Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Esercizio 1: Sistemi LTI, 7 punti

Sia $\mathcal{S}$ un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$.

1. Discutere causalità e stabilità del sistema.
2. Determinare la risposta in frequenza $H(\omega)$, tracciare il grafico di $|H(\omega)|$ ed individuare i valori di pulsazione per i quali la risposta in frequenza è nulla.
3. Siano dati i segnali:
   - $\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = \cos(3t)$
   - $\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = 1$
   - $\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(t-2k)$, dove a sua volta $z(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-t^2\right)$

   Mostrare che i segnali s, v, w sono periodici ed indicarne il periodo. Sia poi $x(t) = s(t) + v(t) + w(t)$. Il segnale $x(t)$ è periodico?
4. Un generico segnale periodico di periodo T rappresentato tramite serie di Fourier $\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ è messo in ingresso al sistema $\mathcal{S}$. Ricordare l'espressione dei coefficienti di Fourier b_k dell'uscita corrispondente.
5. Usare il risultato precedente e la linearità dei sistemi LTI per calcolare l'uscita y di $\mathcal{S}$ quando l'ingresso è x usando la risposta in frequenza.

   Suggerimento. Calcolare separatamente l'uscita corrispondente ad ognuno dei tre segnali. Per s, conviene ricordare la risposta di un sistema LTI in regime sinusoidale. Per w, conviene calcolare i coefficienti di Fourier b_k di $h * w$ in funzione di a_k e $H(\omega)$ *prima* di trovare un'espressione esplicita di a_k.

Soluzione dell'esercizio 1

1. $h(t)$ ha supporto in $(0,1) \subset \mathbb{R}^+$ dunque il sistema è causale. Inoltre, è anche evidente che $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\, dt = 1$ cioè $h \in \mathcal{L}^1$ e quindi il sistema è stabile.
2. La risposta in frequenza del sistema è la trasformata di Fourier di h. Ricordando che $\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)](\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ e applicando le regole del cambiamento di scale e del ritardo, si ottiene:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right](\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\omega}{2\pi}\right) \qquad \mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)\right](\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)e^{-j\omega}$$

$$H(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)e^{-j\omega} \qquad |H(\omega)| = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|$$

   Tale funzione si annulla quando l'argomento del sinc assume valori interi non nulli, quindi per $\omega = k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}_0$. Il grafico di $|H(\omega)|$ è illustrato in Fig. 1.

3. $v(t)$ è costante, e può essere considerato periodico con periodo qualsiasi. $w(t)$ è ottenuto come replica periodica di periodo $T_w = 2$ del segnale $z(t)$, che a sua volta ha supporto di ampiezza pari a 2. Quindi w è periodico di periodo 2. Infine $s(t)$ è periodico di periodo $T_s = \frac{2\pi}{3}$.

   Invece x non è periodico perché il rapporto tra i periodi di s e w è $\frac{T_s}{T_w} = \frac{2\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{Q}$

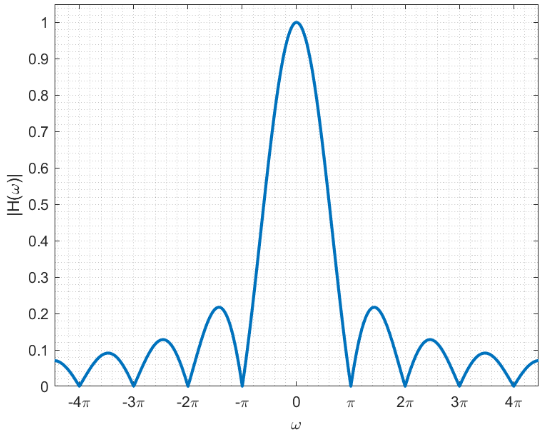

Figura 1: Esercizio 1: Andamento di $H(\omega)$.

4. Detti b_k i coefficienti di Fourier di $h * z$, dove $z(t) = \sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$, si ha

$$b_k = H\left(k\frac{2\pi}{T}\right) a_k$$

5. Rappresentiamo ognuno dei segnali in serie di Fourier e poi calcoliamo i coefficienti dell'uscita.
Per $s(t) = \cos(3t)$ l'uscita è

$$h * s(t) = |H(\omega)| \cos\left(\omega t + \arg H(\omega)\right)$$

abbiamo $\omega = 3$ e quindi $H(3) = \frac{\sin 3}{3} e^{-3j}$. Detto $A = \frac{\sin 3}{3} \approx 0.017$, si ha

$$h * s(t) = A\cos(3t - 3)$$

Per $v(t) = 1$ abbiamo $a_0 = 1$ e $a_k = 0$ qualunque sia $k \neq 0$. Allora i coefficienti di $h * v$ sono $b_0 = 1 * H(0) = 1$ e $b_k = 0$ qualunque sia $k \neq 0$. Quindi

$$h * v(t) = 1$$

.

Infine, per w abbiamo $T_w = 2$ e quindi, detti a_k i coefficienti di Fourier di w si ha:

$$h * w(t) = \sum_k a_k H\left(k\frac{2\pi}{T_w}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_k a_k H\left(k\pi\right) e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = a_0$$

perché $H(k\pi) = 0$ per ogni $k \neq 0$. Quindi

$$h * w(t) = a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} w(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - t^2)\,dt = \frac{2}{3}$$

In conclusione,

$$y(t) = A\cos(3t - 3) + \frac{5}{3}$$

Esercizio 2: Trasformate di Fourier e campionamento, 7 punti

Sia $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{T}t\right)$

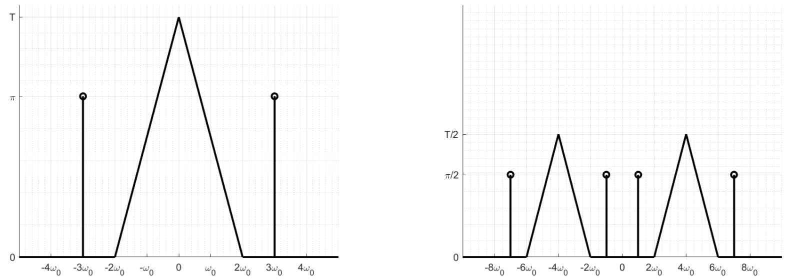

Figura 2: Esercizio 2. Andamento di $X(\omega)$ (sinistra) e $Y(\omega)$ (destra).

