

## SEGNALI E SISTEMI

Prof.ssa C. Dalla Man e Prof. Tomaso Erseghe (a.a. 2020-2021)

Autovalutazione – maggio 2021

### SOLUZIONI

#### Esercizio 1 – [punti 7]

Sia dato il sistema

$$y(n) = x(n-2) + \sum_{k=-\infty}^{-n-5} \frac{1}{3^{n-k}} x(k)$$

1. Dire se il sistema è statico, causale, lineare, tempo-invariante
2. Calcolare la risposta impulsiva
3. Dire se il sistema è BIBO stabile

Gustificare le risposte.

#### Soluzione

1. Il sistema non è statico poichè per calcolare  $y(n)$  non è sufficiente conoscere  $x(n)$ ; non è causale perchè per  $-n-5 \geq n$ , ovvero  $n \leq -\frac{5}{2}$ , ovvero  $n < -3$ , per calcolare l'uscita all'istante  $n$  è necessario conoscere l'ingresso ad istanti futuri; il sistema è ovviamente lineare; il sistema non è tempo-invariante infatti

$$y(n-n_0) = x(n-n_0-2) + \sum_{k=-\infty}^{-n+n_0-5} \frac{1}{3^{n-n_0-k}} x(k)$$

mentre l'ingresso  $x(n-n_0)$  produce l'uscita

$$x(n-n_0-2) + \sum_{k=-\infty}^{-n-5} \frac{1}{3^{n-k}} x(k-n_0) = x(n-n_0-2) + \sum_{m=-\infty}^{-n-5-\textcolor{red}{n_0}} \frac{1}{3^{n-m-n_0}} x(m)$$

in cui la differenza è evidenziata in rosso.

2. La risposta impulsiva risulta

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n-2) + \sum_{k=-\infty}^{-n-5} \frac{1}{3^{n-k}} \delta(k) \\ &= \delta(n-2) + \begin{cases} 0 & n > -5 \\ \frac{1}{3^n} & n \leq -5 \end{cases} \\ &= \delta(n-2) + \frac{1}{3^n} 1_0(-n-5) \end{aligned}$$

3. Il sistema non è BIBO stabile, infatti la risposta impulsiva diverge a tempi negativi.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Sia dato un sistema LTI con le seguenti caratteristiche:

1. il sistema è di secondo ordine con poli reali e funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{(s+a)(s+3)}$$

con  $a$  parametro reale;

2. il sistema è BIBO stabile;
3. la risposta in regime permanente al segnale  $x(t) = \mathbf{1}(t)$  è  $y(t) = \frac{1}{3}$ .

Si chiede di:

1. Identificare la risposta al gradino  $h_{-1}(t)$  in funzione del parametro  $a$ ;
2. Identificare il valore di  $a$ ;
3. Scrivere l'equazione differenziale associata al sistema.

**Soluzione** L'uscita del sistema all'ingresso  $x(t) = \mathbf{1}(t)$  è

$$H_{-1}(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+3)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+a} + \frac{R_2}{s+3}$$

con  $a > 0$  per la BIBO stabilità, e con  $R_0 = 1/3a$ ,  $R_1 = 1/[a(a-3)]$ ,  $R_2 = 1/[3(3-a)]$ . Nel dominio del tempo si ha

$$h_{-1}(t) = R_0 \mathbf{1}(t) + R_1 e^{-at} \mathbf{1}(t) + R_2 e^{-3t} \mathbf{1}(t)$$

e pertanto la risposta in regime permanente è  $R_0 \mathbf{1}(t)$ . Deve pertanto valere

$$R_0 = \frac{1}{3a} = \frac{1}{3} \implies a = 1$$

il che assicura

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)}$$

da cui l'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x(t) .$$

**Esercizio 3 – [punti 3]**

Sa dato un filtro discreto avente funzione di trasferimento definita come

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0 & |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ e^{j\theta} & \frac{\pi}{2} < |\theta| < \frac{3\pi}{4} \\ 2 & \frac{3\pi}{4} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

nel periodo  $[-\pi, \pi]$ . Si calcoli la risposta  $y(n)$  del sistema all'ingresso

$$x(n) = \sin(\frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{7}) + \cos(\frac{5}{8}\pi n - \frac{5}{8}\pi) + \sin(\frac{7}{8}\pi n) + \cos(\frac{9}{5}\pi n)$$

**Soluzione** Ricordiamo che la risposta di un filtro discreto (con  $H(e^{j\theta})$  a simmetria Hermitiana) ad una sinusoide  $\cos(\theta_0 n + \varphi_0)$  è del tipo

$$|H(\theta_0)| \cos(\theta_0 n + \varphi_0 + \arg(H(\theta_0)))$$

Osservando inoltre le fasi delle componenti del segnale  $x(n)$  troviamo che

$$\begin{aligned} \theta_0 = \frac{2}{5}\pi &\implies |H(\theta_0)| = 0 \\ \theta_0 = \frac{5}{8}\pi &\implies |H(\theta_0)| = 1, \arg(H(\theta_0)) = \frac{5}{8}\pi \\ \theta_0 = \frac{7}{8}\pi &\implies |H(\theta_0)| = 2, \arg(H(\theta_0)) = 0 \\ \theta_0 = \frac{9}{5}\pi &\implies |H(\theta_0)| = 0 \end{aligned}$$

in cui l'ultima equivalenza deriva dalla periodicità, ed infatti  $\frac{9}{5}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{5}$ . Pertanto

$$y(n) = \cos(\frac{5}{8}\pi n) + 2\sin(\frac{7}{8}\pi n)$$

**Esercizio 4 – [punti 7]**

Sia dato il segnale

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + t & |t| < \frac{1}{2} \\ 1 & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si chiede di:

1. Disegnare il segnale, quindi calcolare la trasformata di Fourier  $X(j\omega)$ .
2. Dire per quali valori del passo di campionamento  $T$  il segnale è ricostruibile esattamente dai propri campioni.
3. Calcolare l'uscita  $y(t)$  se il segnale è dato in ingresso ad un filtro con risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{1}{8\pi}\omega\right)\omega^2 .$$

**Soluzione** 1) Procediamo tramite regola di derivazione osservando che

$$z(t) = x'(t) = \text{rect}(t) , \quad Z(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right) , \quad m_x = \frac{1}{2} .$$

Pertanto

$$X(j\omega) = \frac{Z(j\omega)}{j\omega} + 2\pi m_x \delta(\omega) = \frac{2 \sin(\frac{1}{2}\omega)}{j\omega^2} + \pi \delta(\omega)$$

- 2) La risposta è per nessun  $T$  in quanto il segnale ha banda illimitata.
- 3) Si ottiene

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) \\ &= -2j \sin\left(\frac{1}{2}\omega\right) \text{rect}\left(\frac{1}{8\pi}\omega\right) \\ &= \text{rect}\left(\frac{1}{8\pi}\omega\right) e^{-j\frac{1}{2}\omega} - \text{rect}\left(\frac{1}{8\pi}\omega\right) e^{j\frac{1}{2}\omega} \end{aligned}$$

e pertanto

$$y(t) = 4\text{sinc}(4t - 2) - 4\text{sinc}(4t + 2)$$