

## Tema d'esame del 10 febbraio 2020

COGNOME: \_\_\_\_\_  
 Scrivere subito! NOME: \_\_\_\_\_  
 MATRICOLA: \_\_\_\_\_

Questo foglio deve  
 essere consegnato  
 con l'elaborato

1. Una falegnameria vuole realizzare le ante, i frontali e i fianchi necessari per la produzione di cucine. Tutte le cucine utilizzano gli stessi componenti, che sono ottenuti dal taglio di pannelli di dimensioni standard. Il taglio avviene secondo quattro diversi pattern, che permettono di ottenere, a partire da un pannello, un diverso numero di ante, fianchi e frontali, con diversi consumi di energia e di manodopera. Le cucine possono essere prodotte in due tipi, ciascuna caratterizzata dall'impiego di un numero diverso di componenti e di manodopera. Le caratteristiche di pattern e tipi di cucina sono riassunti nella tabella.

	Pattern 1	Pattern 2	Pattern 3	Pattern 4	Tipo A	Tipo B
Ante	12	8	9	3	10	7
Frontali	9	11	13	-	8	11
Fianchi	4	6	2	11	6	5
Manodopera (ore)	3	4	5	2	10	12

Sono disponibili 80 pannelli e 500 ore di manodopera. L'energia impiegata per il taglio del pattern 1 è la stessa del pattern 2, la metà del pattern 3 e un terzo del pattern 4. È disponibile energia complessiva per tagliare l'equivalente di 100 pannelli secondo il pattern 1. Si scriva un modello di programmazione lineare che permetta di massimizzare il numero di cucine realizzate, tenendo anche conto che

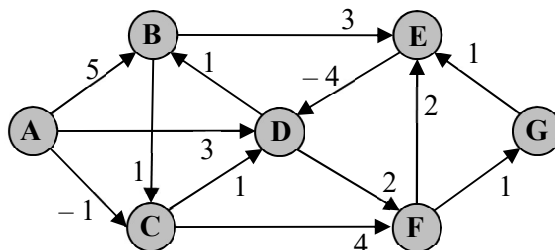
- si vogliono tagliare almeno 20 pannelli seguendo il pattern 1;
- le cucine di tipo B devono essere almeno la metà delle cucine di tipo A;
- è possibile utilizzare al massimo tre pattern diversi per il taglio dei pannelli;
- si vogliono ricavare frontali da almeno due pattern diversi;
- il taglio dei pannelli avviene su linee diverse a seconda del pattern, e la manodopera per la loro predisposizione è di 40 ore se si utilizzano fino a 2 linee, 50 se se ne usano di più.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -3 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & x_1 \quad \quad - x_3 \geq -1 \\
 & x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;  
 b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

3. Nel seguente grafo, calcolare i cammini minimi dal nodo A verso **tutti** gli altri nodi.



- a. si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;  
 b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);  
 c. si utilizzi la tabella del punto b per riportare, se possibile, l'albero e il grafo dei cammini minimi oppure, se esiste, un ciclo di costo negativo (descrivere il procedimento);  
 d. è possibile, con l'algoritmo scelto, ottenere un cammino minimo da A a E con al più 5 archi? Se sì, qual è? come si ottiene?

4. Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che  $(x_1, x_2, x_3) = (5/2, 0, 0)$  è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llllll} \max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\ & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\ & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & & \end{array}$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$
0	-1	0	0	-9	0	-1	0
0	6	0	1	12	1	0	12
1	7	0	0	10	1	0	14
0	8	1	0	16	1	0	16

Si dica, senza eseguire operazioni di pivot e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

- riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Perché? Qual è? Perché non è ottima?
- perché la teoria del simplesso non consente l'operazione di pivot sull'elemento nel cerchio (10)?
- su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
- considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?
- supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile  $x_2$ : perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenerare?

6. Si vuole risolvere con **AMPL** un problema di trasporto di alberi da un insieme di origini  $I$  a un insieme di destinazioni  $J$ . Ciascuna origine  $i$  mette a disposizione  $O_i$  alberi e ciascuna destinazione richiede  $D_j$  alberi. Il costo unitario di trasporto da  $i$  a  $j$  è  $C_{ij}$  e si ha un costo fisso  $F_i$  per l'organizzazione dei trasporti da ciascuna origine  $i$ . Non è inoltre possibile organizzare il trasporto in più di  $N$  origini. Il modello per la minimizzazione dei costi è riportato affianco e utilizza le variabili  $x_{ij}$  per indicare il numero di alberi trasportati da  $i$  a  $j$ , e  $y_i$  che vale 1 se si organizza il trasporto da  $i$ , 0 altrimenti.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j, \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i y_i, \quad \forall i \in I \\ & \sum_{i \in I} y_i \leq N \end{array}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, \quad j \in J$$

- Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).
- Si produca il **file .dat** per l'istanza con origini Croazia, Svezia, Gran Bretagna e Canada (disponibilità di 1000, 2000, 3000 e 4000 alberi rispettivamente), destinazioni Italia, Francia e Germania (con richieste di 5000, 3000 e 2000 rispettivamente),  $N = 3$ , costi fissi  $F_i$  di 1000 euro per tutte le origini, e costi di trasporto verso Italia, Francia e Germania (nell'ordine) pari a: dalla Croazia 10, 20 e 30 euro; dalla Svezia 40, 50 e 60 euro; dalla Gran Bretagna 70, 80 e 90 euro; dal Canada 100, 110 e 120 euro.
- Si scriva uno script di **AMPL** (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

## SOLUZIONE

### Esercizio 1

#### Variabili

- $x_i$ : numero di cucine di tipo  $i \in \{A, B\}$  prodotte;
- $y_j$ : numero di pannelli tagliati secondo il pattern  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- $z_j$ : variabile binaria con valore 1 se si taglia almeno un pannello secondo il pattern  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , 0 altrimenti;
- $w$ : variabile binaria con valore 1 se si tagliano pannelli seguendo più di due pattern diversi.

#### Modello

$$\begin{aligned}
 &\max x_A + x_B \\
 &s.t. \quad y_1 \geq 20 \\
 &\quad \quad x_B \geq \frac{1}{2} x_A \\
 &\quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 80 \quad (\text{pannelli disponibili}) \\
 &\quad 12y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 3y_4 \geq 10x_A + 7x_B \quad (\text{ante sufficienti}) \\
 &\quad 9y_1 + 11y_2 + 13y_3 \geq 8x_A + 11x_B \quad (\text{frontali sufficienti}) \\
 &\quad 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 11y_4 \geq 6x_A + 5x_B \quad (\text{fianchi sufficienti}) \\
 &\quad 10x_A + 12x_B + 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 2y_4 \leq 500 - 40 - 10w \quad (\text{manodopera disponibile}) \\
 &\quad y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 100 \quad (\text{energia disponibile}) \\
 &\quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \leq 3 \quad (\text{massimo 3 pattern diversi}) \\
 &\quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 2 \quad (\text{frontali da almeno due pattern diversi}) \\
 &\quad y_j \leq Mz_j, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (\text{attiva variabili } z, M \text{ cost. grande, ad es. } M = 80) \\
 &\quad y_j \geq z_j, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (\text{valori spuri su } z) \\
 &\quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \leq 2 + 2w \quad (\text{attiva variabile } w) \\
 &\quad x_i \in \mathbb{Z}_+, i \in \{A, B\} \\
 &\quad y_j \in \mathbb{Z}_+, j \in \{1, 2, 3, 4\} \\
 &\quad z_j \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2, 3, 4\} \\
 &\quad w \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

### Esercizio 2

#### Punto a)

#### Forma standard

Posto  $y_1 = -x_1$

$$\begin{aligned}
 &\max \quad -2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 &s.t. \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_6 &= 1 \end{aligned} \\
 &\quad y_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

È evidente una base ammissibile da variabili di slack  $x_4, x_5, x_6$

*Passaggi del simplesso in forma tableau*

	$y_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$
$z$	-2	-3	-1	0	0	0	-1	0
$x_4$	2	2	1	1	0	0	0	3
$x_5$	1	2	1	0	1	0	0	2
$x_6$	1	0	1	0	0	1	0	1

Forma canonica rispetto alla base  $\{x_4, x_5, x_6\}$ : sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra  $x_1$  (per Bland); esce  $\arg \min \{3/2, 2/1, 1/1\} = x_6$

	$y_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$	
$z$	0	-3	1	0	0	2	-1	2	$R_0 + 2 R_3$
$x_4$	0	2	-1	1	0	-2	0	1	$R_1 - 2 R_3$
$x_5$	0	2	0	0	1	-1	0	1	$R_2 - R_3$
$y_1$	1	0	1	0	0	1	0	1	$R_3$

Forma canonica rispetto alla base  $\{x_4, x_5, y_1\}$ : sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra  $y_2$ ; esce  $\arg \min \{1/2, 1/2, X\} = x_4$  (per Bland)

