Segnali e Sistemi

Esempi di domande

1. Domande di teoria

1.1. Segnali periodici

Siano dati i segnali $x_1: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $x_2: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodici rispettivamente di periodo $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$, e la funzione $g: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Sotto che ipotesi $g(x_1(t), x_2(t))$ è periodica in t? Quale sarà il suo periodo?

Se $y_1: n \in \mathbb{Z} \to x_1(nT_c) \in \mathbb{C}$ e $y_2: n \in \mathbb{Z} \to x_2(nT_c) \in \mathbb{C}$, sotto che condizioni su T_c y_1 è periodico? Stessa domanda per y_2 e poi per $y = y_1 + y_2$

1.2. Spazi di Segnali

Dopo aver ricordato la definizione di prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ e in $\ell^2(\mathbb{Z})$ e quella di segnali ortogonali, mostrare che le seguenti coppie di segnali x e y sono ortogonali nei rispettivi spazi:

- $x(t)$ reale pari e $y(t)$ reale dispari
- $x(t)$ causale e $y(t)$ anticausale: cioè, $x(t) = x(t)u(t)$ e $y(t) = y(t)u(-t)$
- x passa-basso con frequenza massima $\omega_M > 0$, y passa-alto con frequenza minima ω_M. In altre parole, detta $X(\omega)$ (risp. $Y(\omega)$) la trasformata di Fourier di $x(t)$ (risp. Di $y(t)$), $\forall|\omega| > \omega_M, X(\omega) = 0$ (risp. $\forall|\omega| < \omega_M, Y(\omega) = 0$).
- $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ e $y(t) = \sin(\omega t + \phi)$
- $x(n) = 1^n$, $y(n) = (-1)^n$

1.3. Delta di Dirac

Ricordare la definizione di Delta di Dirac tramite la cosiddetta proprietà del campionamento. Mostrare che $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Trovare un'espressione semplificata per il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$

1.4. Proprietà dei sistemi

Nel seguito sono dati dei sistemi definiti tramite relazione ingresso uscite: $y = \mathcal{S}(x)$. Determinare le proprietà di ogni sistema riempiendo la tabella seguente.

$y = \mathcal{S}(x)$	Statico/ Dinamico	Causale / Anticausale/ Non causale	Stabile / Non stabile	Lineare / Non lineare	Tempo invariante / Non TI	Se LTI, dare $h = \mathcal{S}(\delta)$
$y(n) = x(2n-1)$						
$y(t) = -x(t)$						
$y(n) = x^2(n) - 2x(n-1) + 1$						
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau+1)d\tau$						
$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$						
$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k)$						

1.5. Sistemi LTI

Usando linearità e tempo-invarianza, mostrare che, se $x(n)$ è a supporto finito e $\mathcal{S}$ è un LTI, esiste una successione $h(n)$ tale che $\mathcal{S}(x)(n) = h * x(n)$ e $\mathcal{S}(\delta) = h$.

Notare che la condizione di supporto finito per x è assegnata solo per semplificare la dimostrazione.

1.6. LTI in regime sinusoïdale

Ricordare la definizione di risposta in frequenza di un LTI stabile. Mostrare che se $\mathcal{S}$ è un LTI stabile, $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, e $y = \mathcal{S}(x)$, allora esistono delle opportune costanti (rispetto a t), siano esse A' e ϕ', tali che $y = A'\cos(\omega t + \phi')$

Esprimere tali costanti in termini di A, ϕ, e $H(\omega)$ (risposta in frequenza di $\mathcal{S}$)

1.7. Serie di Fourier

Ricordare le formule di analisi e sintesi della serie di Fourier.

Sia $x(t)$ un segnale periodico in $L^1(T)$, sia $\omega_0 = 2\pi/T$ e siano a_k i cdF (coefficienti di Fourier) di $x(t)$.

Mostrare le seguenti proprietà:

$x(t)$ pari → a_k pari (cioè $a_k = a_{-k}$)

$x(t)$ dispari → a_k dispari (cioè $a_k = -a_{-k}$)

I cdF di $x(t-\beta)$ sono $b_k = e^{-jk\omega_0\beta}a_k$

1.8. Convergenza della serie di Fourier

Ricordare l'enunciato dei Teoremi di Dirichlet e di Riesz-Fischer sulla convergenza della serie di Fourier

1.9. Serie di Fourier del treno d'impulsi

Mostrare che i coefficienti della serie di Fourier (convergenza in senso generalizzato) del treno d'impulsi $p(t) = \mathrm{rep}_T\,\delta(t)$ sono costanti e valgono $\frac{1}{T}$

1.10. Serie di Fourier e LTI in regime periodico

Ricordare qual è l'espressione dei cdF dell'uscita di un LTI in regime periodico in funzione dei cdF dell'ingresso, della pulsazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e della risposta in frequenza $H(\omega)$. Il periodo dell'ingresso è T

1.11. Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Ricordare la definizione di DFT per un segnale tempo-discreto periodico di periodo N

Mostrare che la DFT equivale a calcolare la proiezione del segnale sulla base $\{\phi_k(n)\}_{k\in\{0,1,\ldots,N-1\}}$ con $\phi_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

