Segnali e Sistemi

Cognome Nome	
Matricola	

Tempo: 2,5 ore
Nessun documento ammesso

Istruzioni Riempire i campi Cognome Nome e Matricola su questo foglio. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Mettere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio del compito. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare lo schizzo di un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare il compito (senza "brutta copia") e questo formulario.

Esercizio 1: Elaborazione di segnali a tempo discreto, 7 punti

Sia $u(n)$ la sequenza gradino discreta (cioè $u(n) = 0$ per $n < 0$ e $u(n) = 1$ per $n \geqslant 0$). Siano inoltre definiti i seguenti segnali:

$$x_1 = u(n) - u(11 - n) \qquad x_2(n) = (n + 1) \cdot x_1(n) \qquad y(n) = x_1 * x_2(n)$$

1. Quale di questi segnali è in $\ell^1(\mathbb{Z})$, in $\ell^2(\mathbb{Z})$, in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$?
2. Qual è il supporto di ognuno dei segnali?
3. Tracciare uno schizzo dei segnali x_1 e x_2
4. Mostrare che la DTFT del segnale a tempo discreto $w(n) = \mathrm{rect}_N(n)$ (impulso rettangolare discreto, non nullo da $-N$ a N) è $W(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$
5. Calcolare $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $Y(\omega)$, eventualmente espressi in termini di $W(\omega)$ e $W'(\omega)$ (non si richiede il calcolo esplicito di quest'ultima funzione)

Soluzione dell'esercizio 1

1. $x_1(n)$ è limitato, per cui appartiene a $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Invece $x_2(n)$ è illimitato e non appartiene a nessuno dei tre spazi. Similmente per $y(n)$.
2. x_1 è nullo solo tra 0 e 11, e lo stesso vale per $x_2(n)$. Quindi anche y ha supporto infinito.
3. Si veda Fig. 1.
4. Si trova:

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N}\sum_{n=0}^{2N} e^{j\omega n} \\ &= e^{-j\omega N}\frac{1-e^{j\omega(2N+1)}}{1-e^{j\omega}} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Ricordando che il passaggio 1 vale solo per $\omega \neq 2k\pi$, ma che l'espressione di $W(\omega)$ si prolunga in $2k\pi$ per continuità.

5. Si osservi innanzitutto che $x_1(n)$ è si può vedere come $v(n) - r(n)$, dove $v(n) = \text{sign}(n)$ e $r(n)$ è un impulso rettangolare da 0 a 11. Abbiamo quindi

$$v(n) = \text{sign}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ -1 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

$$v(n) - v(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ 2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases} \qquad = 2\delta(n)$$

$$V(\omega) - e^{-j\omega}V(\omega) = 2 \qquad\qquad V(\omega) = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}$$

La DTFT $R(\omega)$ si calcola in modo simile a $W(\omega)$ trovato al punto precedente. Posto $M = 12$, si trova:

$$R(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{M}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

La DTFT di X_2 si trova usando la regola di derivazione in frequenza della DTFT : $\mathcal{F}\left[nx(n)\right](\omega) = jX'(\omega)$. Si ha infine:

$$X_1(\omega) = V(\omega) - R(\omega) \qquad X_2(\omega) = jX_1'(\omega) + X_1(\omega) \qquad Y(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Non è necessario esplicitare ulteriormente i calcoli.

Esercizio 2: Trasformata di Fourier a tempo continuo, 7 punti

Sia $x(t)$ un segnale di variabile reale la cui Trasformata di Fourier è $X(\omega) = e^{j\omega t_0}\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_M}\right)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, $\omega_M \in \mathbb{R}^+$ e $\text{rect}(t) = 1 \Leftrightarrow |t| < 1/2$.

