Ottimizzazione Stocastica

1. Introduzione

Docenti

- Luigi De Giovanni* e Carla De Francesco
  - Dipartimento di Matematica «T. Levi-Civita» (Torre Archimede) – uff. 4CD3
  - Tel. 049 827 1349
  - email: luigi@math.unipd.it ←
  - www.math.unipd.it/~luigi

  - Ricevimento (ufficio / Zoom / Skype):
    giovedì, h 10.30 – 12.30
    (su appuntamento via e-mail)

Ottimizzazione Stocastica

- Processo decisionale supportato da metodi quantitativi
- Valutazione e scelta dell’alternativa “migliore”
- Condizioni di incertezza: i dati e i parametri del sistema sono noti con un certo livello di incertezza
- Un ramo della **Ricerca Operativa**

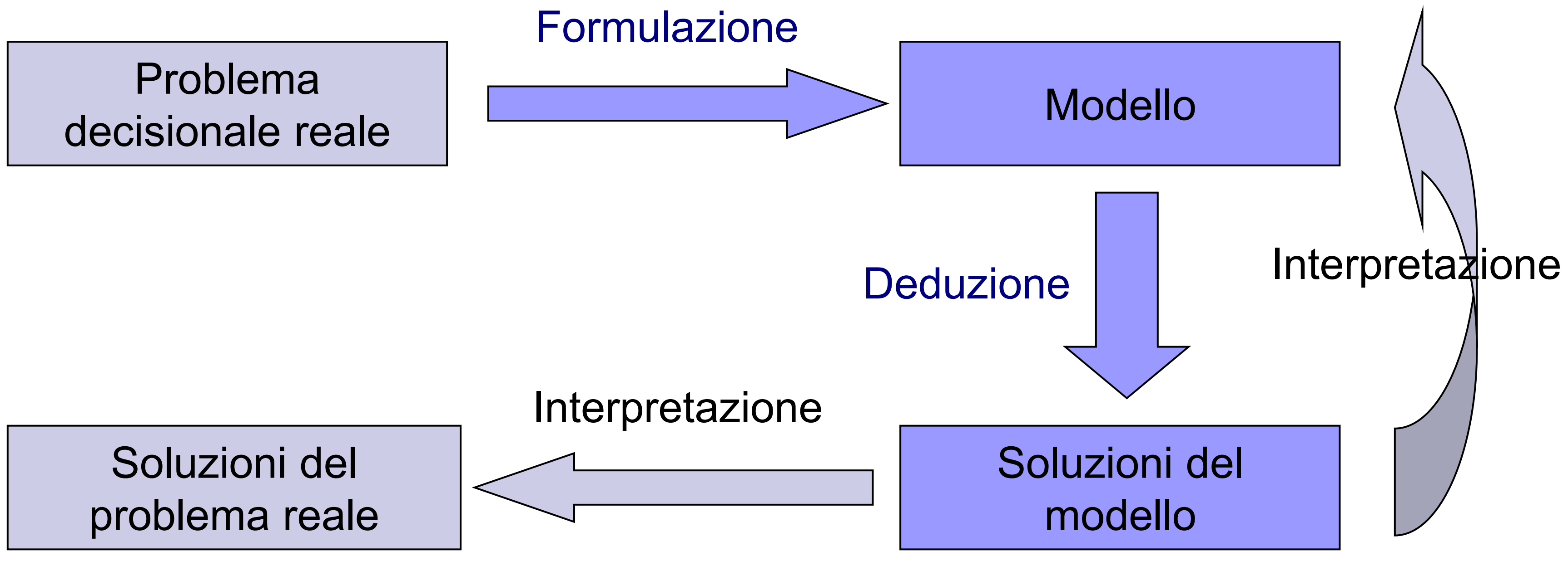
Problemi di ottimizzazione

- Determinare la migliore configurazione di sistemi complessi sotto condizioni di utilizzo di risorse scarse
  - Determinazione di percorsi ottimali
  - Mix ottimo di produzione
  - Organizzazione e pianificazione di processi produttivi o informativi
  - Gestione investimenti finanziari
  - Organizzazione dei flussi (dati, persone, produzione etc.)
  - Individuazione di sequenze genomiche
  - Pianificazione e gestione operativa di reti di trasporto
  - Configurazione di reti di produzione e distribuzione elettrica
  - **etc. etc. etc.**

Fonti di incertezza

- Conoscere con precisione il funzionamento dei sistemi reali può essere impossibile, difficile (o non conveniente):
  - Fenomeni naturali (meteorologici, fisici etc.)
  - Comportamenti umani (scelte, congestione etc.)
  - Usura (guasti)
  - Andamento dei mercati (previsioni)
  - **etc. etc. etc.**
- Rappresentazione dell'incertezza:
  - **implicita**: elementi incerti trascurabili (es. usiamo stime)
  - **esplicita**: oggetto di questo corso!

