Ricerca Operativa

Esercizi risolti sulle condizioni di complementarietà primale-duale

L. De Giovanni, V. Dal Sasso

Esercizio 1. Dato il problema

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -6 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2] = [0, 6]$ è ottima.

SOLUZIONE
Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia <u>ammissibile</u> e <u>in scarti complementari</u> con la soluzione primale data.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $x_1 + 2x_2 = 0 + 2 \cdot 6 = 12 \geq 7$ (OK)
   $2x_1 - x_2 = 2 \cdot 0 - 6 = -6 \geq -6$ (OK)
   $-3x_1 + 2x_2 = -3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12 \geq 8$ (OK)
   $x_1 = 0 \geq 0, x_2 = 6 \geq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:
   $$\begin{array}{lrcrcrcr}
   \max & 7u_1 & - & 6u_2 & + & 8u_3 & & \\
   \text{s.t.} & u_1 & + & 2u_2 & - & 3u_3 & \leq & 2 \\
    & 2u_1 & - & u_2 & + & 2u_3 & \leq & -1 \\
    & u_1 & , & u_2 & , & u_3 & \geq & 0
   \end{array}$$

3. *Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale*:

   - $u_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \rightarrow u_1(5) = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione);
   - $u_2(2x_1 - x_2 + 6) = 0 \rightarrow u_2(0) = 0 \rightarrow //$ (non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà su u_2);
   - $u_3(-3x_1 + 2x_2 - 8) \rightarrow u_3(4) = 0 \rightarrow u_3 = 0$ (seconda condizione).

   - $(u_1 + 2u_2 - 3u_3 - 2)x_1 = 0 \rightarrow (u_1 + 2u_2 - 3u_3 - 2) \cdot 0 = 0 \rightarrow //$ (non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà sul primo vincolo duale);
   - $(2u_1 - u_2 + 2u_3 + 1)x_2 = 0 \rightarrow (2u_1 - u_2 + 2u_3 + 1) \cdot 6 = 0 \rightarrow 2u_1 - u_2 + 2u_3 = -1$ (terza condizione).

4. Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$$\begin{cases} u_1 = 0 & \text{(ccpd)} \\ u_3 = 0 & \text{(ccpd)} \\ 2u_1 - u_2 + 2u_3 = -1 & \text{(ccpd)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

5. Verifica ammissibilità duale:
la soluzione duale trovata:

- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1, u_2, u_3 \geq 0$);
- soddisfa i due vincoli duali ($u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 2 \leq 2$, $2u_1 - u_2 + 2u_3 = -1 \leq -1$);

6. Conclusioni:
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

- x è ammissibile primale (come da verifica);
- u è ammissibile duale (come da verifica);
- x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale.

[Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali: $2x_1 - x_2 = -6$ e $7u_1 - 6u_2 + 8u_3 = -6$, il ché verifica il Corollario 2 della dualità (all'ottimo, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono).]

Esercizio 2. Dato il problema

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & & & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
& -2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\
& & & 2x_2 & & & \geq & -3 \\
& 2x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\
& x_1 & & & & & & \text{libera} \\
& & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale ed applicarle per verificare se la soluzione $[x_1, x_2, x_3] = [1, 4, 0]$ è ottima.

SOLUZIONE

Prima di tutto, come richiesto, enunciare le condizioni complementarietà primale-duale, ad esempio fissando una forma per il problema primale [vedi, nelle dispense sulla dualità, l'enunciato del Teorema 5 e, in particolare, le successive osservazioni sull'estensione delle condizioni ai singoli vincoli]. Qui sottolineiamo che le condizioni includono anche *l'ammissibilità delle soluzioni primale e duale.*

Procediamo con la verifica dell'ottimalità della soluzione data per il problema di programmazione lineare proposto.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $-x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 - 4 + 2 \cdot 0 = -5 \leq 1$ (OK)
   $-2x_1 + x_2 = -2 \cdot 1 + 4 = 2 \leq 2$ (OK)
   $2x_2 = 2 \cdot 4 = 8 \geq -3$ (OK)
   $2x_1 + x_3 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ (OK)
   $x_2 = 4 \geq 0, x_3 = 0 \leq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & u_1 & + & 2u_2 & - & 3u_3 & + & 2u_4 & & \\
\text{s.t.} & -u_1 & - & 2u_2 & & & + & 2u_4 & = & 0 \\
& -u_1 & + & u_2 & + & 2u_3 & & & \geq & 1 \\
& 2u_1 & & & & & + & u_4 & \leq & 1 \\
& u_1 & , & u_2 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & u_3 & & & \leq & 0 \\
& & & & & & & u_4 & & \text{libera}
\end{array}
$$

3. *Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale*:

   - $u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_1(-6) = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione);
   - $u_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \rightarrow u_2(0) = 0 \rightarrow //$ (non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà su u_2);

- $u_3(2x_2 + 3) = 0 \rightarrow u_3(11) = 0 \rightarrow u_3 = 0$ (seconda condizione);
- il quarto vincolo primale è di uguaglianza: non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile duale u_4 (la condizione $u_4(2x_1+x_3-2) = 0$ è diretta conseguenza dell'ammissibilità primale).