Mostrare che tale base è ortogonale, cioè $\langle\phi_k, \phi_h\rangle = N\delta(k-h)$

1.12. Trasformata di Fourier [a tempo continuo] (TdF)

Ricordare la definizione di TdF (formule di analisi e sintesi)

Esprimere la TdF di un segnale periodico in termini di coefficienti della serie di Fourier

Esprimere i cdF del segnale periodico $x(t) = \mathrm{rep}_T s(t)$ in funzione della TdF di s nell'ipotesi che quest'ultimo abbia supporto in $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

Mostrare le proprietà di cambio di scala, modulazione, traslazione

Mostrare la proprietà di dualità

Mostrare la proprietà della derivata e dell'integrale

1.13. Trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)

Ricordare la definizione di DTFT

Mostrare che, grazie allo zero-padding, è possibile ottenere una stima con precisione (cioè risoluzione dell'asse ω) arbitrariamente fine della DTFT di un segnale a supporto finito

Mostrare che la DTFT della risposta impulsiva di un LTI permette di calcolare l'uscita corrispondente ad un ingresso di tipo $e^{j\omega n}$

1.14. Formula di Poisson

Ricordare la formula di Poisson per il caso di campionamento con periodo unitario e con periodo qualsiasi
Mostrare come e sotto che ipotesi è possibile dare una stima della TdF di un segnale $x(t)$ tramite il calcolo della DFT dei suoi campioni $x(nT_c)$

1.15. Campionamento
Ricordare l'enunciato del teorema del campionamento di Shannon. Ricordare il significato e la formula della frequenza di Nyquist. Ricordare la formula d'interpolazione ideale. Tutto questo nel caso di passo di campionamento generico T_C
Spiegare perché prima di ogni operazione di campionamento un segnale dovrebbe essere sottoposto ad un filtraggio passabasso

1.16. Equazioni differenziali ordinarie
La soluzione di una EDO-LCC con condizioni iniziali (problema di Cauchy causale) si esprime come somma di risposta libera e risposta forzata. Ricordare la formulazione del problema e la struttura della risposta libera e della risposta forzata
Ricordare la struttura algebrica dell'insieme $\mathcal{Y}_O$ delle soluzioni dell'omogenea associata ad una EDO-LCC.
Esprimere una base di $\mathcal{Y}_O$ in termini di radici del polinomio caratteristico
Esprimere una base di $\mathcal{Y}_O$ in termini di radici del polinomio caratteristico nel caso in cui quest'ultimo è a coefficienti reali
Dare una condizione sufficiente di stabilità del sistema LTI corrispondente alla risposta forzata in termini di proprietà delle radici del polinomio caratteristico
Mostrare come trovare la risposta in frequenza di tale LTI in termini dei polinomi di coefficienti $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$

1.17. Trasformata di Laplace
Ricordare la definizione di TdL e quali sono i 5 possibili tipi di ROC
Mostrare un esempio di funzione di $s \in \mathbb{C}$ che, a seconda della ROC è la TdL di due segnali diversi
Mostrare come la TdL monolatera può essere usata per risolvere un problema di Cauchy causale

1.18. Trasformata Z
Ricordare la definizione di TZ
Mostrare che la funzione di trasferimento di un filtro ricorsivo è una funzione razionale fratta. Usare tale risultato per mostrare che: tutti i FIR sono filtri ricorsivi; l'inverso di un FIR è un filtro ricorsivo IIR.
Mostrare l'algoritmo per l'implementazione causale di un filtro ricorsivo
Discutere stabilità e causalità di un filtro ricorsivo e legame con i poli della sua funzione di trasferimento.

2. Domande di Matlab (all'interno dello scritto)

2.1. Impulso rettangolare

Scrivere una funzione Matlab `x=rect_pulse(t)` che produce un impulso rettangolare tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$
Usare tale funzione per creare un impulso di ampiezza D. Mostrare il grafico tale impulso.

2.2. Esponenziale complesso

Si consideri il segnale esponenziale complesso:

$$x(t) = Ae^{(a+j2\pi f)t}$$

L'intervallo temporale è $(0,4)$ a passo $\frac{1}{200}$
Tracciare in una figura (due subplot) modulo e fase di x(t)

2.3. Trasformata di Fourier

Si considerino un segnale reale a tempo continuo x(t) ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore x con passo di campionamento TC scelto opportunamente e con tempi di campionamento tx =Tc(0 : length(x)−1). Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(\omega)$ e le frequenze associate, e quindi dia una rappresentazione grafica del modulo.

2.4. Sistema LTI a tempo discreto

Sia x un vettore Matlab che contiene un segnale a tempo discreto. Il segnale è considerato causale.
Scrivere una funzione che calcola $y(n) = x(n) + ax(n-1)$
Gli ingressi di questa funzione sono a e x
Generalizzare al caso $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x(n-k)$
Gli ingressi sono sono a e x, ma questa volta a è un vettore di N elementi

3. Prova Matlab per punti aggiuntivi

Risolvere uno degli esercizi assegnati durante le esercitazioni