SEGNALI E SISTEMI
Terzo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2021-2022)
2 settembre 2022
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Sia dato il segnale periodico

$$x(t) = 2e^{j4t} + \sin(3t+1) + e^{-j9t} - 2\cos(t-10)$$

1. Calcolarne il periodo fondamentale [1 punto]
2. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier X_k [2 punti]
3. Proporre un filtro che sollecitato con l'ingresso $x(t)$ restituisca il segnale $y(t) = 2\sin(3t+1)$. Si chiede di fornire un'espressione analitica sia per la risposta in pulsazione $H(j\omega)$ che per la risposta impulsiva $h(t)$ [3+1 punti]

Soluzione

1. I periodi delle singole componenti sono $T_1 = \frac{\pi}{2}$, $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, $T_3 = \frac{2\pi}{9}$ e $T_4 = 2\pi$, pertanto si ha $T_p = 2\pi$.
2. Ricordando che la pulsazione di riferimento è $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = 1$ e riscrivendo il segnale nella forma

$$x(t) = 2e^{j4t} + \frac{e^j}{2j}e^{j3t} - \frac{e^{-j}}{2j}e^{-j3t} + e^{-j9t} - e^{-10j}e^{jt} - e^{10j}e^{-jt}$$

per ispezione si ha

$$x(t) = \sum_k X_k e^{jkt}\ , \qquad X_k = \begin{cases} -e^{-10j} & k=1 \\ -e^{10j} & k=-1 \\ \frac{e^j}{2j} & k=3 \\ -\frac{e^{-j}}{2j} & k=-3 \\ 2 & k=4 \\ 1 & k=-9 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Il filtro dovrà amplificare di un fattore 2 le sole pulsazioni ± 3 e cancellare le altre, ad esempio

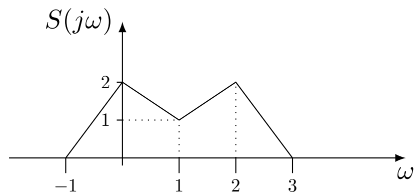
$$H(j\omega) = 2\,\mathrm{rect}(\omega-3) + 2\,\mathrm{rect}(\omega+3)$$

con

$$h(t) = \tfrac{2}{\pi}\,\mathrm{sinc}(t/2\pi)\cos(3t)\ .$$

Esercizio 2 – [punti 7]

Sia data la trasformata di Fourier $S(j\omega)$ rappresentata in figura



1. Calcolare il segnale $s(t)$ [5 punti].
2. Il segnale $s(t)$ si può ricostruire a partire dai suoi campioni $s(n)$ campionati a passo $T = 1$? Argomentare appropriatamente la risposta. [2 punti]

Soluzione

1. Si può procedere in vari modi, ma il più diretto è osservare che il segnale $S(j\omega)$ è la differenza tra un trapezio ed un triangolo, ovvero

$$x(t) = \underbrace{2\,\mathrm{rect} * \underset{3}{\mathrm{rect}}(\omega - 1)}_{\text{trapezio}} - \mathrm{triang}(\omega - 1)$$

in cui il trapezio è espresso come una convoluzione tra rettangoli in cui il secondo rettangolo ha base 3. Pertanto, antitrasformando si ha

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2\pi})\left[\frac{6}{2\pi}\mathrm{sinc}(\tfrac{3t}{2\pi}) - \mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2\pi})\right]e^{jt}$$

2. La trasformata ha estensione $[-1, 3]$ di misura 4, e pertanto il teorema del campionamento richiede $T \leq \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1.5708$. Il segnale è quindi ricostruibile utilizzando il passo di campionamento $T = 1$. Se come riferimento si prende la banda simmetrica $[-3, 3]$ di misura 6 il segnale risulta comunque ricostruibile in quanto $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 1.0472$.

