

# Laboratorio: Ottimizzazione su reti

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

## Cammino minimo: modello

Variabili decisionali:  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{l'arco } (i,j) \text{ è sul cammino minimo;} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\min \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

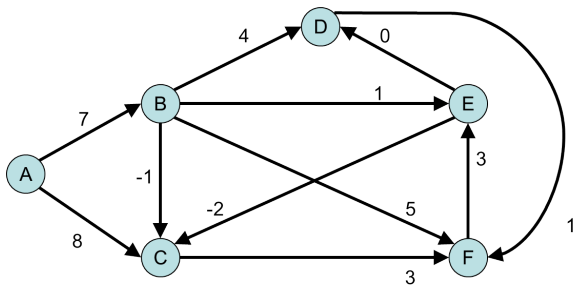
$$\sum_{(i,v) \in A} x_{iv} - \sum_{(v,j) \in A} x_{vj} = \begin{cases} -1, & v = s; \\ +1, & v = d; \\ 0, & v \in N \setminus \{s, d\}. \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \equiv \mathbb{R}_+ \quad \forall (i,j) \in A$$

Caso **particolare MCF**: un nodo domanda  $s$  e un nodo offerta  $d$

## Cammino minimo: esempio

Si determini con AMPL il cammino minimo da A a F nel seguente grafo



# Soluzioni e discussione

## Cammini minimi

- `sp.mod`, `sp.dat` (implementazione con archi espliciti)

## Max hop

- `spH.mod`, `sp.dat`

La matrice dei vincoli non è totalmente unimodulare, ma la soluzione osservata del rilassamento continuo è intera! ( $A$  T.U. e  $b$  intero è condizione sufficiente, non necessaria, di integralità)

Per calcolare il rilassamento continuo: `option relax_integrality 1`

## Cammini minimi vincolati

Ad esempio, sono dati i consumi per tratta  $w_{ij}$  e la disponibilità di carburante nel serbatoio  $W$

- `spW.mod`, `spW.dat`

La soluzione osservata del rilassamento continuo **non** è intera

## Esercizio

Il grafo rappresenta una rete di concessionarie di automobili: i nodi corrispondono alle concessionarie e gli archi alla possibilità di spostare automobili tra concessionarie, con relativi costi per automobile (si consideri il valore assoluto). I nodi C e D hanno ordini che eccedono la disponibilità per rispettivamente 6 e 10 automobili, mentre le altre concessionarie hanno ciascuna un eccesso di 4 automobili. Le bisarche utilizzate permettono di trasferire al massimo sei automobili per ogni coppia. Determinare il piano di trasporti di costo minimo.

**Suggerimento:** *si tratta da un problema di flusso di costo minimo, con quattro nodi offerta e due nodi domanda.*

- `mcf.mod`, `mcf.dat`

**Domanda:** cambierebbe la soluzione se le unità fossero frazionabili?

## Esercizio (Max-Flow)

Si determini, in base alle capacità degli archi, il massimo numero  $maxf$  di unità che possono essere trasferite da A a F.

**Osservazione:** *il problema può essere modellato come un flusso, introducendo un arco fittizio da F ad A cui corrisponde una variabile  $x_{FA}$  che indichiamo con  $y$  e rappresenta la quantità (incognita) da trasferire da A (con bilanciamento  $-y$ ) a F (con bilanciamento  $+y$ ), e considerando come funzione obiettivo la massimizzazione della stessa variabile.*

- `maxf.mod`, `maxf.dat`

**Osservazione:** la soluzione rimane intera se le unità sono frazionabili e risolviamo con il simplesso (la matrice dei vincoli è una matrice di incidenza del grafo con l'arco fittizio e quindi resta totalmente unimodulare)

**Osservazione:** l'interezza del rilassamento continuo si perde con l'introduzione di un vincolo di budget (si osservano soluzioni frazionarie)

# Modello PL per Max Flow

## Variabili

- quantità  $x_{ij}$  da far fluire sull'arco  $(i, j) \in A$
- quantità  $y$  di flusso che esce da  $A$  e arriva in  $F$

max

$y$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,v) \in A} x_{iv} - \sum_{(v,j) \in A} x_{vj} = \begin{cases} -y & \text{se } v = A \\ +y & \text{se } v = F \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in N$$
$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

$$\left[ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \leq \text{budget} \right]$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ (\equiv \mathbb{R}_+) \quad [\neq \mathbb{R}_+]$$