

Tema d'esame del 10 febbraio 2020

COGNOME: _____
 Scrivere subito! NOME: _____
 MATRICOLA: _____

Questo foglio deve
 essere consegnato
 con l'elaborato

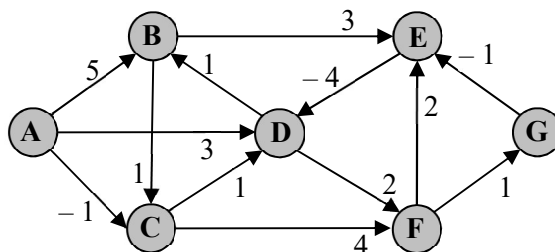
1. La Ta.cuci SpA produce due modelli di pantaloni. Ogni pantalone del modello UNO richiede 2 tasche, 2 gambe e 5 rinforzi e viene venduto a 80 euro, mentre il modello DUE richiede 3 tasche, 2 gambe e 4 rinforzi e viene venduto a 110 euro. Le tasche, le gambe e i rinforzi sono gli stessi per i due modelli e sono ottenuti dal taglio di 500 spezzoni di stoffa uguali tra loro, avanzati dalla collezione precedente. Ogni spezzone può essere tagliato secondo diversi schemi: lo schema A permette di ottenere 5 tasche, 4 gambe e 12 rinforzi; lo schema B 7 tasche, 10 gambe e 4 rinforzi, lo schema C 13 tasche, 5 gambe e 8 rinforzi, lo schema D 11 tasche e 8 gambe. I tempi di produzione di ciascuno schema sono diversi: lo schema A richiede la metà del tempo richiesto per lo schema C, lo schema B il triplo del tempo richiesto dallo schema C, lo schema D lo stesso tempo dello schema C. Il tempo disponibile complessivo è quello per tagliare 700 spezzoni secondo lo schema C. Anche i costi di produzione dipendono dallo schema di taglio, e sono stimati in 2 euro per lo schema A, 4 euro per lo schema B, 3 euro per lo schema C e 1 euro per lo schema D. Si scriva un modello di programmazione lineare che permetta di massimizzare il ricavo di vendita dei pantaloni al netto dei costi di produzione, tenendo anche conto che:

- si vogliono tagliare almeno 10 spezzoni secondo lo schema A;
- i pantaloni di modello 1 devono essere al più il doppio dei pantaloni di modello 2;
- si possono tagliare spezzoni di al massimo tre schemi diversi;
- si vogliono ottenere rinforzi da almeno due schemi diversi;
- ci sono quattro linee di produzione, ciascuna dedicata a uno schema diverso, e il costo complessivo per il setup delle linee di produzione è di 3000 euro se si usano fino a due linee, 3500 se ne usano di più.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq & -2 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \geq 0
 \end{array}$$

- a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
 b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?
3. Nel seguente grafo, calcolare i cammini minimi dal nodo A verso **tutti** gli altri nodi.



- a. si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;
 b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
 c. si utilizzi la tabella del punto b per riportare, se possibile, l'albero e il grafo dei cammini minimi oppure, se esiste, un ciclo di costo negativo (descrivere il procedimento);
 d. è possibile, con l'algoritmo scelto, ottenere un cammino minimo da A a E con al più 5 archi? Se sì, qual è? come si ottiene?

4. Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (5/2, 0, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llllll} \max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\ & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\ & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & & \end{array}$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	-1	0	0	-9	0	-1	0
0	7	0	1	42	1	0	21
1	8	0	0	24	1	0	24
0	9	1	0	54	1	0	27

Si dica, senza eseguire operazioni di pivot e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

- riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Perché? Qual è? Perché non è ottima?
- perché la teoria del simplesso non consente l'operazione di pivot sull'elemento nel cerchio (24)?
- su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
- considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?
- supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_2 : perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenerare?

