivi consecutivi. La distribuzione $f_{\mathcal{Y}}(y)$ è nota.
- $\mathcal{W}$ = lunghezza dell'intervallo fra due arrivi consecutivi in cui casualmente capita un osservatore (lo chiamiamo *intervallo di incidenza*). Si noti che $\mathcal{W}$ è il tempo fra l'ultimo arrivo prima dell'istante di incidenza dell'osservatore e il primo arrivo dopo l'istante di incidenza.
- $\mathcal{V}$ = tempo tra l'istante di incidenza dell'osservatore e il primo arrivo dopo l'istante di incidenza. E' il *tempo rimanente*, nell'esempio il tempo di attesa del bus per l'osservatore.



Incidenza Casuale: la densità di $\mathcal{W}$

La probabilità che la durata $\mathcal{W}$ dell'intervallo di incidenza assuma un valore compreso tra w e $w + \mathrm{d}w$ è proporzionale sia alla probabilità che il tempo di interarrivo $\mathcal{Y}$ assuma un valore compreso tra w e $w + \mathrm{d}w$, sia alla durata w dell'intervallo di incidenza:

$$f_{\mathcal{W}}(w)\,\mathrm{d}w \qquad \text{è proporzionale a} \qquad w \cdot f_{\mathcal{Y}}(w)\,\mathrm{d}w$$

Integrando:

$$\int_0^\infty f_{\mathcal{W}}(w)\,\mathrm{d}w = 1 = \mathrm{cost} \cdot \int_0^\infty w\, f_{\mathcal{Y}}(w)\,\mathrm{d}w = \mathrm{cost} \cdot E[\mathcal{Y}]$$

Ne consegue che:

$$f_{\mathcal{W}}(w) = \frac{w \cdot f_{\mathcal{Y}}(w)}{E[\mathcal{Y}]} \tag{1}$$

Incidenza Casuale: la densità di $\mathcal{V}$

La densità di $\mathcal{V}$ condizionata dalla lunghezza $\mathcal{W}$ dell'intervallo di incidenza è data da (distribuzione uniforme):

$$f_{\mathcal{V}|\mathcal{W}}(v|w) = \frac{1}{w} \qquad 0 \leq v \leq w$$

Allora:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(v,w) = f_{\mathcal{V}|\mathcal{W}}(v|w) \cdot f_{\mathcal{W}}(w) &= \frac{1}{w} \cdot \frac{w \cdot f_{\mathcal{Y}}(w)}{E[\mathcal{Y}]} \\ &= \frac{f_{\mathcal{Y}}(w)}{E[\mathcal{Y}]} \quad \text{per} \quad 0 \leq v \leq w < \infty \end{aligned}$$

da cui, per ogni $v \geq 0$:

$$f_{\mathcal{V}}(v) = \int_v^{\infty} f_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(v,w)\,\mathrm{d}w = \int_v^{\infty} \frac{f_{\mathcal{Y}}(w)}{E[\mathcal{Y}]}\,\mathrm{d}w = \frac{1 - F_{\mathcal{Y}}(v)}{E[\mathcal{Y}]} \qquad (2)$$

Come ottenere direttamente $E[\mathcal{V}]$

Sappiamo che:

$$E[\mathcal{V}] = \int_0^\infty E[\mathcal{V}|w] \cdot f_{\mathcal{W}}(w)\,\mathrm{d}w$$

Essendo $\mathcal{V}|\mathcal{W}$ uniforme tra 0 e w: $\quad E[\mathcal{V}|w] = w/2$

Allora, usando la (1):

$$E[\mathcal{V}] = \int_0^\infty \frac{w}{2} \cdot \frac{w \cdot f_{\mathcal{Y}}(w)}{E[\mathcal{Y}]}\,\mathrm{d}w$$

Quindi:

$$E[\mathcal{V}] = \frac{E[\mathcal{Y}^2]}{2E[\mathcal{Y}]} = \frac{\sigma^2_{\mathcal{Y}} + E^2[\mathcal{Y}]}{2E[\mathcal{Y}]} \tag{3}$$

Un caso particolare

Supponiamo che i bus passino secondo un processo di Poisson con tasso λ. Allora i tempi di interarrivo ($\mathcal{Y}$) sono i.i.d. secondo Exp(λ), con

$$E[\mathcal{Y}] = 1/\lambda \qquad \sigma^2_{\mathcal{Y}} = 1/\lambda^2$$

Calcolate (2) e (3): otterrete che la variabile $\mathcal{V}$ è distribuita come una Exp(λ), come ci si può aspettare dalla proprietà di mancanza di memoria dei tempi di interarrivo in un processo di Poisson.

Casi particolari di (3)

Riporto la (3):

$$E[\mathcal{V}] = \frac{\sigma_{\mathcal{Y}}^2 + E^2[\mathcal{Y}]}{2E[\mathcal{Y}]}$$

- Se $\sigma_{\mathcal{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E[\mathcal{V}] = E[\mathcal{Y}]/2$
- Se $\sigma_{\mathcal{Y}} = E[\mathcal{Y}]$ (come in un processo di Poisson) $\Rightarrow \quad E[\mathcal{V}] = E[\mathcal{Y}]$
- Se $\sigma_{\mathcal{Y}} > E[\mathcal{Y}] \quad \Rightarrow \quad E[\mathcal{V}] > E[\mathcal{Y}]$