Segnali e Sistemi

Cognome Nome	
Matricola	

Tempo: 2 ore

Nessun documento ammesso

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti, **tranne la domanda 1 dell'esercizio 2, che va svolta su questo foglio**. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare e su questo foglio. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare il compito (senza "brutta copia") e questo documento.

Esercizio 1: Trasformata di Fourier, 8 punti

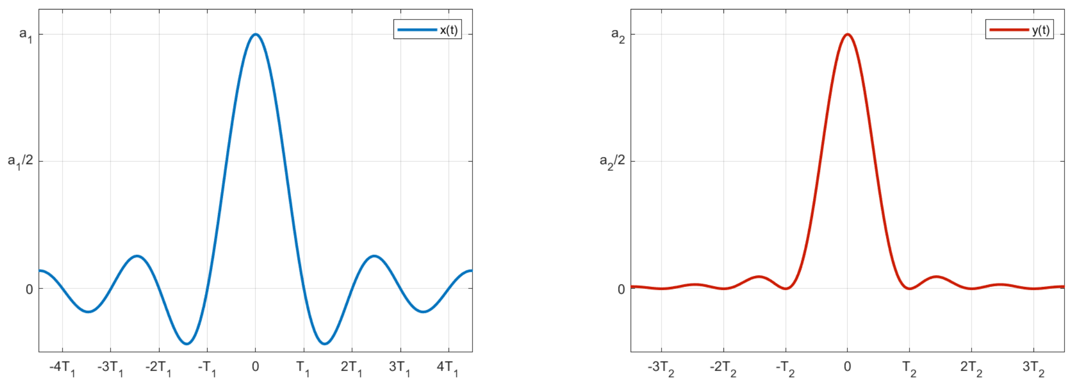
Dati a_1, a_2, T_1, T_2 reali positivi, siano $x(t)$ e $y(t)$ dei segnali definiti come segue:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = a_1 \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_1}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = a_2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

1. Tracciare $x(t)$ e $y(t)$.
2. Calcolare le rispettive Trasformate di Fourier $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ e tracciarne l'andamento dei moduli
3. Calcolare l'energia di x e di y su $\mathbb{R}$. Suggerimento: usare l'identità di Parseval $E_x = \frac{1}{2\pi} E_X$. Similmente per E_y
4. Calcolare $z = x * y$ (convoluzione tra x e y) nel caso $T_1 < \frac{T_2}{2}$.

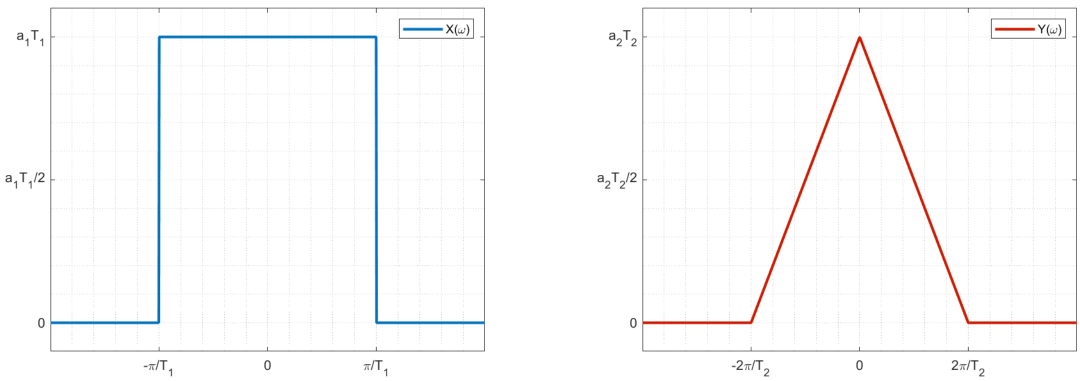
Soluzione dell'esercizio 1

1. I grafici di $x(t)$ e $y(t)$ sono presentati in Fig. 1



(a) (b)

Figura 1: Andamento di $x(t) = a_1 \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_1}\right)$ (a) e di $y(t) = a_2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T_2}\right)$ (b).



(a) (b)

Figura 2: Andamento di $X(\omega)$ (a) e di $Y(\omega)$ (b).

2. Ricordiamo che $\mathcal{F}[\text{sinc}(t), \omega] = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Usiamo la proprietà del cambiamento di scala e la proprietà del prodotto. Si ha:

$$X(\omega) = a_1 T_1 \text{rect}\left(\frac{T_1}{2\pi}\omega\right)$$
$$\mathcal{F}[\text{sinc}(t) \cdot \text{sinc}(t), \omega] = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$
$$Y(\omega) = a_2 T_2 \Lambda\left(\frac{T_2}{2\pi}\omega\right)$$

I grafici di tali funzioni sono illustati in Fig. 2.