6. Si vuole risolvere con **AMPL** un problema di trasporto di alberi da un insieme di origini I a un insieme di destinazioni J . Ciascuna origine i mette a disposizione O_i alberi e ciascuna destinazione richiede D_j alberi. Il costo unitario di trasporto da i a j è C_{ij} e si ha un costo fisso F_i per l'organizzazione dei trasporti da ciascuna origine i . Non è inoltre possibile organizzare il trasporto in più di N origini. Il modello per la minimizzazione dei costi è riportato affianco e utilizza le variabili x_{ij} per indicare il numero di alberi trasportati da i a j , e y_i che vale 1 se si organizza il trasporto da i , 0 altrimenti.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j, \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i y_i, \quad \forall i \in I \\ & \sum_{i \in I} y_i \leq N \end{array}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, \quad j \in J$$

- Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).
- Si produca il **file .dat** per l'istanza con origini Croazia, Svezia, Gran Bretagna e Canada (disponibilità di 1000, 2000, 3000 e 4000 alberi rispettivamente), destinazioni Italia, Francia e Germania (con richieste di 5000, 3000 e 2000 rispettivamente), $N = 3$, costi fissi F_i di 1000 euro per tutte le origini, e costi di trasporto verso Italia, Francia e Germania (nell'ordine) pari a: dalla Croazia 10, 20 e 30 euro; dalla Svezia 40, 50 e 60 euro; dalla Gran Bretagna 70, 80 e 90 euro; dal Canada 100, 110 e 120 euro.
- Si scriva uno script di **AMPL** (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

SOLUZIONE

Esercizio 1

Variabili

- x_i : numero di pantaloni di tipo $i \in \{1,2\}$ prodotti;
- y_j : numero di spezzoni tagliati secondo lo schema $j \in \{A, B, C, D\}$;
- z_j : variabile binaria con valore 1 se taglio almeno uno spezzone secondo lo schema $j \in \{A, B, C, D\}$, 0 altrimenti;
- w : variabile binaria con valore 1 se taglio spezzoni seguendo più di due schemi diversi.

Modello

$$\max 80 x_1 + 110 x_2 - 2y_A - 4y_B - 3y_C - y_D - 500w$$

$$\text{s. t. } y_A \geq 10$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$y_A + y_B + y_C + y_D \leq 500 \quad (\text{spezzoni disponibili})$$

$$5y_A + 7y_B + 13y_C + 11y_D \geq 2x_1 + 3x_2 \quad (\text{tasche sufficienti})$$

$$4y_A + 10y_B + 5y_C + 8y_D \geq 2x_1 + 2x_2 \quad (\text{gambe sufficienti})$$

$$12y_A + 4y_B + 8y_C \geq 5x_1 + 4x_2 \quad (\text{rinforzi sufficienti})$$

$$\frac{1}{2}y_A + 3y_B + y_C + y_D \leq 700 \quad (\text{tempo disponibile})$$

$$z_A + z_B + z_C + z_D \leq 3 \quad (\text{massimo 3 schemi})$$

$$z_A + z_B + z_C \geq 2 \quad (\text{rinforzi da almeno due schemi})$$

$$y_j \leq Mz_j, \quad j \in \{A, B, C, D\} \quad (\text{attiva variabili } z, M \text{ cost. grande, ad es. } M = 500)$$

$$y_j \geq z_j, \quad j \in \{A, B, C, D\} \quad (\text{valori spuri su } z)$$

$$z_A + z_B + z_C + z_D \leq 2 + 2w \quad (\text{attiva variabile } w)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, i \in \{1,2\}$$

$$y_j \in \mathbb{Z}_+, j \in \{A, B, C, D\}$$

$$z_j \in \{0,1\}, j \in \{A, B, C, D\}$$

$$w \in \{0,1\}$$

Esercizio 2

Punto a)

Forma standard

$$\text{Posto } y_2 = -x_2$$

$$\begin{array}{llllllll} \max & -2 & x_1 & - & & y_2 & - & 3 & x_3 \\ \text{s.t.} & 2 & x_1 & + & & y_2 & + & 2 & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_1 & + & & y_2 & & & & + & x_5 & = & 1 \\ & & x_1 & + & & y_2 & + & 2 & x_3 & & + & x_6 & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & & & & y_2 \geq 0 & & & x_3 \geq 0 & & x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

È evidente una base ammissibile da variabili di slack x_4, x_5, x_6

Passaggi del simplesso in forma tableau

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
z	-2	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	2	1	2	1	0	0	0	3
x_5	1	1	0	0	1	0	0	1
x_6	1	1	2	0	0	1	0	2

