Segnali e Sistemi

Tempo: 2,5 ore   Nessun documento ammesso

Istruzioni Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio del compito. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare lo schizzo di un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare il compito (senza "brutta copia") e questo documento.

Esercizio 1: Serie di Fourier, 7 punti

Sia $x(t)$ il segnale seguente: $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = |\cos(\pi t)|$

1. Tracciare $x(t)$ tra -2 e 2 e determinare il *periodo fondamentale* di x, ovvero il minimo $T > 0$ tale che $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$.
2. Calcolare l'energia su $\mathbb{R}$ e la potenza media su $\mathbb{R}$ di tale segnale.
3. Mostrare che i coefficienti della serie di Fourier di tale segnale (calcolata sul periodo fondamentale) sono:

$$a_k = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(k - \frac{1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$$

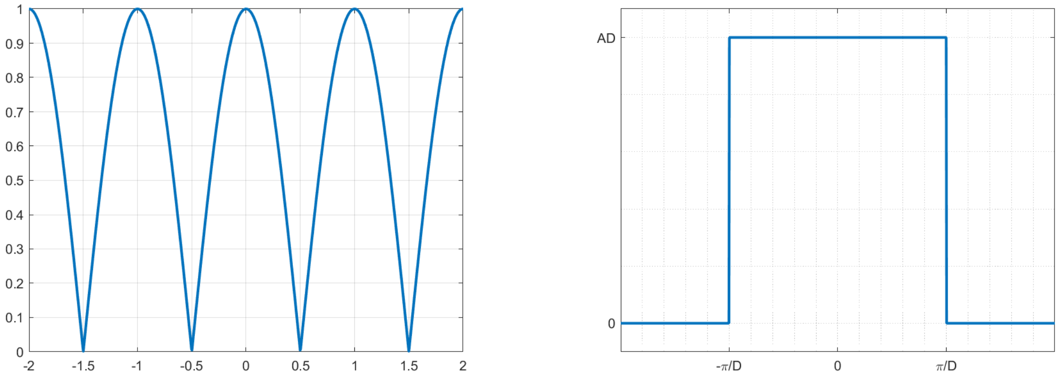
4. Si consideri ora un LTI $\mathcal{S}$, la cui risposta impulsiva è $h(t) = A\operatorname{sinc}(t/D)$. Determinare la risposta in frequenza del sistema e tracciarne lo schizzo.
5. Il segnale $x(t)$ è messo in ingresso al sistema $\mathcal{S}$ di cui sopra. Sia $y(t)$ l'uscita corrispondente. Determinare, se possibile, le condizioni su D che rendano $y(t)$ costante. A tale scopo si ricordi la seguente formula per il calcolo della Trasformata di Fourier di un segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow X(\omega) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Soluzione dell'esercizio 1

1. Il segnale $|\cos(\pi t)|$ si annulla per $t \in \left\{k + \frac{1}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ed è sempre non negativo. Si veda la Fig. 1(a) per il grafico. Il periodo fondamentale è $T = 1$ e quindi $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$.
2. Un segnale periodico non negativo ha energia infinita (escluso il caso banale di segnale identicamente nullo). Per il calcolo della potenza media su $\mathbb{R}$, osserviamo che, posto $E(\tau) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2\, dt$ si ha:

$$E(\tau) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos^2(\pi t)\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)\, dt = \frac{\tau}{2} + \frac{\sin \pi\tau}{2\pi}$$



(a) (b)

Figura 1: Andamento di $x(t) = \cos|\pi t|$ (a) e di $H(\omega)$ (b).

$E(\tau)$ è l'energia in $\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$. Come sapevamo, $\lim_{\tau \to +\infty} E(\tau) = +\infty$, mentre la potenza si può calcolare come energia media in un periodo o come media su $\mathbb{R}$. Nel primo caso:

$$P = E(1)/1 = \frac{1}{2} + \frac{\sin \pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

nel secondo

$$P = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{E(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{\sin \pi\tau}{2\pi\tau} = \frac{1}{2}$$

Entrambi i modi di calcolare P sono corretti, e ne basta uno.

