

TEORIA DELLE CODE

Notazione e terminologia

Relazioni in condizioni di stabilità

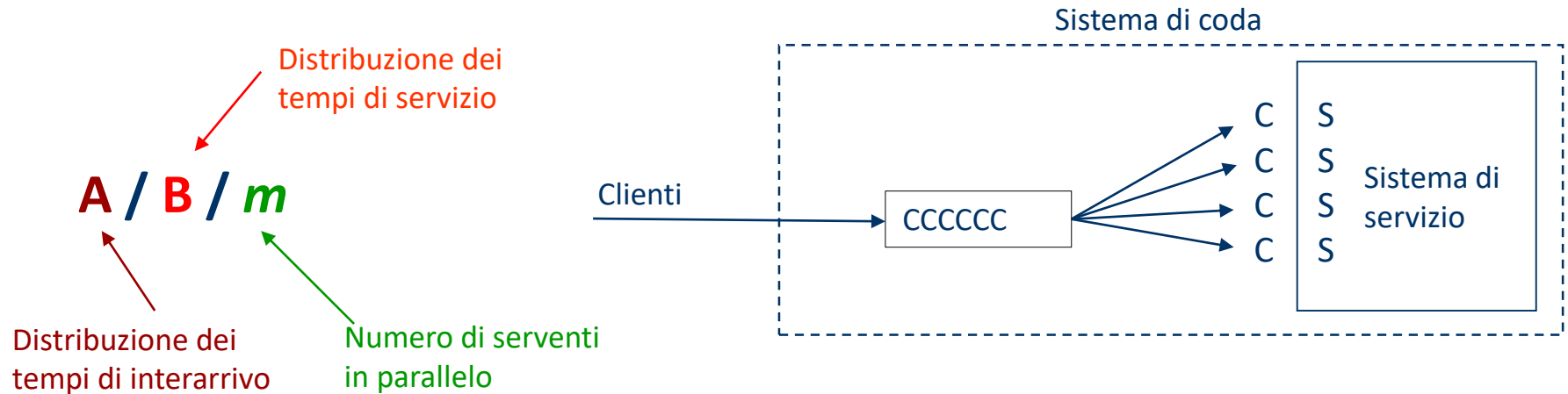
prof.ssa C. De Francesco

prof. L. De Giovanni

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Un codice per modelli di coda: A/B/m (notazione di Kendall)



Alcuni codici standard per A e B:

- **M** esponenziale negativa (M sta per *memoryless*)
- **D** deterministica
- **E_k** distribuzione di Erlang del k -esimo ordine
- **G** distribuzione generica

Disciplina: FIFO/FCFS, LIFO, SIRO, classi di priorità, ...

Terminologia e notazioni: **utente** (1)

Eventi per i -esimo utente:

- Arrivo, istante $t_a(i)$
- Inizio del servizio, istante $t_b(i)$
- completamento del servizio, istante $t_c(i)$

Quantità legate all' i -esimo utente:

- $x(i) = t_a(i) - t_a(i-1)$ i -esimo tempo di interarrivo
- $s(i) = t_c(i) - t_b(i)$ tempo di servizio di utente i
- $w_q(i) = t_b(i) - t_a(i)$ tempo di attesa in coda di utente i
- $w(i) = t_c(i) - t_a(i)$ tempo nel sistema di utente i
→ $w(i) = w_q(i) + s(i)$

Terminologia e notazioni: **utente** (2)

- **$X(i)$** : v.a. tempo di interarrivo tra cliente $i-1$ e cliente i , con densità $f_{X(i)}(x)$
- **$S(i)$** : v.a. tempo di servizio del cliente i , con densità $f_{S(i)}(x)$
- Ipotesi: $X(i)$ i.i.d., $f_{X(i)}(x) = f_X(x)$ per ogni i
- Ipotesi: $S(i)$ i.i.d., $f_{S(i)}(x) = f_S(x)$ per ogni i
- Tasso di arrivo: **$\lambda = (E[X])^{-1}$**
- Tasso di servizio **di un servente**: **$\mu = (E[S])^{-1}$**
- Tasso di utilizzo **del sistema** (m serventi): **$\rho = \lambda/(m\mu)$**

Terminologia e notazioni: **utente** (2)

- **$X(i)$** : v.a. tempo di interarrivo tra cliente $i-1$ e cliente i , con densità $f_{X(i)}(x)$
- **$S(i)$** : v.a. tempo di servizio del cliente i , con densità $f_{S(i)}(x)$
- Ipotesi: $X(i)$ i.i.d., $f_{X(i)}(x) = f_X(x)$ per ogni i
- Ipotesi: $S(i)$ i.i.d., $f_{S(i)}(x) = f_S(x)$ per ogni i
- Tasso di arrivo: **$\lambda = (E[X])^{-1}$**
- Tasso di servizio **di un servente**: **$\mu = (E[S])^{-1}$**
- Tasso di utilizzo **del sistema** (m serventi): **$\rho = \lambda/(m\mu)$**
- **$W(i)$** : v.a. tempo trascorso nel sistema dal cliente i
- **$W_q(i)$** : v.a. tempo trascorso in coda (*queue*) dal cliente i
- Grandezze di interesse (in condizioni di *equilibrio*, assumendo sia raggiunto...):

$$\overline{W} = \lim_{i \rightarrow \infty} E[W(i)]$$

$$\overline{W}_q = \lim_{i \rightarrow \infty} E[W_q(i)]$$

Terminologia e notazioni: **sistema** (1)

Quantità legate al sistema di coda, al tempo t :

$N(t)$ v.a. numero totale di utenti nel sistema al tempo t

$N_q(t)$ v.a. numero di utenti in attesa, o lunghezza della coda

Parametri della coda, che possono anche dipendere da $N(t)$:

λ_n tasso di arrivo di nuovi clienti quando $N(t) = n$

μ_n tasso di servizio **del sistema** quando $N(t) = n$

$\mu_n = \min(n\mu, m\mu)$ quando $N(t) = n$ e ci sono m server

Terminologia e notazioni: **sistema** (2)

- Quantità studiate come v.a.