	$y_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$	
$z$	0	0	-1/2	3/2	0	-1	-1	7/2	$R_0 + 3 R'_1$
$x_2$	0	1	-1/2	1/2	0	-1	0	1/2	$1/2 R_1$
$x_5$	0	0	1	-1	1	1	0	0	$R_2 - R_1$
$y_1$	1	0	1	0	0	1	0	1	$R_3$

Forma canonica rispetto alla base  $\{x_2, x_5, y_1\}$ : sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra  $x_3$  (per Bland); esce  $\arg \min \{X, 0/1, 1/1\} = x_5$

	$y_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$	
$z$	0	0	0	1	1/2	-1/2	-1	7/2	$R_0 + 1/2 R_2$
$x_2$	0	1	0	0	1/2	-1/2	0	1/2	$R_1 + 1/2 R_2$
$x_3$	0	0	1	-1	1	1	0	0	$R_2$
$y_1$	1	0	0	1	-1	0	0	1	$R_3 - R_2$

Forma canonica rispetto alla base  $\{x_2, x_3, y_1\}$ : sì. Ammissibile: sì. Ottimo: non so. Illimitato non so.

Entra  $x_6$ ; esce  $\arg \min \{X, 0/1, X\} = x_3$

	$x_1$	$y_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$z$	$b$	
$z$	0	0	1/2	1/2	1	0	-1	7/2	$R_0 + 1/2 R_2$
$x_2$	0	1	1/2	-1/2	1	0	0	1/2	$R_1 + 1/2 R_2$
$x_6$	0	0	1	-1	1	1	0	0	$R_2$
$y_1$	1	0	0	1	-1	0	0	1	$R_3$

Forma canonica rispetto alla base  $\{x_2, x_6, y_1\}$ : sì. Ammissibile: sì. Ottimo: sì.

Soluzione Ottima  $z_{\min} = -7/2$

$x_1 = -y_1 = -1$ ;  $x_2 = 1/2$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$  (vincoli saturi)

Punto b)

Il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale è  $-7/2$  (lo stesso) in base al teorema della dualità forte (se un problema di PL ha soluzione ottima finita, il corrispondente problema duale ha soluzione ottima finita e i valori coincidono).

### Esercizio 3

Punto a) Si sceglie l'algoritmo di Bellman-Ford in quanto esistono archi con costo negativo. Bellman-Ford è l'unico algoritmo visto in grado di garantire convergenza alla soluzione ottima del problema dei cammini minimi in presenza di archi di costo negativo, sebbene mediamente meno efficiente dell'algoritmo di Dijkstra, che non garantisce di trovare la soluzione al problema dei cammini minimi se esistono archi di costo negativo.

Punto b)

Iter.	A	B	C	D	E	F	G	Aggiornati
$h=0$	0(-)	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	A
$h=1$	0(-)	5(A)	-1(A)	3(A)	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	$+\infty(-)$	B, C, D
$h=2$	0(-)	4(D)	-1(A)	0(C)	8(B)	3(C)	$+\infty(-)$	B, D, E, F
$h=3$	0(-)	1(D)	-1(A)	0(C)	<del>7(B)</del> 5(F)	2(D)	4(F)	B, E, F, G
$h=4$	0(-)	1(D)	-1(A)	0(C)	4(B)	2(D)	3(F)	E, G
$h=5$	0(-)	1(D)	-1(A)	0(C)	4(B)	2(D)	3(F)	//

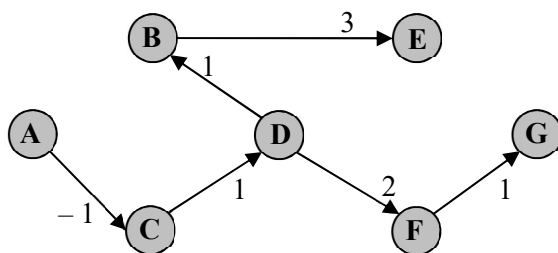
La tabella riporta al riga 0 di inizializzazione e una riga per ogni iterazione. All'iterazione  $h$  si controllano gli archi  $(i,j)$  uscenti da ciascun nodo  $i$  nella colonna *Aggiornati* alla riga  $h-1$ , e si aggiornano i costi (etichette  $\pi$ ) e i predecessori del nodo  $j$  all'iterazione  $h$  qualora l'etichetta del nodo  $i$  all'iterazione  $h-1$  più il costo dell'arco  $(i,j)$  sia strettamente minore dell'etichetta corrente del nodo  $j$ .