3. Il calcolo dei coefficienti si basa sulla definizione: $a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$ e sull'osservazione che $T = 1$, $\omega_0 = 2\pi$ e che, in $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, $x(t) = \cos(\pi t)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) e^{-jk2\pi t}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2} \right) e^{-jk2\pi t}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[e^{-j2\pi t\left(k-\frac{1}{2}\right)} + e^{-j2\pi t\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-j2\pi t\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{-j2\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)} + \frac{e^{-j2\pi t\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{-j2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)} - e^{-j\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{2j\,\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)} + \frac{e^{j\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} - e^{-j\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{2j\,\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)} + \frac{\sin\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(k-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(k+\frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

4. Nel seguito, supporremo $D > 0$. Ricordando che $\mathcal{F}\left[\operatorname{sinc}(t)\right](\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ e usando la

proprietà del cambiamento di scala, si ha che la risposta in frequenza del sistema è:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left[A\,\mathrm{sinc}(t/D)\right](\omega) = AD\,\mathrm{rect}\left(\frac{D\omega}{2\pi}\right).$$

Il grafico è illustrato in Fig. 1(b).

5. Supponiamo ancora $D > 0$. Osserviamo che

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = AD\,\mathrm{rect}\left(\frac{D\omega}{2\pi}\right) 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Il sistema $\mathcal{S}$ è un filtro passa-basso ideale che seleziona le pulsazioni tra $-\frac{\pi}{D}$ e $\frac{\pi}{D}$. Affinché $y(t)$ sia costante, tutte le pulsazioni $k\omega_0$ con $k \neq 0$ devono essere tagliate. Qundi si ha:

$$\frac{\pi}{D} < \omega_0 \qquad D > \frac{\pi}{\omega_0} \qquad D > \frac{\pi}{2\pi} \qquad D > \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2: Sistemi a tempo discreto, 7+1 punti

Si considerino $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due sistemi LTI a tempo **discreto**. La risposta impulsiva di $\mathcal{S}_1$ è $h_1(n) = -2^n u(-n-1)$ mentre la risposta in frequenza di $\mathcal{S}_2$ è $H_2(\omega) = \frac{1-2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$.

1. Trovare la risposta impulsiva di $\mathcal{S}_2$
2. Discutere la stabilità e la causalità di $\mathcal{S}_1$ e di $\mathcal{S}_2$.
3. Provare che la risposta in frequenza di $\mathcal{S}_1$ è $H_1(\omega) = \frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$.
4. Calcolare $|H_2(\omega)|$ e giustficare il nome "filtro passa-tutto". Suggerimento: cominciare con il calcolo di $|1 - ae^{-j\omega}|^2$.
5. Discutere la stabilità e la causalità di $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ (cioè la serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) e confrontare il modulo della risposta in frequenza di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$. Suggerimento: cominciare dal calcolo della risposta in frequenza di $\mathcal{S}$.
6. **Bonus.** Sulla base dei risultati precedenti, suggerire uno modo per realizzare praticamente un filtro con la stesso modulo della risposta in frequenza di $\mathcal{S}_1$. Per essere realizzabile, tale filtro deve essere causale, stabile e implementabile con un numero finito di operazioni per campione.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Abbiamo $H_2(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$, e osserviamo che $\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ è la DTFT di $g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Allora, sfruttando la proprietà del ritardo si ottiene:

$$h_2(n) = g(n) - 2g(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$h_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Si può anche ottenere un'espressione compatta: $h_2(n) = 4\delta(n) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Un modo equivalente è il seguente:

$$H_2(\omega) = \frac{1 - 2e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{3}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$h_2(n) = \delta(n) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) = 4\delta(n) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

2. La risposta impulsiva di $\mathcal{S}_1$ è a supporto negli interi negativi, dove è sommabile. Quindi $\mathcal{S}_1$ è anticausale e stabile. La risposta impulsiva di $\mathcal{S}_2$ è a supporto in $\mathbb{N}$ ed è anch'essa sommabile, essendo maggiorata in modulo da $3 \cdot 2^{-n}u(n)$ che è sommabile. Quindi $\mathcal{S}_2$ è causale e stabile.

   In alternativa, verificata la causalità di $\mathcal{S}_2$ dalla sua risposta impulsiva, la stabilità si poteva anche dedurre osservando che la funzione di trasferimento del sistema (che si calcola facilmente da $h_2(n)$) è $H_2(z) = 4 - 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ con ROC $|z| > 1/2$ e quindi l'unico polo della FT è $z_0 = \frac{1}{2}$, all'interno del cerchio unitario.

3.

