SEGNALI E SISTEMI
Primo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2021-2022)
24 giugno 2022
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Sia dato il segnale

$$x(t) = \cos(4t + 5) + 2e^{j3t} + 5e^{-j9t} + 4\sin(5t + 1)$$

in ingresso ad un filtro con risposta in pulsazione $H(j\omega) = j\omega\,\mathrm{rect}(\omega/9)$.

1. Dire se il filtro in questione è reale [1 punto]
2. Calcolare l'uscita $y(t)$ del filtro [3 punti]
3. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [3 punti]

Soluzione

1. Il filtro è reale, in quanto $H(j\omega)$ ha simmetris hermitiana
$$H(-j\omega) = -j\omega\,\mathrm{rect}(\omega/9) H^*(j\omega)\ .$$
2. Il filtro è un filtro derivatore che elimina le pulsazioni maggiori di 4.5, pertanto
$$y(t) = -4\sin(4t + 5) + 6je^{j3t}$$
3. Per la regola di derivazione in frequenza si ha
$$h(t) = \frac{d[\frac{9}{2\pi}\mathrm{sinc}(\frac{9}{2\pi}t)]}{dt} = (\tfrac{9}{2\pi})^2\mathrm{sinc}'(\tfrac{9}{2\pi}t)$$

Esercizio 2 – [punti 7]

Sia data la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s}$$

1. Scrivere l'equazione differenziale associata [1 punto]
2. Dire se il sistema descritto è BIBO stabile [1 punto]
3. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [2 punti]
4. Calcolare l'ingresso $x(t)$ che garantisce una risposta forzata $y_f(t) = \sin(t)1(t)$ [3 punti]

Soluzione

1. Per ispezione si ha
$$x(t) = y''(t) - y'(t) \ .$$

2. i poli del sistema sono $p_1 = 0$ e $p_2 = 1$, pertanto il filtro non è BIBO stabile.

3. Per antitrasformata si ha
$$H(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$
pertanto $h(t) = e^t \, 1(t) - 1(t)$.

4. Nel dominio di Laplace si ha
$$X(s) = \frac{Y_f(s)}{H(s)} = \frac{s^2 - s}{s^2+1} = 1 - \frac{s+1}{s^2+1}$$
che antitrasformato ritorna
$$x(t) = \delta(t) - \cos(t)1(t) - \sin(t)1(t)$$

Esercizio 3 – [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione:

$$y(n) = a^n \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)a^{-k} \qquad a \in \mathbf{C}$$

1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante, BIBO stabile e motivare le risposte [5 punti].

2. Trovare la risposta impulsiva [2 punti].

Soluzione

1.
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)a^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)a^{n-k}\mathbf{1}(n-k) = x(n) * a^n\mathbf{1}(n)$$
Per cui il sistema non è statico, è LTI, è causale poichè $h(n) = a^n\mathbf{1}(n)$ è identicamente uguale a zero per gli $n < 0$, è BIBO stabile solo per $|a| < 1$

2. $h(n) = a^n\mathbf{1}(n)$

Esercizio 4 – [punti 3]

Dati i segnali a tempo discreto $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$ e $y(n) = \delta(n-1) - \delta(n)$

1. Trovare $x(n) * y(n)$ [2 punti]
2. Dato $w(n) = x(n) * h(n) = -\delta(n+1) + 2\delta(n) - \delta(n-1)$, trovare $h(n)$ [1 punto]

Soluzione

1.
$$\begin{aligned} z(n) &= [\delta(n) - \delta(n-1)] * [-\delta(n) + \delta(n-1)] \\ &= -\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-1) - \delta(n-2) \\ &= -\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) \end{aligned}$$

2. Poiché $w(z) = z(n+1)$, $h(n) = y(n+1) = -\delta(n+1) + \delta(n)$

Esercizio 5 – [punti 3]

Il segnale
$$x(t) = \sin(2t) + \cos(\tfrac{\pi}{3}t)$$
viene campionato con passo di campionamento $T_s = \frac{2\pi}{3}$, con $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 3$. Dire se è possibile ricostruire esattamente il segnale dai campioni utilizzando il Teorema del campionamento in banda base e motivare la risposta.

Soluzione La trasformata di Fourier del segnale è

$$X(j\omega) = \tfrac{\pi}{j}[\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)] + \pi[\delta(\omega - \tfrac{\pi}{3}) + \delta(\omega + \tfrac{\pi}{3})]$$

La banda è quindi $\omega_m = 2$ rad/s. Poichè $\omega_s = 3 < 2\omega_m = 4$, il segnale non è ricostruibile esattamente dai campioni.

Esercizio 6 – [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, presi con passo di campionamento `T`, siano rappresentati in MatLab dal vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate (o in alternativa $X(f)$ e le frequenze associate), quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
fx = (0:Nx-1)/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(fx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```