SEGNALI E SISTEMI
Secondo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2021-2022)
13 luglio 2022
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Sia dato il segnale

$$x(n) = \cos(\tfrac{\pi}{8}n)$$

in ingresso ad un filtro con risposta impulsiva $h(n) = 2^{-n}1_0(n)$.

1. calcolare la trasformata di Fourier $X(e^{j\theta})$ [2 punti];
2. calcolare l'uscita $y(n)$ del filtro [3 punti];
3. calcolare l'uscita del filtro $z(n)$ se l'ingresso è $x(n) + \mathrm{triangle}(n-1)$ (si suggerisce di disegnare $\mathrm{triangle}(n-1)$) [2 punti].

Soluzione

1. utilizzando la trasformata notevole del coseno si ha

   $$X(e^{j\theta}) = \pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta-\tfrac{\pi}{8})+\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta+\tfrac{\pi}{8}) = \pi\,\mathrm{rep}_{2\pi}\delta(\theta-\tfrac{\pi}{8})+\pi\,\mathrm{rep}_{2\pi}\delta(\theta+\tfrac{\pi}{8});$$

2. utilizzando la regola di filtraggio di un coseno con

   $$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}e^{-j\theta n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

   si ha

   $$y(n) = |H_0|\cos(\tfrac{\pi}{8}n + \angle H_0)$$

   con $H_0 = H(e^{j\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{8}}$.

3. disegnando $\mathrm{triangle}(n-1)$ si nota che

   $$\mathrm{triangle}(n-1) = \delta(n-1)$$

   da cui, ricordando la proprietà di convoluzione della delta traslata e la linearità della convoluzione,

   $$z(n) = |H_0|\cos(\tfrac{\pi}{8}n + \angle H_0) + 2^{-(n-1)}1_0(n-1)$$

   sempre con $H_0 = H(e^{j\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{8}}$.

Esercizio 2 – [punti 7]

Il segnale

$$x(t) = \cos(2t) + \sin(\tfrac{\pi}{3}t)$$

viene campionato con passo di campionamento $T_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 4$, e poi interpolato con filtro interpolatore passa basso ideale (=1 in banda passante), con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{5}{2}$.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$ [1 punto].
2. Trovare l'uscita del filtro interpolatore $x_r(t)$[4 punti].
3. Proporre, se possibile, un filtro che permetta la ricostruzione esatta di $x(t)$ a partire da $x_r(t)$ [2 punti].

Soluzione

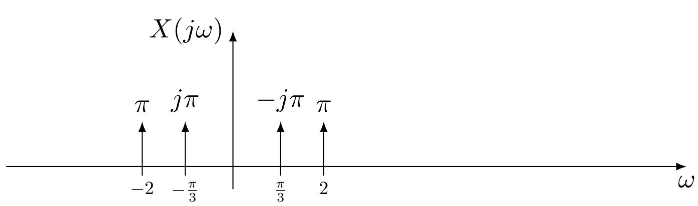
1. La trasformata di Fourier è

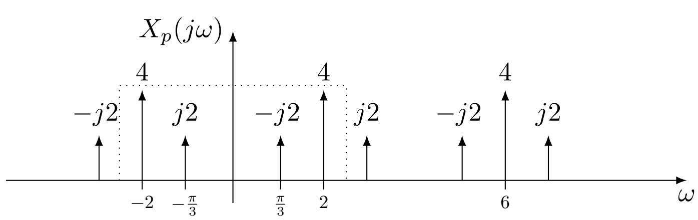
$$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)] + \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \tfrac{\pi}{3}) - \delta(\omega + \tfrac{\pi}{3})]$$

2. Campionamento ed interpolazione assicurano, in pulsazione, la relazione

$$X_r(j\omega) = H(j\omega) \cdot \frac{1}{T_s} \operatorname*{rep}_{\omega_s} X(j\omega) = H(j\omega) \cdot \underbrace{\frac{2}{\pi} \operatorname*{rep}_{4} X(j\omega)}_{X_p(j\omega)}$$

in cui





e pertanto

$$X_r(j\omega) = 4[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)] + \tfrac{2}{j}[\delta(\omega-\tfrac{\pi}{3}) - \delta(\omega+\tfrac{\pi}{3})]$$

da cui

$$x_r(t) = \tfrac{4}{\pi}\cos(2t) + \tfrac{2}{\pi}\sin(\tfrac{\pi}{3}t)\ .$$

3. Deve essere $H(j2) = H(-j2) = \frac{\pi}{4}$ e $H(j\frac{\pi}{3}) = H(-j\pi 3) = \frac{\pi}{2}$

Esercizio 3 – [punti 7]

Sia data la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1}{z^{-2}-1}$$

1. Scrivere l'equazione alle differenze associata [1 punto]
2. Dire se il sistema descritto è BIBO stabile [1 punto]
3. Calcolare la risposta impulsiva $h(n)$ [2 punti]
4. Calcolare l'ingresso $x(n)$ che garantisce una risposta forzata $y_f(n) = 1_0(n)$ [3 punti]

Soluzione

1. L'equazione alle differenze associata è $x(n) = y(n-2) - y(n)$.
2. I poli del sistema sono ± 1 che appartengono al cerchio di raggio unitario e pertanto il sistema NON è BIBO stabile.
3. Si ha

$$H(z) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{z^{-1}-1} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{z^{-1}+1}$$

e pertanto

$$h(n) = -\tfrac{1}{2}[1+(-1)^n]\,1_0(n) = \begin{cases} -1 & n \geq 0, \text{ pari} \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

4. Abbiamo

$$X(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \frac{z^{-2}-1}{1-z^{-1}} = -1 - z^{-1}$$

e pertanto $x(n) = -\delta(n) - \delta(n-1)$.

Esercizio 4 – [punti 3]

Dire se il sistema a tempo continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau)e^{t-\tau} d\tau + x(t+1)$$

è lineare e tempo invariante e, se sì, scriverlo come convoluzione.

Soluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot [e^{t-\tau}\mathbf{1}(t-1-\tau) + \delta(t+1-\tau)]d\tau$$

Quindi è LTI e si ha

$$y(t) = x(t) * [e^t\mathbf{1}(t-1) + \delta(t+1)]$$

Esercizio 5 – [punti 3]

Dire se il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (j)^k \cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

è reale.

Soluzione

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

è reale $\iff$ $a_{-k} = a_k^*$. Ora,

$$a_{-k} = (j)^{-k} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{-k} = e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$a_k^* = (e^{jk\frac{\pi}{2}})^* = e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

Quindi $x(t)$ è reale.

Esercizio 6 – [punti 3]

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per calcolare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```