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} -2^n u(-n-1)e^{-j\omega n} = -\sum_{n<0} 2^n e^{-j\omega n} = -\sum_{m>0} 2^{-m}e^{j\omega m} \\ &= -\sum_{m>0} 2^{-m}e^{j\omega m} - 1 + 1 = -\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^m + 1 = \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega} - 1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}} = \frac{-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}\frac{-2e^{-j\omega}}{-2e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{1 - 2e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

4.

$$\forall a > 0, \left|1 - ae^{-j\omega}\right|^2 = |1 - a\cos\omega + ja\sin\omega|^2 = 1 + a^2 - 2a\cos\omega$$
$$a = 2 \Rightarrow \left|1 - 2e^{-j\omega}\right|^2 = 5 - 4\cos\omega$$
$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right|^2 = \frac{5}{4} - \cos\omega$$
$$|H_2(\omega)|^2 = \frac{5 - 4\cos\omega}{\frac{5}{4} - \cos\omega} = 4$$
$$|H_2(\omega)| = 2$$

Questo vuol dire che, $\forall\omega_0 \in \mathbb{R}$, detta $y(n)$ la risposta di $\mathcal{S}_2$ all'ingresso $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, si ha $|y(n)| = 2|x(n)|$: tutte le frequenze "passano" con la stessa amplificazione.

5. Osserviamo che la risposta in frequenza di $\mathcal{S}$ è $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$. Se ne deduce $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Il sistema è allora causale e stabile.

6. **Bonus.** Da quanto detto, $|H(\omega)| = |H_1(\omega)|\,|H_2(\omega)| = 2\,|H_1(\omega)|$. Quindi il sistema $\mathcal{S}$, a meno di un fattore di scala facilmente compensabile, ha la stessa risposta in ampiezza (cioè il modulo della risposta in frequenza) di $\mathcal{S}_1$, ma mentre quest'ultimo è anticausale, esso è causale e stabile. Allora può essere implementato con un numero finito di operazioni tramite un'equazione alle differenze. Infatti la funzione di trasferimento di $\mathcal{S}$ è $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ e quindi l'equazione alle differenze è $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$. Il sistema può essere implementato quindi tramite l'algoritmo causale:

$$\begin{cases} t(0) = 0 & \forall n < 0 \\ t(n) = x(n) + \frac{1}{2}t(n-1) & \forall n \geq 0 \end{cases}$$

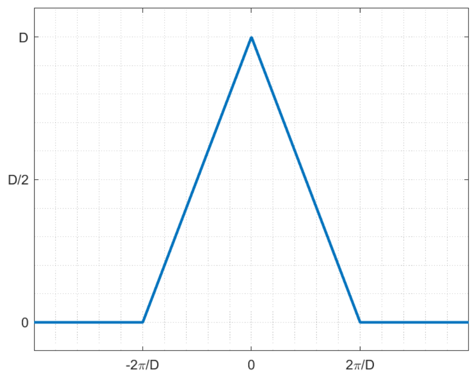
Tale segnale t è perfettamente uguale a $y = h * x$ se x è causale, mentre converge nel tempo a y (cioè la differenza assoluta $|t(n) - y(n)|$ tende a zero) se x non è causale.

Osservazione addizionale (extra-esame). Più in generale, si può mostrare che, dato un filtro anticausale stabile $\mathcal{S}_a$, è possibile trovare un filtro passa-tutto $\mathcal{S}_b$ tale che la convoluzione dei due ; $S_c = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ sia causale e stabile. Si ha quindi un nuovo filtro $\mathcal{S}_c$ che può essere sempre implementato con una equazione alle differenze, e quindi con un numero finito di operazioni.

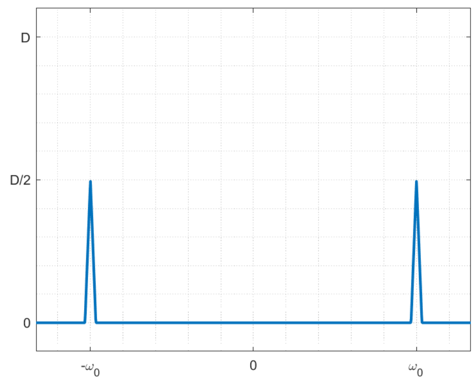
Esercizio 3: Campionamento e modulazione, 7 punti

Si consideri il segnale a tempo continuo $x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{D}\right)$.

1. Tracciare uno schizzo di $X(\omega)$, la trasformata di Fourier di $x(t)$.
2. Il segnale $x(t)$ viene campionato con periodo $T = 0.4D$. È possibile ricostruire $x(t)$ dai campioni così calcolati?