- Il primo vincolo duale è di uguaglianza: non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile x_1 (la condizione $(-u_1-2u_2+2u_4-0)x_1 = 0$ è diretta conseguenza dell'ammissibilità duale; infatti, l'equazione $-u_1-2u_2+2u_4 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale[1]);
- $(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 = 0 \rightarrow (-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1) \cdot 4 = 0 \rightarrow -u_1 + u_2 + 2u_3 - 1 = 0$ (terza condizione);
- $(2u_1 + u_4 - 1)x_3 = 0 \rightarrow (2u_1 + u_4 - 1) \cdot 0 = 0 \rightarrow //$.

4. Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$$\begin{cases} u_1 = 0 & \text{(ccpd)} \\ u_3 = 0 & \text{(ccpd)} \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 & \text{(ccpd)} \\ -u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0 & \text{(ammiss. duale)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 1 \end{cases}$$

5. Verifica ammissibilità duale:
la soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$, $-u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 \geq 1$, $2u_1 + u_4 = 1 \leq 1$);
- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1, u_2 \geq 0$, $u_3 \leq 0$,u_4 libera).

6. Conclusioni:
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

- x è ammissibile primale (come da verifica);
- u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
- x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

[1] Se si considerano *erroneamente* le condizioni di complementarietà per questo vincolo duale, avendo $x_1 \neq 0$, si inserirebbe comunque questo vincolo tra le condizioni utilizzate al punto successivo per determinare una opportuna soluzione duale, ma il procedimento non è corretto.

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale.

[Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali: $x_2+x_3 = 4$ e $u_1+2u_2-3u_3+2u_4 = 4$, il ché verifica il Corollario 2 della dualità (all'ottimo, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono).]

Esercizio 3. Dato il problema

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & \leq & 2 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & -3 \\
 & x_1 & , & & & & & x_4 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & & \text{libera}
\end{array}
$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [0, 0, -3, 7]$ è ottima.

Soluzione

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 - 0 + 2 \cdot (-3) + 7 = 1 \geq 1$ (OK)
   $-x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 + 0 - 2 \cdot 7 = -14 \leq 2$ (OK)
   $2x_2 + x_3 = 0 - 3 = -3$ (OK)
   $x_1 = 0 \geq 0, x_2 = 0 \leq 0, x_4 = 7 \geq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & u_1 & + & 2u_2 & - & 3u_3 & & \\
\text{s.t.} & -u_1 & - & u_2 & & & \leq & 2 \\
 & -u_1 & + & u_2 & + & 2u_3 & \geq & 1 \\
 & 2u_1 & & & + & u_3 & = & 1 \\
 & u_1 & - & 2u_2 & & & \leq & 0 \\
 & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & u_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & u_3 & & \text{libera}
\end{array}
$$

3. *Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale*:

   - $u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 1) = 0 \rightarrow u_1(0) = 0 \rightarrow //$;
   - $u_2(-x_1 + x_2 - 2x_4 - 2) = 0 \rightarrow u_2(-16) = 0 \rightarrow u_2 = 0$ (prima condizione);
   - il terzo vincolo primale è di uguaglianza, quindi non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la variabile duale u_3 (che è libera), visto che la condizione $u_3(2x_2 + x_3 + 3) = 0$ deriva dall'ammissibilità primale.

- $(-u_1 - u_2 - 2)x_1 = 0 \rightarrow (-u_1 - u_2 - 2) \cdot 0 = 0 \rightarrow //$
- $(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 = 0 \rightarrow (-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1) \cdot 0 = 0 \rightarrow //$
- il terzo vincolo duale è di uguaglianza: non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con x_3 (ma ricordiamo che $2u_1 + u_3 = 1$ è condizione di ammissibilità duale da imporre tra le equazioni del sistema, e dalla quale deriva la condizione $(2u_1 + u_3 - 1)x_3 = 0$);
- $(u_1 - 2u_2 - 0)x_4 = 0 \rightarrow (u_1 - 2u_2) \cdot 7 = 0 \rightarrow u_1 - 2u_2 = 0$ (seconda condizione).

4. Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$$\begin{cases} u_2 = 0 & \text{(ccpd)} \\ u_1 - 2u_2 = 0 & \text{(ccpd)} \\ 2u_1 + u_3 = 1 & \text{(ammiss. duale)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 1 \end{cases}$$

5. Verifica ammissibilità duale:
la soluzione duale trovata:

- soddisfa i quattro vincoli duali ($-u_1 - u_2 \leq 2$, $-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$, $2u_1 + u_3 = 1$, $u_1 - 2u_2 \leq 0$);
- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 \geq 0$, $u_2 \leq 0$, u_3 libera).

6. Conclusioni:
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

- x è ammissibile primale (come da verifica);
- u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
- x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale.

[Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali: $2x_1 - x_2 + x_3 = -3$ e $u_1 + 2u_2 - 3u_3 = -3$, il ché verifica il Corollario 2 della dualità (all'ottimo, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono).]

Esercizio 4. Dato il problema

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.t.} & & & x_2 & \leq & 1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
& -x_1 & - & 3x_2 & = & 10 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & -2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2] = [2, -4]$ è ottima.

SOLUZIONE

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia <u>ammissibile</u> e <u>in scarti complementari</u> con la soluzione primale data.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $x_2 = -4 \leq 1$ (OK)
   $2x_1 + x_2 = 2 \cdot 2 - 4 = 0 \leq 5$ (OK)
   $-x_1 - 3x_2 = -2 - 3 \cdot (-4) = 10$ (OK)
   $x_1 + x_2 = 2 - 4 = -2 \geq -2$ (OK)
   $x_1 = 2 \geq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & u_1 & + & 5u_2 & + & 10u_3 & - & 2u_4 & & \\
\text{s.t.} & & & 2u_2 & - & u_3 & + & u_4 & \geq & 1 \\
& u_1 & + & u_2 & - & 3u_3 & + & u_4 & = & -1 \\
& u_1 & , & u_2 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & u_3 & & & & \text{libera} \\
& & & & & & & u_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

3. *Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale*:

   - $u_1(x_2 - 1) = 0 \rightarrow u_1(-5) = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione);
   - $u_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \rightarrow u_2(-5) = 0 \rightarrow u_2 = 0$ (seconda condizione);
   - il terzo vincolo primale è di uguaglianza, quindi non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la variabile duale u_3. In altre parole, la condizione $u_3(-x_1 - 3x_2) = 0$ vale per ammissibilità primale;
   - $u_4(x_1 + x_2 + 2) = 0 \rightarrow u_4(0) = 0 \rightarrow //$

- $(2u_2 - u_3 + u_4 - 1)x_1 = 0 \to (2u_2 - u_3 + u_4 - 1) \cdot 2 = 0 \to 2u_2 - u_3 + u_4 = 1$ (terza condizione);
- il secondo vincolo duale è di uguaglianza, quindi non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con x_2. In altre parole, la condizione $(u_1+u_2-3u_3+u_4+1) = 0$ deriva dall'ammissibilità duale.

4. Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$$\begin{cases} u_1 = 0 & \text{(ccpd)} \\ u_2 = 0 & \text{(ccpd)} \\ 2u_2 - u_3 + u_4 = 1 & \text{(ccpd)} \\ u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = -1 & \text{(ammiss. duale)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = u_4 - 1 \\ u_4 = 3(u_4 - 1) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 1 \\ u_4 = 2 \end{cases}$$

5. Verifica ammissibilità duale:
la soluzione duale trovata:

- soddisfa i due vincoli duali ($2u_2 - u_3 + u_4 \geq 1$, $u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = -1$);
- **non** soddisfa i vincoli di dominio ($u_1, u_2 \geq 0$, u_3 libera, $u_4 \geq 0$, invece dovremmo avere $u_4 \leq 0$).

6. Conclusioni:
La soluzione trovata è l'**unica** soluzione del sistema di cui al punto 4 e, quindi, l'unica che soddisfa i vincoli duali di uguaglianza e che è in scarti complementari con la soluzione primale data. Tale soluzione però **non è ammissibile** per il problema duale. Pertanto non è possibile trovare **nessuna** soluzione ammissibile duale che sia in scarti complementari con la soluzione primale data, che, quindi, **non** è ottima (ricordiamo che le condizioni di complementarietà primale-duale, che comprendono l'ammissibilità primale e duale, sono condizioni necessarie oltre che sufficienti).