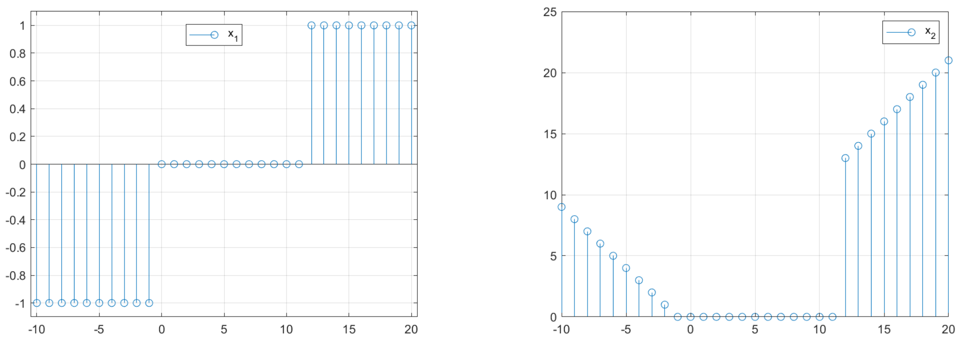

Figura 1: Andamento dei segnali x_1 e x_2.

Sia poi $y(t) = \cos(\omega_1 t)\text{sinc}\left(a\frac{\omega_1 t}{2\pi}\right)$, con $1 < a < 2$ e $\omega_1 \in \mathbb{R}^+$.

1. Calcolare $x(t)$
2. Calcolare $Y(\omega)$
3. Schizzare $|X(\omega)|$ e $|Y(\omega)|$
4. Nel caso $a = 3/2$, sotto quali condizioni su ω_1 la convoluzione tra x e y è nulla?

Soluzione dell'esercizio 2

1. Sia $x(t) = x_1(t + t_0)$. Allora $X(\omega) = X_1(\omega)e^{j\omega t_0}$ Quindi $X_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_M}\right)$. Siccome $\mathcal{F}\left[A\,\text{sinc}(BT)\right](\omega) = \frac{A}{B}\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)$, posto $2\pi B = 2\omega_M$ e $\frac{A}{B} = 1$, si ha:

$$B = \frac{\omega_M}{\pi} \qquad A = \frac{\omega_M}{\pi}$$
$$x_1(t) = \frac{\omega_M}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_M}{\pi}t\right) \qquad x(t) = \frac{\omega_M}{\pi}\text{sinc}\left[\frac{\omega_M}{\pi}(t + t_0)\right]$$

2.

$$\mathcal{F}\left[\text{sinc}At\right](\omega) = \frac{1}{A}\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi A}\right)$$
$$\mathcal{F}\left[\text{sinc}\frac{a\omega_1 t}{2\pi}\right](\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1}\text{rect}\left(\frac{\omega}{a\omega_1}\right) = W(\omega)$$
$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left[\cos(\omega_1 t)\text{sinc}\frac{a\omega_1 t}{2\pi}\right](\omega) = \frac{1}{2}W(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2}W(\omega + \omega_1)$$
$$= \frac{\pi}{\omega_1}\text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_1}{a\omega_1}\right) + \frac{\pi}{\omega_1}\text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_1}{a\omega_1}\right)$$

3. $|X(\omega)|$ è un impulso rettangolare centrato in zero e di durata $2\omega_M$ e di ampiezza unitaria.

   $|Y(\omega)|$ è formato da due impulsi rettangolari simmetrici rispetto all'origine, centrati in $\pm\omega_1$, di durata $a\omega_1$ e di ampiezza $\frac{\pi}{\omega_1}$.

   Il grafico è illustrato in Fig. 2.

4. Osserviamo innanzitutto che la TF di $x(t) * y(t)$ è $X(\omega)Y(\omega)$. L'uno è nullo se e solo se l'altro lo è. In Fig. 3 si mostra uno zoom del grafico di $|X(\omega)|$ e $|Y(\omega)|$. Se ne deduce che il prodotto è nullo se e solo se i due impulsi rettangolari non si sovrappongono mai. Ciò si ottiene se e solo se $\omega_M < \omega_1\left(1 - \frac{a}{2}\right)$, cioè $\omega_1 > \frac{\omega_M}{1-a/2}$. Per $a = 3/2$ tale condizione diventa $\omega_1 > 4\omega_M$.