(a)



(b)

Figura 2: Andamento di $X(\omega)$ (a) e di $Y(\omega)$ (b).

3. Si consideri adesso il segnale $y(t) = \cos(\omega_0 t)\, x(t)$, con $\omega_0 \gg \frac{\pi}{D}$. È possibile ricostruire y dalla sequenza dei campioni presi con periodo $T = 0.4D$?
4. Si consideri $z(t) = \cos(\omega_0 t)\, y(t)$. Calcolare $Z(\omega)$ in funzione di $X(\omega)$ e proporre un metodo per ottenere $x(t)$ da $z(t)$ usando un opportuno sistema.

Soluzione dell'esercizio 3

1. Ricordando che $\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}(t)\right](\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, abbiamo $\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}^2(t)\right](\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, l'impulso triangolare con supporto da -2π a 2π.

   Applicando la regola del cambiamento di scala, si trova
   $$X(\omega) = D\,\mathrm{triang}\left(\frac{D\omega}{2\pi}\right)$$
   il cui andamento è illustrato in Fig. 2(a).

2. La massima pulsazione nello spettro di $x(t)$ è $\omega_M = \frac{2\pi}{D}$. La minima frequenza di campionamento è allora $F_C = 2\frac{\omega_M}{2\pi} = \frac{2}{D}$, quindi il massimo periodo di campionamento è $T_C = \frac{D}{2}$. Il periodo di campionamento proposto $T = 0.4D$ soddisfa allora il criterio di Nyquist. Il segnale può dunque essere ricostruito dai suoi campioni.

3. Lo spettro di y è $Y(\omega) = \frac{1}{2}\left(X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right)$, illustrato in Fig. 2(b). Siccome $\omega_0 \gg \frac{\pi}{D} = \frac{\omega_M}{2}$, la minima frequenza di campionamento è
   $$F_C = 2\frac{\omega_0 + \omega_M}{2\pi} > \frac{\omega_0}{\pi} \gg \frac{\pi/D}{\pi} = \frac{1}{D}.$$
   Quindi anche $T_C \ll D$. È chiaro che campionare a periodo $T = 0.4D$ non è più sufficiente.

4. Si ha $z(t) = \cos^2(\omega_0 t) x(t) = \frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2} x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)x(t)$. Quindi
   $$Z(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}\left[X(\omega - 2\omega_0) + X(\omega + 2\omega_0)\right].$$

Un filtro passabasso $H_{\mathrm{LP}}(\omega) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$ con pulsazione di taglio ω_c tale che $\omega_c \in \left(\frac{2\pi}{D}, 2\omega_0 - \frac{2\pi}{D}\right)$ ricostruirebbe perfettamente x da z: $X(\omega) = H_{\mathrm{LP}}(\omega)Z(\omega)$. Ad esempio, si potrebbe scegliere $\omega_c = \omega_0$.

Domanda teorica 1 : DTFT e DFT, 4 punti

Mostrare che utilizzando la Trasformata di Fourier Discreta e lo *zero-padding* è possibile ottenere una rappresentazione discreta della DTFT di un segnale $x(n)$ a supporto finito in $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ con risoluzione arbitrariamente fine.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : Trasformata di Laplace, 4 punti

Mostrare come si risolve un problema di Cauchy causale usando la Trasformata di Laplace.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 4 punti

Si consideri il segnale $x(t) = Ae^{(\sigma+j\omega)t}$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(0, 5)$ campionato a passo 10^{-3}, con $A = 10$, $\sigma = -2$, $\omega = \frac{\pi}{4}$
2. Tracci in una figura (due subplot) modulo e fase di $x(t)$ calcolato al punto 1.
3. Tracci in una figura (due subplot) parte reale e parte immaginaria di $x(t)$ calcolato al punto 1.b,. In entrambi i subplot, tracciare anche l'inviluppo di $x(t)$, cioè $\pm|x(t)|$

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
%%  4.1
t=0:1e-3:5;
A= 10; sigma = -2; w = pi/4;
x = A*exp((sigma+1i*w)*t);

%% 4.2
figure(1); subplot(2,1,1);
plot(t,abs(x))
title('abs(x(t))'); grid
```

```
subplot(2,1,2);
plot(t,angle(x))
title('angle(x(t))'); grid

%% 4.3
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,real(x),t,abs(x),t,-abs(x))
grid
title('real(x(t))')
subplot(2,1,2)
plot(t,imag(x),t,abs(x),t,-abs(x))
grid
title('imag(x(t))');
```