Forma canonica rispetto alla base $\{x_4, x_5, x_6\}$: sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra x_1 (per Bland); esce $\arg \min \{3/2, 1/1, 2/1\} = x_5$

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	1	-3	0	2	0	-1	2	$R_0 + 2 R_2$
x_4	0	-1	2	1	-2	0	0	1	$R_1 - 2 R_2$
x_1	1	1	0	0	1	0	0	1	R_2
x_6	0	0	2	0	-1	1	0	1	$R_3 - R_2$

Forma canonica rispetto alla base $\{x_4, x_1, x_6\}$: sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra x_3 ; esce $\arg \min \{1/2, X, 1/2\} = x_4$ (per Bland)

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	-1/2	0	3/2	-1	0	-1	7/2	$R_0 + 3 R'_1$
x_3	0	-1/2	1	1/2	-1	0	0	1/2	$1/2 R_1$
x_1	1	1	0	0	1	0	0	1	R_2
x_6	0	1	0	-1	1	1	0	0	$R_3 - R_1$

Forma canonica rispetto alla base $\{x_3, x_1, x_6\}$: sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra y_2 (per Bland); esce $\arg \min \{X, 1/1, 0/1\} = x_6$

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1	7/2	$R_0 + 1/2 R_3$
x_3	0	0	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	$R_1 + 1/2 R_3$
x_1	1	0	0	1	0	-1	0	1	$R_2 - R_3$
y_2	0	1	0	-1	1	1	0	0	R_3

Forma canonica rispetto alla base $\{x_3, x_1, y_2\}$: sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra x_5 ; esce $\arg \min \{X, X, 0/1\} = y_2$

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	1/2	0	1/2	0	1	-1	7/2	$R_0 + 1/2 R_3$
x_3	0	1/2	1	-1/2	0	1	0	1/2	$R_1 + 1/2 R_3$
x_1	1	0	0	1	0	-1	0	1	R_2
x_5	0	1	0	-1	1	1	0	0	R_3

Forma canonica rispetto alla base $\{x_3, x_1, x_5\}$: sì. Ammissibile: sì. Ottimo: sì.

Soluzione Ottima $z_{\max} = -z_{\min} = -(-7/2) = 7/2$

$x_1 = 1$; $x_2 = -y_2 = 0$; $x_3 = 1/2$; $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ (vincoli saturi)

Punto b)

Il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale è 7/2 (lo stesso) in base al teorema della dualità forte (se un problema di PL ha soluzione ottima finita, il corrispondente problema duale ha soluzione ottima finita e i valori coincidono).

Esercizio 3

Punto a) Si sceglie l'algoritmo di Bellman-Ford in quanto esistono archi con costo negativo. Bellman-Ford è l'unico algoritmo visto in grado di garantire convergenza alla soluzione ottima del problema dei cammini minimi in presenza di archi di costo negativo, sebbene mediamente meno efficiente dell'algoritmo di Dijkstra, che non garantisce di trovare la soluzione al problema dei cammini minimi se esistono archi di costo negativo.

Punto b)

Iter.	A	B	C	D	E	F	G	Aggiornati
$h=0$	0(-)	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	A
$h=1$	0(-)	5(A)	-1(A)	3(A)	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	B, C, D
$h=2$	0(-)	4(D)	-1(A)	0(C)	8(B)	3(C)	$+\infty(-)$	B, D, E, F
$h=3$	0(-)	1(D)	-1(A)	0(C)	7(B) 5(F)	2(D)	4(F)	B, E, F, G
$h=4$	0(-)	1(D)	-1(A)	0(C)	4(B) 3(G)	2(D)	3(F)	E, G
$h=5$	0(-)	1(D)	-1(A)	-1(E)	2(G)	2(D)	3(F)	D, E
$h=6$	0(-)	0(D)	-1(A)	-2(E)	2(G)	1(D)	3(F)	B, D, F
$h=7$	0(-)	-1(D)	-1(A)	-2(E)	2(G)	0(D)	2(F)	B, F, G

La tabella riporta al riga 0 di inizializzazione e una riga per ogni iterazione. All'iterazione h si controllano gli archi (i,j) uscenti da ciascun nodo i nella colonna *Aggiornati* alla riga $h-1$, e si aggiornano i costi e i predecessori del nodo j all'iterazione h qualora l'etichetta del nodo i all'iterazione $h-1$ più il costo dell'arco (i,j) sia strettamente minore dell'etichetta corrente del nodo j .