Esercizio 3: EDO-LCC, 7 punti

Si consideri la seguente Equazione Differenziale Ordinaria Lineare a Coefficienti Costanti:

$$y'' + \frac{7}{2}y' + \frac{3}{2}y = x' - 3x$$

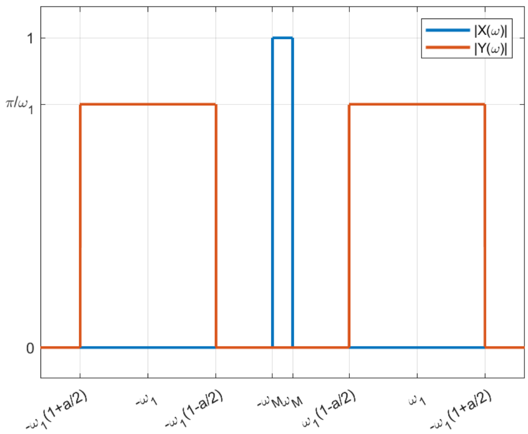

Figura 2: Andamento di $|X(\omega)|$ e $|Y(\omega)|$

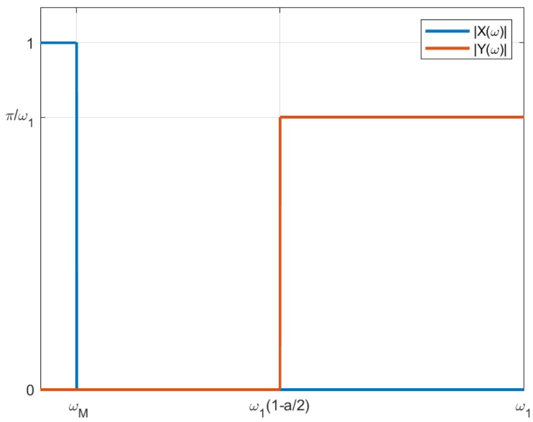

Figura 3: Zoom della figura 2

e sia $\mathcal{S}$ il sistema LTI causale associato ad essa.

1. Determinare la funzione di trasferimento $H_+(s)$ di $\mathcal{S}$
2. Dire se $\mathcal{S}$ è stabile e motivare la risposta
3. Determinare $h_+(t)$
4. Determinare l'uscita del sistema quando l'ingresso è $x(t) = 2^{-t}u(t)$

Soluzione dell'esercizio 3

1. $H_+(s) = \frac{s-3}{s^2+\frac{7}{2}s+\frac{3}{2}}$
2. Le radici del polinomio caratteristico $a(s) = s^2 + \frac{7}{2}s + \frac{3}{2}$ sono $s_1 = -3$ e $s_2 = -1/2$, entrambe a parte reale strettamente negativa. Dunque il sistema è stabile.

3. Cominciamo dalla decomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
H_+(s) &= \frac{s-3}{s^2+\frac{7}{2}s+\frac{3}{2}} = \frac{s-3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+3)} = \frac{A_1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{A_2}{s+3} \\
A_1 &= \lim_{s\to-\frac{1}{2}} \left(s+\frac{1}{2}\right) H_+(s) = -\frac{7}{5} \\
A_2 &= \lim_{s\to-3} (s+3)\, H_+(s) = \frac{12}{5} \\
h_+(t) &= u(t)\left(-\frac{7}{5}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{12}{5}e^{-3t}\right)
\end{aligned}$$

4. Cominciamo con l'osservare che $x(t) = 2^{-t}u(t) = e^{\ln 2^{-t}}u(t) = e^{-t\ln 2}u(t) = e^{-at}u(t)$ con $a = \ln 2 > 0$. Quindi $X(s) = \frac{1}{s+a}$ e

$$\begin{aligned}
Y(s) &= H_+(s)X(s) = \frac{s-3}{(s+a)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+3)} = \frac{B_1}{s+a} + \frac{B_2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B_3}{s+3} \\
B_1 &= \lim_{s\to-a} \frac{s-3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+3)} = \frac{-a-3}{\left(-a+\frac{1}{2}\right)(-a+3)} \approx 8.29 \\
B_2 &= \lim_{s\to-\frac{1}{2}} \frac{s-3}{(s+a)(s+3)} = \frac{-\frac{7}{2}}{\left(-\frac{1}{2}+a\right)\left(-\frac{1}{2}+3\right)} \approx -7.25 \\
B_3 &= \lim_{s\to-3} \frac{s-3}{(s+a)\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-6}{(-3+a)\left(-3+\frac{1}{2}\right)} \approx -1.04 \\
y(t) &= u(t)\left(B_1 2^{-t} + B_2 e^{-\frac{1}{2}t} + B_3 e^{-3t}\right)
\end{aligned}$$

