Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome, Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Esercizio 1: Segnali a tempo continuo, 7 punti

Siano dati i segnali di variabile reale $x(t) = e^{-3t}u(t)$ e $y(t) = e^{-2t}u(t)$, dove $u(t)$ è la funzione gradino.

1. Determinare il supporto di x e y.
2. Calcolare le norme in $\mathcal{L}^1$ e in $\mathcal{L}^2$ di x e y, ricordando che la norma in $\mathcal{L}^p$ di un segnale $w(t)$ è $\|w\|_p = \left|\int_{\mathbb{R}} |w(t)|^p \, dt\right|^{\frac{1}{p}}$.
   Suggerimento: Determinare la funzione $f : a \in \mathbb{R}^+ \to \int_0^{+\infty} e^{-at} \, dt$, ed usarla per calcolare le 4 norme richieste.
3. Dire se x e y appartengono ad uno o più degli spazi $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, con $p \in \{1, 2, \infty\}$.
4. Calcolare $h(t) = x * y\,(t)$ (convoluzione di x e y).
5. Consideriamo un sistema LTI $\mathcal{S}$ la cui risposta impulsiva è il segnale h calcolato al punto precedente. Discutere la stabilità e la causalità di tale sistema, e determinarne la risposta in frequenza.
6. Determinare l'uscita del sistema $\mathcal{S}$ definito al punto precedente quando l'ingresso è $2\cos(3t)$

Soluzione dell'esercizio 1

1. Il supporto di x e y è $\mathbb{R}^+$.
2. Posto, per $a \in \mathbb{R}^+$, $f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \, dt$, si osserva immediatamente che $f(a) = \frac{1}{a}$ e che:

$$\|x\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-3t} \, dt = f(3) = \frac{1}{3} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-6t} \, dt} = \sqrt{f(6)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\|y\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \, dt = f(2) = \frac{1}{2} \qquad \|y\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-4t} \, dt} = \sqrt{f(4)} = \frac{1}{2}$$

3. Al punto precedente abbiamo visto che le norme dei 2 segnali in $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ esistono finite, quindi i segnali appartengono ad entrambi gli spazi. Inoltre per entrambi i segnali è evidente che

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} x = \sup_{t \in \mathbb{R}} y = 1,$$

   quindi entrambi i segnali appartengono anche a $\mathcal{L}^\infty$.

4. Per il calcolo di h si può lavorare nel dominio del tempo, di Fourier o di Laplace. Vediamo le tre soluzioni (equivalenti).

   Cominciamo con il dominio del tempo. Per prima cosa osserviamo che, siccome i supporti di x e y sono entrambi $(0, +\infty)$, anche il supporto di h è $(0, +\infty)$. Allora calcoliamo l'integrale di convoluzione

unicamente per $t > 0$:

$$\forall t > 0,\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau} u(\tau) e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau$$
$$= e^{-2t} \left[-e^{-\tau}\right]_0^t == e^{-2t}\left(-e^{-t}+1\right) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Quindi $h(t) = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) u(t)$

Con la TL si ha:

$$X(s) = \frac{1}{3+s} \qquad\qquad Y(s) = \frac{1}{2+s}$$
$$H(s) = \frac{1}{(3+s)(2+s)} = \frac{A}{3+s} + \frac{B}{2+s}$$
$$A = (3+s)\ H(s)\big|_{s=-3} = -1 \qquad\qquad B = (2+s)\ H(s)\big|_{s=-2} = 1$$
$$H(s) = \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3+s} \qquad\qquad h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

Si arriva esattemente allo stesso risultato con la TFtC, dove formalmente il termine $j\omega$ rimpiazza s.

5. Un sistema $\mathcal{S}$ con risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$ è evidentemente causale. Ci sono diversi modi per verificare la stabilità di $\mathcal{S}$, il più semplice consiste nell'orsservare che la convoluzione di due segnali $x, y \in \mathcal{L}^1$ è anch'essa in $\mathcal{L}^1$.