Metodologia generale



- Formulazione: modelli matematici, modelli su grafo, modelli di simulazione, modelli di teoria dei giochi etc.
- Deduzione: metodi quantitativi, algoritmi efficienti

Un problema di produzione (Tivar)

Sono disponibili 500 macchine per la produzione di bulloni, chiodi e dadi con richiesta settimanale di risp. 240, 100 e 200 kg. Ogni macchina può produrre, in alternativa, bulloni, chiodi o dadi, al costo di funzionamento settimanale di risp. 230, 260 e 150 €. Sulla base dell'esperienza, *la produttività settimanale di ogni macchina è stimata* in 3 kg di bulloni o 20 kg di chiodi o 2,5 kg di dadi. Si può anche acquistare all'esterno al massimo una tonnellata complessiva di bulloni, chiodi e dadi a un costo di risp.160, 40 e 200 €/kg. Un eventuale eccesso di bulloni, chiodi e dadi rispetto alla richiesta può essere venduto a un prezzo per kg di risp. 140, 30 e 170 €, e il mercato riesce ad assorbire una tonnellata di merce in tutto. Determinare il piano di produzione e outsourcing settimanale che massimizzi il profitto.

Approccio con incertezza trascurabile

Stime come fossero dati certi (*«Deterministic counterpart»*)

La migliore alternativa con, e.g., ***modelli matematici:***

- Cosa bisogna decidere, quali quantità possiamo scegliere?
  $\Rightarrow$ variabili decisionali (incognite)
- Quale è l'obiettivo, quantità da minimizzare/massimizzare?
  $\Rightarrow$ funzione obiettivo
- Come sono caratterizzate le soluzioni ammissibili?
  $\Rightarrow$ vincoli del problema (relazioni tra incognite)

Modelli di programmazione matematica: funzione obiettivo e vincoli sono espressi come relazioni matematiche tra le variabili decisionali

Modello matematico

- Variabili decisionali:
  - x_i: num. di macchine che producono $i \in I = \{b, c, d\}$ (costo sett. C_i)
  - y_i: kg di $i \in I$ acquistati (al prezzo unitario A_i);
  - z_i: kg di $i \in I$ venduti (al prezzo unitario P_i);
- Modello PL (intera mista):

$$\max \sum_{i \in I} P_i\, z_i - \sum_{i \in I} A_i\, y_i - \sum_{i \in I} C_i\, x_i$$

$$\begin{aligned}
s.t. \qquad x_b + x_c + x_d &\leq 500 \\
3\, x_b + y_b &\geq 240 + z_b \\
20\, x_c + y_c &\geq 100 + z_c \\
2{,}5\, x_d + y_d &\geq 200 + z_d \\
y_b + y_c + y_d &\leq 1000 \\
z_b + z_c + z_d &\leq 1000 \\
y_i, z_i \in \mathbb{R}_+ \qquad & x_i \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Modello matematico

- Il modello matematico ha **valenza descrittiva**: dichiara le caratteristiche di una soluzione ottima del problema.
  Una soluzione ottima è una combinazione di valori che assegnati alle variabili decisionali, permettono di rispettare tutti i vincoli (compresi quelli di dominio) e di ottimizzare il valore della funzione obiettivo.

- Il modello matematico ha **valenza operativa**: esistono **metodi numerici** (ad es. simplesso, branch-and-bound, branch-and-cut etc) disponibili in **software di ottimizzazione** in grado di accettare la descrizione del modello (vedi ad esempio il file `tivar-modello-deterministico.mod`) e calcolare una soluzione ottima.

Rappresentazione esplicita dell'incertezza

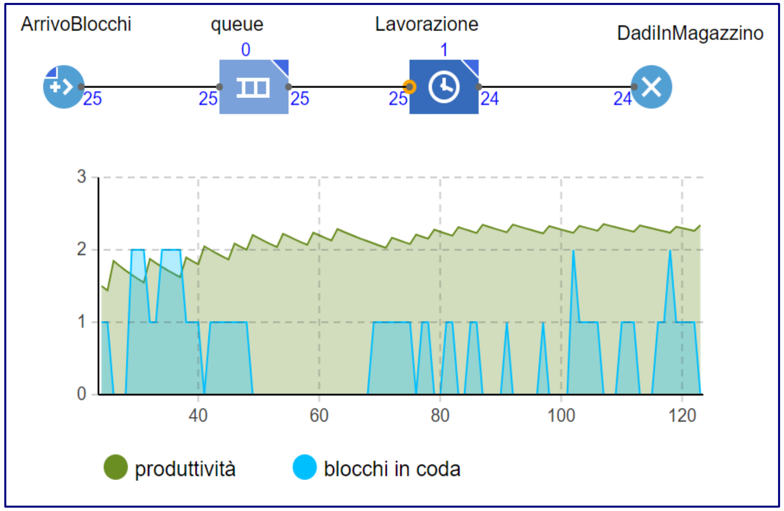
- Determinare le fonti di incertezza non trascurabile
  - ad esempio, la produttività è soggetta all'incertezza del processo
- *Valorizzare* i parametri incerti (*esempio**)
  - stima più accurata della produttività per via analitica o simulativa (e.g., valutazione del valore atteso, o della distribuzione)
- Analizzare e *valutare* diverse alternative in diversi scenari
  - **simulazione** delle soluzioni (e.g, per ulteriori fonti di incertezza, *es*#)
  - modello di **progr. matematica** nei diversi scenari di produttività
  - **analisi** *what-if* di diverse alternative per via simulativa
- *Stabilire criteri, definire e scegliere* l'alternativa ***"migliore"***
  - Usare una *distribuzione della probabilità* per la produttività e *massimizzare* il valore atteso del profitto (*esempio***)
  - Trovare la *migliore soluzione* che garantisca ammissibilità entro un *intervallo di incertezza* (valori min-max di produttività) (*esempio***)
  - *etc. etc. etc.*