L'algoritmo si ferma qualora la lista dei nodi aggiornati sia vuota, come in questo caso alla fine dell'iterazione con  $h=5$  (convergenza delle etichette ai costi dei cammini minimi da A verso gli altri nodi) o, qualora venga completata l'iterazione con  $h$  uguale al numero di nodi avendo dei nodi aggiornati (individuando la presenza di un ciclo negativo).

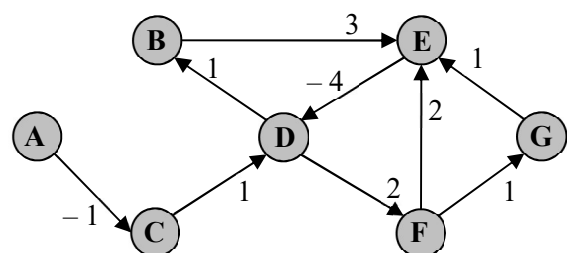
Punto c)

Siccome all'iterazione 5 la lista dei nodi aggiornati è vuota, le etichette sono stabili e pertanto è possibile determinare albero o grafo dei cammini minimi.

**L'albero** dei cammini minimi si ottiene riportando gli archi corrispondenti ai predecessori letti nell'ultima riga della tabella:



**Il grafo** dei cammini minimi si ottiene completando con tutti gli archi che soddisfano all'uguaglianza il vincolo duale  $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$ :



Punto d)

Sì, l'algoritmo utilizzato permette di ottenere un cammino minimo da A a E con al più 5 archi, trattandosi dell'algoritmo di Bellman-Ford che fornisce, al completamento dell'iterazione  $h$  i cammini minimi dall'origine verso un qualsiasi nodo con al più  $h$  archi. Per individuare il cammino, si parte dall'etichetta del nodo E all'iterazione 5 e si considera il predecessore B; si procede quindi con il predecessore di B all'iterazione 4 (D), con il predecessore di D all'iterazione 3 e così via, considerando di volta in volta i predecessori all'iterazione precedente (vedi elementi evidenziati) e ottenendo  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E$  il cui costo è 4, come si può verificare. Notare che, essendoci fermati all'iterazione 5, tutti i cammini minimi hanno al più 5 archi, pertanto è possibile individuare un cammino minimo da A ad E con al più 5 archi anche direttamente sull'albero o sul grafo dei cammini minimi.

#### Esercizio 4

Enunciato delle condizioni di complementarità primale duale:

Dati un problema primale  $\min c^T x$  s.t.  $Ax \geq b, x \in \mathbb{R}_+^n$  e il corrispondente duale  $\max u^T b$  s.t.  $u^T A \leq c, u \in \mathbb{R}_+^m$ , e due vettori  $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$  e  $\bar{u} \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente per il primale e per il duale se e solo se:  $\bar{x}$  è ammissibile primale,  $\bar{u}$  è ammissibile duale,  $u_i(a_i^T \bar{x} - b_i) = 0, \forall i = 1 \dots m$ , e  $(c_j - u^T A_j)x_j = 0, \forall j = 1 \dots n$ , dove  $a_i^T$  è la riga  $i$ -esima di  $A$  e  $A_j$  è la colonna  $j$ -esima di  $A$ .

Applicazione delle condizioni al problema dato:

a) Verifica dell'ammissibilità primale:

- Vincoli:  $5/2 > 2, -5/2 < -1, 5=5, 5 \geq 5$  [OK]
- Domini:  $5/2 \geq 0, 0 \leq 0, x_3$  libera [OK]

b) Passaggio al duale:

$$\begin{array}{rcccccccl} \min & 2 & u_1 & - & u_2 & + & 5 & u_3 & + & 5 & u_4 \\ \text{s.t.} & & u_1 & - & u_2 & + & 2 & u_3 & + & 2 & u_4 & \geq & -1 \\ & & & & 3 & u_2 & & & - & u_4 & \leq & 2 \\ & & - & u_1 & & & - & u_3 & - & 2 & u_4 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & & & u_1 \leq 0 & u_2 \geq 0 & u_3 \text{ libera} & u_4 \leq 0 \end{array}$$

c) Applicazione delle condizioni e deduzioni:

- $u_1 (1/2) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
- $u_2 (-1/2) = 0 \Rightarrow u_2 = 0$
- $u_3 (2x_1 - x_3 - 5) = 0$  per ammissibilità primale
- $u_4 (0) = 0 \Rightarrow$  nessuna informazione su  $u_4$
- $x_1 (u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 1) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1$
- $x_2 (3u_2 - u_4 - 2) = 0 \Rightarrow$  nessuna informazione ( $x_2 = 0$ )
- $x_3$  libera  $\Rightarrow$  imporre il corrispondente vincolo duale di uguaglianza per ammissibilità duale

d) Sistema delle equazioni per condizioni di complementarità primale-duale (CCPD) e per ammissibilità duale (AD):

$$\begin{cases} u_1 = 0 & \text{(CCPD)} \\ u_2 = 0 & \text{(CCPD)} \\ u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1 & \text{(CCPD)} \\ -u_1 - u_3 - 2u_4 = 2 & \text{(AD)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 1 \\ u_4 = -3/2 \end{cases}$$

e) Verifica ammissibilità duale

La soluzione calcolata al punto d)

- soddisfa il primo e il terzo vincolo [per costruzione]
- soddisfa il secondo vincolo duale [ $3/2 < 2$ ]
- soddisfa i vincoli di dominio del duale [ $0 \leq 0, 0 \geq 0, u_3$  libera,  $-3/2 < 0$ ]

f) La soluzione  $x$  data e la soluzione  $u$  determinata al punto d) sono una coppia di soluzioni ammissibili, rispettivamente, per il problema primale e per il problema duale e sono i scarti complementari. Pertanto la soluzione  $x$  data è ottima.

### Esercizio 5

Punto a) Sì, riusciamo a individuare una soluzione di base in quanto il tableau dato è in forma canonica rispetto alla base individuata dalle variabili, in ordine di riga,  $x_4$ ,  $x_1$  e  $x_3$ . La soluzione è  $x_4 = 12$ ,  $x_1 = 14$ ,  $x_3 = 16$ ,  $x_2 = x_5 = x_6 = 0$ . Il valore della soluzione è pari a  $z = -0 = 0$ . La soluzione non è ottima perché esistono dei costi ridotti strettamente negativi e perché, essendo la soluzione non degenere, è possibile effettuare un'operazione di pivot che porterà in base una variabile a costo ridotto negativo con un valore strettamente positivo, provocando un decremento del valore della funzione obiettivo.

Punto b) L'operazione non è consentita in quanto porterebbe a una soluzione di base non ammissibile, visto che la riga dell'elemento proposto non soddisfa la regola del rapporto minimo. Pertanto l'operazione di pivot proposta porterà la variabile  $x_1$  al valore 0 e le variabili  $x_3$  e  $x_4$  (i cui rapporti sono inferiori) a valori strettamente negativi.

Punto c) considerando l'entrata di una variabile a costo ridotto negativo e l'uscita di una variabile che soddisfa la regola del rapporto minimo, è possibile effettuare il pivot su uno degli elementi 6 (entra  $x_2$  esce  $x_4$ ), 7 (entra  $x_2$  esce  $x_1$ ), 8 (entra  $x_2$  esce  $x_3$ ), 12 (entra  $x_5$  esce  $x_4$ ), 16 (entra  $x_5$  esce  $x_3$ ).

Punto d) Entra  $x_2$  ed esce  $x_1$ . Essendo il rapporto minimo pari a 2, la variabile  $x_2$  entra in base al valore 2. Essendo il costo ridotto di  $x_2$  pari a  $-1$ , il nuovo valore della funzione obiettivo sarà pari a quello corrente più  $(-1) \cdot 2$ , quindi  $0 - 2 = -2$ .

Punto e) La colonna  $x_2$  presenta tre righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto una delle variabili tra  $x_4$ ,  $x_1$  e  $x_3$  assumerà valore 0 uscendo dalla base, mentre le altre due assumeranno valore 0 restando in base, configurando una nuova base degenere.

### Esercizio 6

Punto a)

```
set I;                set J;
param O{I};           param D{J};
param C{I,J};         param F{I};
param N;
var x{I,J} >=0 integer;
var y{I} binary;
minimize fo: sum{i in I, j in J} C[i,j]*x[i,j] - sum{i in I} F[i]*y[i];
s.t. d{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= D[j];
s.t. o{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= O[i] * y[i];
s.t. n: sum{i in I} y[i] <= N;
```

Punto b)

```
set I := Croazia Svezia GranBretagna Canada;
set J := Italia Francia Germania;
param :      F      O :=
Croazia      1000  1000
Svezia       1000  2000
GranBretagna 1000  3000
Canada       1000  4000;
param D := Italia 5000 Francia 3000 Germania 2000;
param N := 4;
param C :      Italia      Francia      Germania :=
Croazia      10           20           30
Svezia       40           50           60
GranBretagna 70           80           90
Canada       100          110          120;
```

Punto c)

```
reset;
model ampl.mod;
data ampl.dat;
option solver cplexamp;
solve;
display fo, x, y;
```