Esercizio 5. Dato il problema

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 8 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\
 & x_1 & , & & & x_3 & & \text{libere} \\
 & & & x_2 & & & \leq & 0
\end{array}$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2, x_3] = [9, -5, 0]$ è ottima.

Soluzione

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia <u>ammissibile</u> e <u>in scarti complementari</u> con la soluzione primale data.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $x_1 + x_2 = 9 - 5 = 4 \leq 4$ (OK)
   $2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \cdot 9 + 5 + 0 = 23 \geq 8$ (OK)
   $x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 + 2 \cdot (-5) - 0 = -1$ (OK)
   $x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 - 5 + 2 \cdot 0 = 4$ (OK)
   $x_2 = -5 \leq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 4u_1 & + & 8u_2 & - & u_3 & + & 4u_4 & & \\
\text{s.t.} & u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & + & u_4 & = & 2 \\
 & u_1 & - & u_2 & + & 2u_3 & + & u_4 & \leq & 1 \\
 & & & u_2 & - & u_3 & + & 2u_4 & = & 0 \\
 & u_1 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & u_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & u_3 & , & u_4 & & \text{libere}
\end{array}$$

3. *Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale*:

   - $u_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \rightarrow u_1(0) = 0 \rightarrow //$;
   - $u_2(2x_1 - x_2 + x_3 - 8) = 0 \rightarrow u_2(15) = 0 \rightarrow u_2 = 0$ (prima condizione);
   - il terzo vincolo primale è di uguaglianza, quindi non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la variabile duale u_3, visto che la condizione $u_3(x_1 + 2x_2 - x_3 + 1) = 0$ vale per ammissibilità primale;
   - il quarto vincolo primale è di uguaglianza, quindi non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la variabile duale u_4, visto che la condizione $u_4(x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) = 0$ vale per ammissibilità primale.

- $u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 = 2$ è un vincolo duale di uguaglianza, per cui non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con x_1, visto che la condizione $(u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 - 2)x_1 = 0$ deriva dall'ammissibilità duale;

  Nota. Se si considerano *erroneamente* le condizioni di complementarietà per questo vincolo duale, avendo $x_1 = 9 \neq 0$, si inserirebbe comunque questo vincolo tra le condizioni utilizzate al punto successivo per determinare una opportuna soluzione duale: siamo in un caso "fortunato", ma il procedimento non è corretto, come risulterà tra poco evidente.

- $(u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 - 1)x_2 = 0 \rightarrow (u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 - 1)(-5) = 0 \rightarrow u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 = 1$ (seconda condizione);

- $u_2 - u_3 + 2u_4 = 0$ è un vincolo duale di uguaglianza, per cui non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con x_3, visto che la condizione $(u_2 - u_3 + 2u_4 - 0)x_3 = 0$ deriva dall'ammissibilità duale.

  Nota. In questo caso, a differenza del precedente, se si considerasse la condizione $(u_2 - u_3 + 2u_4)x_3 = 0$ come condizione di complementarietà, avendo $x_3 = 0$, non si inserirebbe il vincolo duale come equazione da aggiungere al sistema di cui al successivo Punto 4. Se, per giunta, ci si scordasse, sempre nel successivo Punto 4, di considerare la corrispondente equazione derivante dall'ammissibilità duale, si avrebbe un sistema di tre equazioni in quattro incognite. Qualcuno, alla ricerca di un quarto vincolo, potrebbe imporre la dualità forte (inserire cioè un vincolo che sancisca l'uguaglianza tra i valori delle funzioni obiettivo primale e duale): è un procedimento che potrebbe portare a un risultato corretto, ma non risolve l'esercizio nel modo richiesto, cioè con l'applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale.

4. Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$$\begin{cases} u_2 = 0 & \text{(ccpd)} \\ u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 = 1 & \text{(ccpd)} \\ u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 = 2 & \text{(ammiss. duale)} \\ u_2 - u_3 + 2u_4 = 0 & \text{(ammiss. duale)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_1 = 1 - 5u_4 \\ 1 - 5u_4 + 2u_4 + u_4 = 2 \\ u_3 = 2u_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Verifica ammissibilità duale:
la soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 = 2$, $u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 \leq 1$, $u_2 - u_3 + 2u_4 = 0$);
- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 \geq 0, u_2 \leq 0$, u_3, u_4 libere).

6. Conclusioni:
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

- x è ammissibile primale (come da verifica);
- u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
- x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale.

[Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali: $2x_1 + x_2 = 13$ e $4u_1 + 8u_2 - u_3 + 4u_4 = 13$, il ché verifica il Corollario 2 della dualità (all'ottimo, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono).]