*Esempio: valorizzazione parametri

Valorizzazione della produttività

La produzione avviene per lotti, ciascuno ottenuto da un blocco di metallo il cui tempo di arrivo è soggetto all'incertezza dei tempi di consegna e di verifica preliminare di qualità, e il cui tempo di lavorazione è soggetto all'incertezza delle caratteristiche fisiche del blocco stesso.

1. **Modello** del sistema di produzione per valutare la produttività: ad es. *modello di reti di code*
2. Dall'analisi dei **dati** storici si ricavano le distribuzioni dei tempi di interarrivo e di lavorazione
3. **Calcolare** la produttività
   - per via *analitica* se possibile
   - per via *simulativa*, vedi file
     - `tivar-simulazione-manuale` (simulazione «manuale» su Excel)
     - `tivar-simulazione-processo-dadi.alp` (simulazione con reti di code in *AnyLogic*)



**Esempio: soluzione "ottima"

Massimizzazione del profitto

Vista l'incertezza, come definiamo il profitto? Come possiamo organizzare la produzione "al meglio"?

Per tenere conto dell'incertezza si valuta una distribuzione per la produttività (fitting, per scenari etc.) e si decide, **ad esempio,** di massimizzare il profitto medio.

Come vedremo durante il corso, si può scrivere un modello di *Programmazione Matematica*, con variabili decisionali e vincoli distinti per scenario e funzione obiettivo che esprime analiticamente il profitto medio: vedi `tivar-modello-incertezza`

Ma è la soluzione *giusta*? È *accettabile* in ogni condizione? Si potrebbero ottimizzare altre misure di incertezza o di rischio?

Ci aiuteremo con gli strumenti dell'*Analisi Decisionale*, dell'*Ottimizzazione Robusta* e dell'*Ottimizzazione Stocastica*.

Il corso di “Ottimizzazione Stocastica”

Obiettivi:
Fornire una panoramica degli **strumenti*** che aiutano a prendere le **migliori decisioni** anche quando le **informazioni** utili **non** sono completamente disponibili in modo **certo** ma solo in termini probabilistici.

* metodi di *valutazione*
metodi di *ottimizzazione*

Programma preliminare

Metodi di valutazione analitici e simulativi

- Teoria delle Code
- Processi decisionali markoviani
- Simulazione a eventi discreti e simulazione di tipo continuo
- Uso di software specifico per la simulazione

Metodi di ottimizzazione

- Analisi decisionale in condizioni di incertezza o rischio
- Ottimizzazione robusta
- Ottimizzazione stocastica

Esempi notevoli

- Revenue Management
- Applicazioni reali

Organizzazione del corso [!]

- **Testi di riferimento**
  - Materiale fornito dai docenti e registrazioni (Moodle).
  - [*G. Ghiani e R. Musmanno (a cura di), "Metodi e modelli decisionali in condizioni di incertezza e rischio", McGraw-Hill, Milano, 2009.*]
- **Strumenti**
  - **Anylogic PLE**: simulazione (**no** prerequisiti di programmazione)
  - Excel, AMPL: **opzionali**, solo per esempi in aula (no oggetto d'esame)
- **Lezioni: aule SC30/60 – lab BYOD – videoregistrazioni**
  - **martedì 12.30** – 14.30, **mercoledì 14.30** – 16.30, **giovedì 14.30** – 16.30
- **Modalità d'esame**
  - **Entro settembre**: **Scritto** [0..15/30] + **progetto** AnyLogic in gruppo [0..15/30]
  - Dopo: Scritto che include domande su AnyLogic [(0..15+0..15)/30]
  - Eventuale integrazione con orale (su proposta del docente)
- Materiali, registrazioni e avvisi su **Moodle** (Ottim. Stocastica 2024-2025)