3. Utilizzando l'indentità di Parseval, l'energia di x si calcola tramite l'energia di X:

$$E_x = \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|X\|_2^2$$
$$\|X\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\frac{\pi}{T_1}}^{\frac{\pi}{T_1}} a_1^2 T_1^2 \, d\omega = a_1^2 T_1^2 2\frac{\pi}{T_1} = 2\pi a_1^2 T_1$$
$$E_x = \frac{1}{2\pi} 2\pi a_1^2 T_1 = a_1^2 T_1$$

Similmente per $y(t)$:

$$E_y = \|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|Y\|_2^2$$
$$\|Y\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\frac{2\pi}{T_2}}^{\frac{2\pi}{T_2}} a_2^2 T_2^2 \left(1 - \frac{T_2}{2\pi}|\omega|\right)^2 d\omega = a_2^2 T_2^2 \, 2 \int_0^{\frac{2\pi}{T_2}} \left(1 - \frac{T_2}{2\pi}\omega\right)^2 d\omega$$

ora, osserviamo che:

$$\int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^2 ds = \int_0^1 r^2 \, \alpha dr = \frac{1}{3}\alpha$$

dove abbiamo sostituito $r = 1 - s/\alpha$; si ha allora:

$$\|Y\|_2^2 = a_2^2 T_2^2 2 \frac{1}{3}\frac{2\pi}{T_2} = \frac{2}{3} 2\pi a_2^2 T_2$$
$$E_y = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{3} 2\pi a_2^2 T_2 = \frac{2}{3} a_2^2 T_2$$

4. Calcoliamo la convoluzione tramite la trasformata di Fourier. Posto $Z(\omega) = \mathcal{F}(x * y, \omega)$, si ha

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega) = a_1 T_1 \mathrm{rect}\left(\frac{T_1}{2\pi}\omega\right) a_2 T_2 \Lambda\left(\frac{T_2}{2\pi}\omega\right) = a_1 T_1 Y(\omega)$$
$$z(t) = a_1 T_1 y(t) = a_1 a_2 T_1 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che, siccome $T_1 < \frac{T_2}{2}$ allora $\mathrm{rect}\left(\frac{T_1}{2\pi}\omega\right)\Lambda\left(\frac{T_2}{2\pi}\omega\right) = \Lambda\left(\frac{T_2}{2\pi}\omega\right)$ (vedere anche Fig. 2).

Esercizio 2: Sistemi a tempo discreto, 8 punti

Si consideri un sistema a tempo discreto $\mathcal{S}$ caratterizzato dalla relazione ingresso uscita

$$y = \mathcal{S}(x) \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-2) - \frac{1}{2}x(n+2)$$

1. Completare la tabella seguente sulle proprietà di $\mathcal{S}$:

	Vero	Falso
$\mathcal{S}$ è un sistema statico	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema dinamico	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema causale	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema anticausale	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema non causale	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema lineare	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema tempo-invariante	☐	☐
$\mathcal{S}$ è un sistema stabile (BIBO)	☐	☐

2. Trovare la risposta impulsiva di $\mathcal{S}$
3. Trovare la risposta in frequenza di $\mathcal{S}$ e tracciarne l'andamento del modulo.
4. Determinare l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso $x(n) = a + b\sin(\pi n + c)$, con a, b, c reali positivi.

Soluzione dell'esercizio 2

		Vero	Falso
	$\mathcal{S}$ è un sistema statico	☐	☑
	$\mathcal{S}$ è un sistema dinamico	☑	☐
	$\mathcal{S}$ è un sistema causale	☐	☑
1.	$\mathcal{S}$ è un sistema anticausale	☐	☑
	$\mathcal{S}$ è un sistema non causale	☑	☐
	$\mathcal{S}$ è un sistema lineare	☑	☐
	$\mathcal{S}$ è un sistema tempo-invariante	☑	☐
	$\mathcal{S}$ è un sistema stabile (BIBO)	☑	☐

Il sistema è dinamico perché dipende dal passato e dal futuro dell'ingresso. Per lo stesso motivo, non può essere né causale né anticausale, e quindi è non causale. La linearità e la tempo-invarianza si verificano immediatamente. Infine, essendo l'uscita una somma finita di campioni dell'ingresso, il sistema non può che essere stabile.

2. La risposta impulsiva di $\mathcal{S}$ è $y(n) = -\frac{1}{2}\delta(n+2) + \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$

3. Applicando la definizione si ottiene:

$$H(\omega) = \sum_n h(n) e^{-j\omega n} = 1 - \frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2} = 1 - \cos(2\omega),$$

il cui andamento (in modulo) è illustrato in Fig. 3.