L'algoritmo si ferma qualora la lista dei nodi aggiornati sia vuota (convergenza delle etichette ai costi dei cammini minimi da A verso gli altri nodi) o, come in questo caso, venga completata l'iterazione con h uguale al numero di nodi avendo dei nodi aggiornati (presenza di un ciclo negativo).

Punto c)

Siccome all'iterazione 7 (numero dei nodi) la lista dei nodi aggiornati non è vuota, le etichette non sono stabili ed esiste un ciclo negativo, pertanto non è possibile determinare albero o grafo dei cammini minimi. Per individuare un ciclo negativo, si considera l'iterazione $h=7$ e si parte da un nodo che è stato aggiornato, seguendo a ritroso la catena dei predecessori fino a incontrare due volte uno stesso nodo. Partendo ad esempio da B otteniamo $B \leftarrow D \leftarrow E \leftarrow G \leftarrow F \leftarrow D$, che individua il ciclo $D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow D$ di costo -2.

Punto d)

Sì, l'algoritmo utilizzato permette di ottenere un cammino minimo da A a E con al più 5 archi, trattandosi dell'algoritmo di Bellman-Ford che fornisce, al completamento dell'iterazione h i cammini minimi dall'origine verso un qualsiasi nodo con al più h archi. Per individuare il cammino, si parte dall'etichetta del nodo E all'iterazione 5 e si considera il predecessore G; si procede quindi con il predecessore di G all'iterazione 4 (F), con il predecessore di F all'iterazione 3 e così via, considerando di volta in volta i predecessori all'iterazione precedente (vedi elementi evidenziati) e ottenendo $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E$ il cui costo è 2, come si può verificare.

Esercizio 4

Enunciato delle condizioni di complementarità primale duale:

Dati un problema primale $\min c^T x$ s.t. $Ax \geq b, x \in \mathbb{R}_+^n$ e il corrispondente duale $\max u^T b$ s.t. $u^T A \leq c, u \in \mathbb{R}_+^m$, e due vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}_+^m$, \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente per il primale e per il duale se e solo se: \bar{x} è ammissibile primale, \bar{u} è ammissibile duale, $u_i(a_i^T \bar{x} - b_i) = 0, \forall i = 1 \dots m$, e $(c_j - u^T A_j)x_j = 0, \forall j = 1 \dots n$, dove a_i^T è la riga i -esima di A e A_j è la colonna j -esima di A .

Applicazione delle condizioni al problema dato:

a) Verifica dell'ammissibilità primale:

- Vincoli: $5/2 > 2, -5/2 < -1, 5=5, 5 \geq 5$ [OK]
- Domini: $5/2 \geq 0, 0 \leq 0, x_3$ libera [OK]

b) Passaggio al duale:

$$\begin{array}{rcllclclcl} \min & 2 & u_1 & - & u_2 & + & 5 & u_3 & + & 5 & u_4 \\ \text{s.t.} & & u_1 & - & u_2 & + & 2 & u_3 & + & 2 & u_4 & \geq & -1 \\ & & & & 3 & u_2 & & & - & u_4 & \leq & 2 \\ & & - & u_1 & & & - & u_3 & - & 2 & u_4 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & & & u_1 \leq 0 & u_2 \geq 0 & u_3 \text{ libera} & u_4 \leq 0 \end{array}$$

c) Applicazione delle condizioni e deduzioni:

- $u_1 (1/2) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
- $u_2 (-1/2) = 0 \Rightarrow u_2 = 0$
- $u_3 (2x_1 - x_3 - 5) = 0$ per ammissibilità primale
- $u_4 (0) = 0 \Rightarrow$ nessuna informazione su u_4
- $x_1 (u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 1) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1$
- $x_2 (3u_2 - u_4 - 2) = 0 \Rightarrow$ nessuna informazione ($x_2 = 0$)
- x_3 libera \Rightarrow imporre il corrispondente vincolo duale di uguaglianza per ammissibilità duale

d) Sistema delle equazioni per condizioni di complementarità primale-duale (CCPD) e per ammissibilità duale (AD):

$$\begin{cases} u_1 = 0 & \text{(CCPD)} \\ u_2 = 0 & \text{(CCPD)} \\ u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1 & \text{(CCPD)} \\ -u_1 - u_3 - 2u_4 = 2 & \text{(AD)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 1 \\ u_4 = -3/2 \end{cases}$$

e) Verifica ammissibilità duale

La soluzione calcolata al punto d)