$P_n(t) = P[N(t) = n]$: probabilità che $N(t)$ sia uguale a n

- Per $t \rightarrow +\infty$ (sotto opportune ipotesi): fdp di *equilibrio*

$$P[N(t) = n] \rightarrow P[N = n] \quad P[N_q(t) = n] \rightarrow P[N_q = n]$$

- Grandezze di interesse

$$\mathbf{L} = E[N] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N(t)]$$

$$\mathbf{L}_q = E[N_q] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_q(t)]$$

Terminologia e notazioni: **sistema** (2)

- Quantità studiate come v.a.

$P_n(t) = P[N(t) = n]$: probabilità che $N(t)$ sia uguale a n

- Per $t \rightarrow +\infty$ (sotto opportune ipotesi): fdp di *equilibrio*

$$P[N(t) = n] \rightarrow P[N = n] \quad P[N_q(t) = n] \rightarrow P[N_q = n]$$

- Grandezze di interesse

$$\mathbf{L} = E[N] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N(t)]$$

$$\mathbf{L}_q = E[N_q] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_q(t)]$$

- Stato del sistema:

- stato **transiente**: lo stato del sistema al tempo t dipende dallo stato iniziale, i parametri dipendono da t
- stato **ergodico** (o stazionario): il sistema e i suoi parametri sono indipendenti dallo stato iniziale e da t (condizioni di stabilità o di equilibrio)

Relazioni tra alcuni valori attesi in un generico sistema in condizioni di stabilità

In un **generico** sistema di code **in condizioni di stabilità**, dati:

λ = tasso di arrivo degli utenti

μ = tasso di servizio di un servente

vogliamo determinare le relazioni tra le seguenti grandezze:

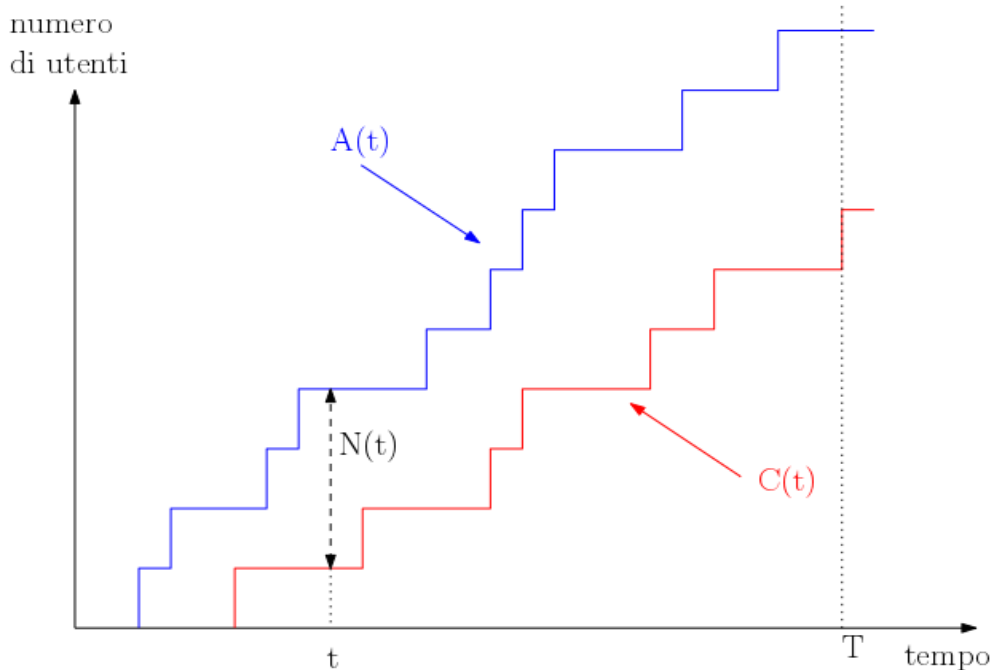
L = numero medio di utenti nel sistema

L_q = numero medio di utenti in coda

$\overline{W}$ = tempo medio trascorso nel sistema da un utente

$\overline{W}_q$ = tempo medio trascorso in coda da un utente

Legge di Little: relazione tra L e $\bar{W}$



A(t): numero cumulado di arrivi
C(t): numero cumulado di serviti

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{\int_0^T N(t) dt}{T} = \\ &= \frac{A(T)}{T} \cdot \frac{\int_0^T N(t) dt}{A(T)} = \\ &= \lambda_T \cdot \bar{W}_T \end{aligned}$$

$$L = \lim_{T \rightarrow \infty} L_T = \lambda \bar{W} \quad (1)$$

Valido in condizioni di stabilità del sistema, per:

- qualsiasi **disciplina** della coda (anche con priorità, all'interno di ciascuna classe di priorità)
- qualsiasi λ , purché il **tasso di arrivo** “a lungo termine” (stabilità) sia finito.

Altre relazioni

- Analogamente, modificando la definizione di $C(t)$ in *numero utenti usciti dalla coda*, si ottiene

$$L_q = \lambda \bar{W}_q \quad (2)$$

- Partendo da $w(i) = w_q(i) + s(i)$

$$\bar{W} = \bar{W}_q + E[S] = \bar{W}_q + 1/\mu \quad (3)$$

- Abbiamo **tre equazioni**: noto uno dei quattro valori attesi, si possono determinare gli altri tre