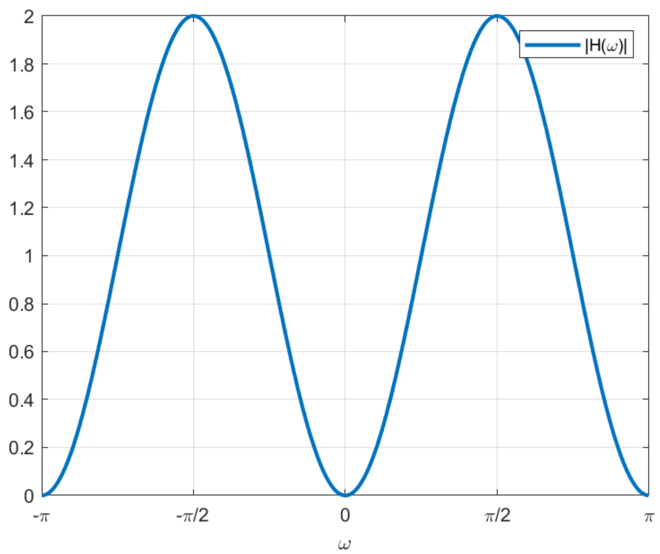


Figura 3: Modulo della risposta in frequenza di $\mathcal{S}$, esercizio 2.

4. Il segnale x contiene unicamente componenti a pulsazione nulla e a pulsazione $\pm\pi$. Siccome $H(0) = H(\pm\pi) = 0$, si ottiene $y(n) = 0$

Esercizio 3: Trasformata di Laplace, 8 punti

Si consideri sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$$

.

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(s)$.
2. Dire se il sistema è BIBO stabile.
3. Determinare la risposta forzata all'ingresso gradino unitario, $x(t) = u(t)$
4. Determinare la risposta forzata all'ingresso $x(t) = u(t)\cos(3t)$

Soluzione dell'esercizio 3

1. Ricordiamo che la funzione di trasferimento di un sistema associato ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti si ottiene come funzione razionale fratta, ed i coefficienti dei polinomi a numeratore e denominatore sono i coefficienti delle derivate che appaiono nell'equazione differenziale:
$$H(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}$$

2. Per giudicare la stabilità del sistema, si osserva che il grado del denominatore della funzione di trasferimento è strettamente maggiore di quello del numeratore e che i poli (cioè le radici del polinomio al denominatore) sono:
$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}.$$
I poli sono $s_1 = -2$, $s_2 = -3$ ed hanno parte reale negativa. Il sistema è allora BIBO stabile.

3. Se l'ingresso del sistema è $x(t) = u(t)$, si ha $X(s) = 1/s$ e la trasformata di Laplace dell'uscita è:
$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s-3}{(s+2)(s+3)s}$$
Calcoliamo adesso la decomposizione in fratti semplici usando il metodo dei limiti: siccome tutti i poli sono semplici, abbiamo
$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_i (s-s_i)} = \sum_i \frac{A_i}{s-s_i} \qquad \forall i, \quad (s-s_i)Y(s) = A_i + (s-s_i)\sum_{j\neq i}\frac{A_j}{s-s_j}$$
$$\forall i, \lim_{s\to s_i}(s-s_i)Y(s) = A_i$$
Osserviamo che i poli di $Y(s)$ sono $s_1 = -2, s_2 = -3, s_3 = 0$ e quindi
$$A_1 = \lim_{s\to s_1}(s-s_1)H(s) = \left.\frac{s-3}{s(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{-5}{-2\cdot 1} = \frac{5}{2}$$
$$A_2 = \left.\frac{s-3}{s(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{-6}{-3\cdot -1} = -2$$
$$A_3 = \left.\frac{s-3}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=0} = \frac{-3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

Allora $Y(s)$ si può scrivere come:

$$Y(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s+2} - 2\frac{1}{s+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

Possiamo calcolare facilmente l'antitrasformata sfruttandone la linearità:

$$y(t) = u(t)\left[\frac{5}{2}e^{-2t} - 2e^{-3t} - \frac{1}{2}\right]$$

4. In questo caso abbiamo $X(s) = \frac{s}{s^2+9}$ e quindi

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{(s-3)s}{(s+2)(s+3)(s^2+9)} \tag{1}$$

Si può trovare la decomposizione in fratti semplici come nel caso precedente, considerando che questa volta i poli sono $s_1 = -2, s_2 = -3, s_3 = j3, s_4 = -j3$. In alternativa, si può cercare direttamente di mettere $Y(s)$ in una forma che ne faciliti l'espressione reale dell'antitrasformata. In altre parole, possiamo porre:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \frac{A_3(s-\sigma) + A_4\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

dove σ e ω si ricavano dall'identità $s_{3,4} = \sigma \pm j\omega$. Nel nostro caso possiamo allora scrivere:

$$\sigma = 0 \quad \omega = 3$$
$$Y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3 s + 3A_4}{s^2+9}$$