Domanda teorica 1 : LTI in regime sinusoidale, 4 punti

Ricordare la definizione di risposta in frequenza $H(\omega)$ di un LTI stabile. Mostrare che se $\mathcal{S}$ è un LTI stabile reale, $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ e $y = \mathcal{S}(x)$, allora esistono delle opportune costanti A' e φ' tali che $y(t) = A'\cos(\omega_0 t + \varphi')$.

Esprimere tali costanti in termini di A, φ e $H(\omega)$

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : Campionamento, 4 punti

Ricordare l'enunciato del teorema del campionamento di Shannon nel caso di passo di campionamento generico T_C. Ricordare il significato e la formula della frequenza di Nyquist. Ricordare la formula d'interpolazione ideale. Infine discutere la realizzabilità dell'interpolazione ideale.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso. Per quanto riguarda l'interpolazione ideale, essa non è realizzabile perché è impossibile generare un segnale sinc (di supporto infinito) e perché nella formula compare una somma infinita.

Domanda di Matlab : 4 punti

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ a supporto $(0, T)$, $T = 30s$. I campioni di tale segnale siano rappresentati in MatLab dal vettore `x` con passo di campionamento `TC=1e-4` e con tempi di campionamento `tx =TC*(0:length(x)-1)`. Si chiede di ideare uno script MatLab che determini la trasformata di Fourier $X(\omega)$ e l'asse delle pulsazioni associate, e infine produca un grafico del modulo di tale trasformata.

Se il vettore Matlab che rappresenta $|X|$ assume il massimo valore nel suo 350mo campione, dove possiamo aspettarci un altro picco? Perché?

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
TC = 1e-4;
T =30;
N = T/TC+1;
M = 2.^(nextpow2(N)+1); % M sarà una potenza di due compresa tra 2N e 4N
X = TC*fft(x,M);
step = (2*pi)/(TC*M);
omega = -(pi/TC): step : (pi/TC - w0);
plot(omega, fftshift(abs(X)));
```

Il vettore `abs(X)` rappresenta i campioni del modulo della TdF si un segnale reale. Tale modulo è pari perché x è reale. Tuttavia, ricordiamo che:
`abs(X)`$= \left[|\hat{W}(0)|, |\hat{W}(\frac{2\pi}{M})|, |\hat{W}(2\frac{2\pi}{M})|, |\hat{W}(3\frac{2\pi}{M})|, \ldots, |\hat{W}((M-3)\frac{2\pi}{M})|, |\hat{W}((M-2)\frac{2\pi}{M})|, |\hat{W}((M-1)\frac{2\pi}{M})|\right]$
dove $\hat{W}(\omega)$ è la DTFT dei campioni di x. Tale funzione è periodica di periodo 2π e dunque:

$$\mathtt{abs(X(k))} = \left|\hat{W}\left((k-1)\omega_1\right)\right| = \left|\hat{W}\left((k-1)\frac{2\pi}{M}\right)\right| \tag{2}$$

$$= \left|\hat{W}\left(-(k-1)\frac{2\pi}{M}\right)\right| \tag{3}$$

$$= \left|\hat{W}\left(2\pi-(k-1)\frac{2\pi}{M}\right)\right| \tag{4}$$

$$= \left|\hat{W}\left((M-k+1)\frac{2\pi}{M}\right)\right| = \mathtt{abs(X(M-k+2))} \tag{5}$$

Dove abbiamo utilizzato: in (2) la definizione di $\omega_1 = \frac{2\pi}{M}$, in (3) la parità di X e quindi di $\hat{W}$, in (4) la periodicità di $\hat{W}$. Quindi se il massimo di $|X|$ si trova nel campione `k=350`, avremo un altro massimo in `k2=M-348`.

La risposta approssimata `M-350` è considerata accettabile.