- soddisfa il primo e il terzo vincolo [per costruzione]
- soddisfa il secondo vincolo duale [$3/2 < 2$]
- soddisfa i vincoli di dominio del duale [$0 \leq 0, 0 \geq 0, u_3$ libera, $-3/2 < 0$]

f) La soluzione x data e la soluzione u determinata al punto d) sono una coppia di soluzioni ammissibili, rispettivamente, per il problema primale e per il problema duale e sono i scarti complementari. Pertanto la soluzione x data è ottima.

Esercizio 5

Punto a) Sì, riusciamo a individuare una soluzione di base in quanto il tableau dato è in forma canonica rispetto alla base individuata dalle variabili, in ordine di riga, x_4 , x_1 e x_3 . La soluzione è $x_4 = 21$, $x_1 = 24$, $x_3 = 27$, $x_2 = x_5 = x_6 = 0$. Il valore della soluzione è pari a $z = -0 = 0$. La soluzione non è ottima perché esistono dei costi ridotti strettamente negativi e perché, essendo la soluzione non degenere, è possibile effettuare un'operazione di pivot che porterà in base una variabile a costo ridotto negativo con un valore strettamente positivo, provocando un decremento del valore della funzione obiettivo.

Punto b) L'operazione non è consentita in quanto porterebbe a una soluzione di base non ammissibile, visto che la riga dell'elemento proposto non soddisfa la regola del rapporto minimo. Pertanto l'operazione di pivot proposta porterà la variabile x_1 al valore 0 e le variabili x_3 e x_4 (i cui rapporti sono inferiori) a valori strettamente negativi.

Punto c) considerando l'entrata di una variabile a costo ridotto negativo e l'uscita di una variabile che soddisfa la regola del rapporto minimo, è possibile effettuare il pivot su uno degli elementi 7 (entra x_2 esce x_4), 8 (entra x_2 esce x_1), 9 (entra x_2 esce x_3), 42 (entra x_5 esce x_4), 54 (entra x_5 esce x_3).

Punto d) Entra x_2 ed esce x_1 . Essendo il rapporto minimo pari a 3, la variabile x_2 entra in base al valore 3. Essendo il costo ridotto di x_2 pari a -1 , il nuovo valore della funzione obiettivo sarà pari a quello corrente più $(-1) \cdot 3$, quindi $0 - 3 = -3$.

Punto e) La colonna x_2 presenta tre righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto una delle variabili tra x_4 , x_1 e x_3 assumerà valore 0 uscendo dalla base, mentre le altre due assumeranno valore 0 restando in base, configurando una nuova base degenere.

Esercizio 6

Punto a)

```
set I;                set J;
param O{I};           param D{J};
param C{I,J};          param F{I};
param N;
var x{I,J} >=0 integer;
var y{I} binary;
minimize fo: sum{i in I, j in J} C[i,j]*x[i,j] - sum{i in I} F[i]*y[i];
s.t. d{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= D[j];
s.t. o{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= O[i] * y[i];
s.t. n: sum{i in I} y[i] <= N;
```

Punto b)

```
set I := Croazia Svezia GranBretagna Canada;
set J := Italia Francia Germania;
param :      F      O :=
Croazia      1000  1000
Svezia        1000  2000
GranBretagna  1000  3000
Canada        1000  4000;
param D := Italia 5000 Francia 3000 Germania 2000;
param N := 4;
param C :      Italia      Francia      Germania :=
Croazia      10           20           30
Svezia        40           50           60
GranBretagna  70           80           90
Canada        100          110          120;
```

Punto c)

```
reset;
model ampl.mod;
data ampl.dat;
option solver cplexamp;
solve;
display fo, x, y;
```