Troviamo ora A_1 e A_2 con il metodo dei limiti:

$$A_1 = \left.\frac{(s-3)s}{(s^2+9)(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{10}{13\cdot 1} = \frac{10}{13}$$
$$A_2 = \left.\frac{(s-3)s}{(s^2+9)(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{18}{18\cdot -1} = -1$$

Otteniamo quindi:

$$Y(s) = \frac{10}{13}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{A_3 s + 3A_4}{s^2+9} \tag{2}$$

Infine, i coefficienti A_3 e A_4 vengono trovati valutando $Y(s)$ con le due espressioni Eq. (1) e (2). Scegliamo dei valori di s che annullano il numeratore nella Eq. (1). Per $s = 0$ si ha:

$$\frac{10}{13}\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3A_4}{9} = 0 \qquad A_4 = -3\frac{5}{13} + 1 \qquad A_4 = -\frac{2}{13}$$

mentre per $s = 3$ e usando il valore trovato di A_4 abbiamo

$$\frac{10}{13}\frac{1}{3+2} - \frac{1}{3+3} + \frac{3A_3}{9+9} + 3\frac{2}{13}\frac{1}{9+9} = 0 \qquad \frac{2}{13} - \frac{1}{6} + \frac{A_3}{6} - \frac{1}{39} = 0 \qquad A_3 = \frac{3}{13}$$

Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{10}{13}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{3}{13}\frac{s}{s^2+3} - \frac{2}{13}\frac{3}{s^2+9} \\
y(t) &= u(t)\frac{1}{13}\left[10e^{-2t} - 13e^{-3t} + 3\cos(3t) - 2\sin(3t)\right]
\end{aligned}
$$

Domanda teorica 1 : Trasformata di Fourier a tempo continuo e discreto, 5 punti

1. Ricordare la definizione di trasformata di Fourier a tempo continuo e a tempo discreto.
2. Sotto opportune ipotesi, la relazione tra la trasformata di Fourier $X(\omega)$ di un segnale $x(t)$ a tempo continuo, e la TFTD della sequenza $\hat{w}(n) = x(t)|_{t=nT_c}$ dei campioni prelevati con periodo T_c è data dalla formula di Poisson:

$$
\hat{W}(\omega) = \frac{1}{T_c}\sum_{k\in\mathbb{Z}} X\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T_c}\right)
$$

Mostrare come, tramite la formula di Poisson, sia possibile determinare la minima frequenza di campionamento da usare su di un segnale la cui TF ha supporto in $(-\omega_M, \omega_M)$ in modo da non avere aliasing (frequenza di Nyquist).

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Sistema LTI, 4 punti

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva. $h(t) = u(t)e^{-3t}$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Tracci l'andamento di $h(t)$ tra 0 e 10 con passo di campionamento $\Delta = 10^{-3}$.
2. Tracci il modulo della risposta in frequenza del sistema per $\omega \in (-6\pi, 6\pi)$ a partire dall'espressione analitica di $H(\omega)$
3. Tracci il modulo della risposta in frequenza del sistema per $\omega \in (-6\pi, 6\pi)$ usando la trasformata discreta di Fourier `fft`. A tale scopo, anche se il segnale h **non è a spettro limitato**, si può considerare trascurabile l'aliasing con il valore prescelto di Δ e nell'intervallo di pulsazioni considerato.

Soluzione dell'esercizio

Osseviamo che l'espressione analitica della TFtC di h è

$$
H(\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}
$$

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
% 1. Andamento di h tra 0 e 10 con passo 1e-3
Delta = 1e-3;
```

```
t = 0:Delta:10;
h = exp(-3*t);

% 2. Modulo della risposta in frequenza a partire dall'espressione analitica
omega = -6*pi: 1e-2 : 6*pi;
H_analitico = 1./(3+1i*omega);
figure; plot(omega,abs(H_analitico)); grid

% 3. Modulo di H tramite fft
N = numel(h); % Numero di campioni
M = 2^nextpow2(numel(t)); % Prendiamo la min potenza di 2 superiore a N
H = fftshift(Delta * fft(h,M));
omega0 = pi/Delta;
step = 2*omega0/M;
w = -omega0:step:(omega0-step);
figure; plot(w,abs(H))
axis([-6*pi 6*pi 0 max(abs(H))])

% 4. Bonus: confronto
figure; h=plot(omega,abs(H_analitico),'k-',w,abs(H), 'r--');
set(h,'LineWidth', 2); grid;
axis([-6*pi 6*pi 0 max(abs(H))])
```