   Inoltre $H(\omega) = X(\omega)Y(\omega) = \frac{1}{(3+j\omega)(2+j\omega)}$

6. Sappiamo che un LTI risponde ad un ingresso sinusoidale $A\cos\left[\omega_0 t + \phi\right]$ alterandone l'ampiezza e la fase:

$$y(t) = h * x(t) = \left|H(\omega_0)\right| A \cos\left[\omega_0 t + \phi + \angle H(\omega_0)\right]$$

   In questo caso abbiamo:

$$A = 2 \qquad \omega_0 = 3 \qquad \phi = 0$$
$$H(\omega_0) = \frac{1}{(3+j3)(2+j3)} = -\frac{1}{78} - j\frac{5}{78}$$
$$\left|H(\omega_0)\right| = \frac{\sqrt{26}}{78} \approx 0.0654$$
$$\angle H(\omega_0) = -\pi + \arctan 5$$
$$y(t) = -\frac{\sqrt{26}}{39}\cos\left(3t + \arctan 5\right) \approx -0.1307\cos(3t - 1.373)$$

Esercizio 2: Sistemi a tempo continuo, 7 punti

Il sistema LTI $\mathcal{S}$ ha risposta impulsiva $h(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. Il segnale $x(t)$ a valori reali è di tipo passa-banda, con spettro $X(\omega)$ contenuto in $(-\omega_b, -\omega_a) \bigcup (\omega_a, \omega_b)$

1. Discutere la causalità di $\mathcal{S}$.
2. Determinare la banda di h (cioè il supporto della sua trasformata di Fourier) in funzione del parametro $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.
3. Ricordando che se un segnale appartiene a $\mathcal{L}^1$ allora la sua TFtc è continua, mostrare che S non è stabile.
4. Supponiamo per il seguito che $\omega_0 < \omega_a$. Calcolare l'uscita del sistema $\mathcal{S}$ quando l'ingresso è x.

5. Supponiamo che $\omega_b - \omega_a = \omega_0$. Sia poi $h_1(t) = Ah(t)\cos(\omega_m t)$ Trovare A e ω_m tali che il segnale x non è modificato da un sistema con risposta impulsiva pari a h_1, e cioè che $h_1 * x = x$.

Soluzione dell'esercizio 2

1. S è non causale perché la sua RI ha supporto per t positivi e negativi.

2. $$\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}(t), t, \omega\right] = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad \mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right), t, \omega\right] = T\mathrm{rect}\left(T\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

   Quindi la banda di x è $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$

3. Siccome $H(\omega)$ è discontinua, $h \notin \mathcal{L}^1$ e quindi S non è stabile.

4. Se $\omega_0 < \omega_a$, gli spettri di x e h sono disgiunti, per cui il loro prodotto è nullo. Ciò significa che $S[x] = x * h = 0$ (funzione identicamente nulla).

5. h_1 è la modulazione di h, quindi il suo spettro è traslato di $\pm\omega_m$. Se $\omega_m = \frac{\omega_a+\omega_b}{2}$, i supporti degli spettri di x e h coincidono. Basterà imporre che in tale supporto, $H_1(\omega) = 1$. Siccome $H_1(\omega) = \frac{1}{2}\left[H(\omega-\omega_m) + H(\omega+\omega_m)\right]$, il valore di H_1 nel supporto è $A\frac{\pi}{\omega_0}$, quindi bisognerà imporre $A = \frac{\omega_0}{\pi} = 2/T$. In conclusione,

   $$\omega_m = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \qquad\qquad A = \frac{\omega_0}{\pi} = \frac{2}{T}$$

Esercizio 3: Funzione di trasferimento, 7 punti

Sia $H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-15}$ la funzione di trasferimento di un sistema LTI causale $\mathcal{S}$.

1. Qual è la regione di convergenza (ROC) di $H(s)$?
2. Si dica se il sistema $\mathcal{S}$ è stabile, motivando la risposta
3. Si determini l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di cui $\mathcal{S}$ è l'LTI causale associato.
4. Determinare la risposta indiciale di $\mathcal{S}$ (cioè l'uscita corrispondente ad un ingresso a gradino).

Soluzione dell'esercizio 3

1. Siccome il sistema è causale, la ROC è un semipiano destro. In questo caso è l'insieme dei numeri complessi a parte reale maggiore di 3.

2. I poli della funzione H sono 3 e -5. La presenza di un polo a parte reale positiva implica la non stabilità

3. $$y'' + 2y' - 15y = x' - x$$

4.