Esercizio 3 – [punti 7]

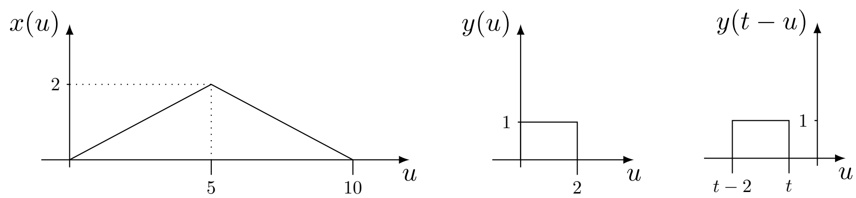
Siano dati i segnali a tempo continuo

$$x(t) = 2 \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t-5}{5})\,, \qquad y(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{t-1}{2})$$

Dopo aver disegnato i segnali si chiede di:

1. calcolare la convoluzione $z(t) = x(t) * y(t)$ [5 punti];
2. calcolare l'area A_z di $z(t)$ [1punto];
3. dire se il sistema LTI con risposta impulsiva $z(t)$ è causale e motivare la risposta [1punto].

Soluzione I segnali sono illustrati in figura.



Notiamo inoltre che il segnale $x(t)$ si può riscrivere come:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2t}{5} & 0 < t < 5 \\ 4 - \frac{2t}{5} & 5 < t < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Osservando la figura possiamo dire che:
   - $z(t)$ è nullo per $t < 0$ e $t > 12$;
   - per $0 < t < 2$ si ha $z(t) = \int_0^t \frac{2\tau}{5} d\tau = \frac{1}{5}t^2$;
   - per $2 < t < 5$ si ha $z(t) = \int_{t-2}^t \frac{2\tau}{5} d\tau = \frac{4}{5}(t-1)$;
   - per $5 < t < 7$ si ha $z(t) = \int_{t-2}^5 \frac{2\tau}{5} d\tau + \int_5^t (4 - \frac{2\tau}{5}) d\tau = \frac{1}{5}(24t - 54 - 2t^2)$;
   - per $7 < t < 10$ si ha $z(t) = \int_{t-2}^t (4 - \frac{2\tau}{5}) d\tau = \frac{4}{5}(11-t)$;
   - per $10 < t < 12$ si ha $z(t) = \int_{t-2}^{10} (4 - \frac{2\tau}{5}) d\tau = \frac{1}{5}(144 - 24t + t^2)$.
2. Per la regola dell'area si ha
$$A_z = A_x A_y = 10 \cdot 2 = 20 \ .$$
3. Il segnale $z(t)$ ha supporto in $[0, 12]$, da cui segue che il sistema LTI con risposta impulsiva $z(t)$ è causale.

Esercizio 4 – [punti 3]

Dato il sistema a tempo discreto, LTI e causale, descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$3y(n) + 5y(n-1) - 2y(n-2) = 3x(n) + 3x(n-1)$$

si chiede di:

1. trovare la funzione di trasferimento;
2. dire se il sistema è BIBO stabile motivando la risposta

Soluzione

1. La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{3+3z^{-1}}{3+5z^{-1}-2z^{-2}} = \frac{3(1+z^{-1})}{(1+2z^{-1})(3-z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

2. I poli si trovano in $z = -2$ e $z = \frac{1}{3}$. Il polo in $z = -2$ non ha modulo strettamente minore di 1 perció il sistema non è BIBO stabile.

Esercizio 5 – [punti 3]

Dato il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \begin{cases} \mathrm{sign}[1/x(n)] & \text{se } x(n) \neq 0 \\ 0 & \text{se } x(n) = 0 \end{cases}$$

dire se è causale, BIBO stabile, lineare, motivando opportunamente le risposte.

Soluzione

1. Il sistema è istantaneo e pertanto causale.
2. L'uscita del sistema ha solo tre possibili valori $\{-1, 0, 1\}$ e pertanto l'uscita è sempre limitata, per cui il sistema è BIBO stabile.
3. Il sistema non è lineare in quanto la funzione segno non lo è, e neppure la funzione $1/x$.

Esercizio 6 – [punti 3]

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(f)$ in corrispondenza delle frequenze `f=F*(-N/2:N/2-1)` in cui il passo di campionamento `F` sia dato.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
T = 1/(N*F); % passo di campionamento nel tempo
x = ifft(fftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```