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s-1}{s(s-3)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+5} \\
A &= s\,Y(s)|_{s=0} = \frac{-1}{-3\cdot 5} = \frac{1}{15} \\
B &= (s-3)\,Y(s)|_{s=3} = \frac{2}{3\cdot 8} = \frac{1}{12} \\
C &= (s+5)\,Y(s)|_{s=-5} = \frac{-6}{-5\cdot -8} = -\frac{3}{20} \\
Y(s) &= \frac{1}{15}\frac{1}{s} + \frac{1}{12}\frac{1}{s-3} - \frac{3}{20}\frac{1}{s+5} \\
y(t) &= \frac{1}{15}u(t) + \frac{1}{12}e^{3t}u(t) - \frac{3}{20}e^{-5t}u(t)
\end{aligned}$$

Domanda teorica 1 : TFtd e TFD, 4 punti

1. Mostrare che utilizzando la Trasformata di Fourier Discreta e lo *zero-padding* è possibile ottenere una rappresentazione discreta della trasformata di Fourier a tempo discreto (TFtd) di un segnale $x(n)$ a supporto finito in $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ con risoluzione arbitrariamente fine.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : Campionamento, 4 punti

Ricordare l'enunciato del teorema del campionamento di Shannon e la formula d'interpolazione ideale nel caso di passo di campionamento generico T_C. Ricordare la formula della frequenza di Nyquist ed il suo utilizzo nel progetto di un convertitore analogico/digitale.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 4 punti

Si consideri il segnale $x(t) = A\cos(\omega t)\mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(-5, 5)$ campionato a passo $\Delta = 10^{-3}$, con $A = 1$, $T = 4$, $\omega = 5$
2. Tracci in una figura l'andamento di $x(t)$ nel suddetto intervallo.
3. Usando la FFT, tracci in una figura l'andamento del modulo della trasformata di Fourier di x nell'intervallo di valori di pulsazione $(-10\pi, 10\pi)$. È importante identificare correttamente la scala delle pulsazioni. Per il calcolo della FFT, usare un opportuno zero-padding.

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
%% 4.1
rect = @(t) abs(t)<1/2;
Delta = 1e-3;
t = -5:Delta:5;
```

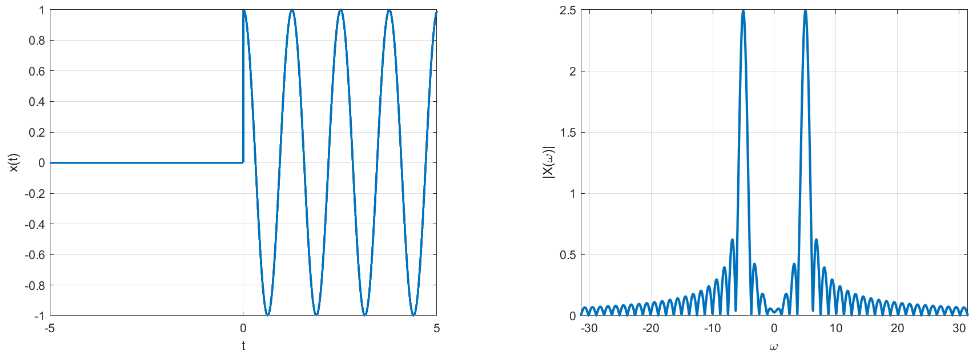

Figura 1: I grafici prodotti dallo script

```
A=1; T=4; omega = 5;
x= A*cos(omega*t).*rect((t-T)/(2*T));

%% 4.2
figure(1);
h=plot(t,x,'LineWidth',2);
grid; xlabel('t'); ylabel('x(t)')

%% 4.3
M=2^(3+nextpow2(numel(t))); % Zero-padding
X = Delta*fftshift(abs(fft(x,M))); % Stima TFtd
figure(2);
omega0 = pi/Delta; % massima pulsazione
step = 2*omega0/M; % passo di campionamento di omega
w = -omega0:step:(omega0-step); % asse pulsazioni
plot(w,X,'LineWidth',2);
grid; xlabel('\omega'); ylabel('|X(\omega)|')
xlim([-10*pi 10*pi]); % Visualizzazione dell'intervallo richiesto
```