1. Calcolare e tracciare la trasformata di Fourier di $x(t)$. **Suggerimento.** Può essere comodo usare la notazione $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$.
2. Calcolare e tracciare la trasformata di Fourier di $y(t) = \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) x(t)$
3. Determinare le minime frequenze di campionamento per i segnali x e y, in modo che sia rispettato il criterio di Nyquist.
4. Dato $h(t) = \frac{3}{2T}\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2T}t\right)$, calcolare $z(t) = h * y(t)$.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Sapendo che $\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}^2(t)\right](\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, applichiamo la regola del cambiamento di scala e otteniamo $\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)\right](\omega) = T\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right)$. Infine, posto $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$, possiamo scrivere:

$$X(\omega) = T\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{T}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{T}\right) = T\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) + \pi\delta\left(\omega - 3\omega_0\right) + \pi\delta\left(\omega + 3\omega_0\right)$$

   L'andamento di tale funzione è illustrato nella Fig. 2 (sinistra).

2. Dalla regola della modulazione abbiamo:

$$\begin{aligned} Y(\omega) =& \frac{1}{2}\left[X(\omega - 4\omega_0) + X(\omega + 4\omega_0)\right] \\ & \frac{T}{2}\left[\Lambda\left(\frac{\omega - 4\omega_0}{2\omega_0}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega + 4\omega_0}{2\omega_0}\right)\right] + \frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega - 7\omega_0\right) + \delta\left(\omega - \omega_0\right) + \delta\left(\omega + 7\omega_0\right) + \delta\left(\omega + \omega_0\right)\right] \end{aligned}$$

   L'andamento di tale funzione è illustrato nella Fig. 2 (destra).

3. Sappiamo che la condizione di Nyquist è $F_c \geq \frac{\omega_{\max}}{\pi}$ Per x abbiamo $\omega_{\max} = 3\omega_0$, quindi $F_c \geq \frac{3\omega_0}{\pi} = \frac{3}{T}$. Invece per y abbiamo $\omega_{\max} = 7\omega_0$, quindi $F_c \geq \frac{7\omega_0}{\pi} = \frac{7}{T}$

4. Si trova $H(\omega) = \frac{3}{2T}\frac{2T}{3}\mathrm{rect}\left(\frac{2}{3T}\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$.

   Quindi $H(\omega)$ è la funzione indicatrice dell'intervallo $\left(-\frac{3}{2}\omega_0, \frac{3}{2}\omega_0\right)$.

   Allora, $Z(\omega) = Y(\omega)H(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right) + \delta\left(\omega + \omega_0\right)\right]$ e cioè

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 t\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Esercizio 3: Trasformata di Laplace, 7 punti

Dati due numeri reali a e b, si considerino i segnali $x(t) = e^{-at}u(t)$ e $y(t) = e^{-bt}u(t)$. Ricordiamo inoltre la seguente trasformata di Laplace, valida per ogni k intero e strettamente positivo:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_0^+, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\lambda t}u(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^k} \qquad \text{ROC} = \{s : \Re(s) > \lambda\}$$

1. Si calcolino le convoluzioni $v = x * x$ e $w = x * y$ usando le proprietà della trasformata di Laplace.
2. Sotto quali condizioni su a e b un sistema $\mathcal{S}$ LTI che ammette $w(t)$ come risposta impulsiva è stabile?
3. Determinare la risposta indiciale di $\mathcal{S}$ (cioè l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t)$).

Soluzione dell'esercizio 3

1. Si ha $X(s) = \frac{1}{s+a}$ e $Y(s) = \frac{1}{s+b}$ e quindi

$$V(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad v(t) = te^{-at}u(t)$$

Se $a = b$, $x = y$ e quindi $w = v$. Se invece $a \neq b$, si ha:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \\ A &= (s+a)W(s)|_{s=-a} = \frac{1}{b-a} \\ B &= (s+b)W(s)|_{s=-b} = \frac{1}{a-b} \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$w(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)u(t)$$

2. Il sistema è stabile se entrambi a e b sono strettamente positivi

3. Detta y la risposta indiciale, si trova:

$$\begin{aligned} Y(s) = W(s)\frac{1}{s} &= \frac{1}{s(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{s} \\ A &= (s+a)Y(s)|_{s=-a} = \frac{1}{a(a-b)} \\ B &= (s+b)W(s)|_{s=-b} = \frac{1}{b(b-a)} \\ C &= sW(s)|_{s=0} = \frac{1}{ab} \\ y(t) &= \left(\frac{1}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt} + \frac{1}{ab}\right)u(t) \end{aligned}$$

Domanda teorica 1 : Campionamento, 4 punti

Ricordare l'enunciato del teorema del campionamento di Shannon ed il criterio di Nyquist nel caso di un generico periodo di campionamento T_C Spiegare perché prima di ogni operazione di campionamento un segnale dovrebbe essere sottoposto ad un filtraggio passa-basso.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : EDOLCC, 4 punti

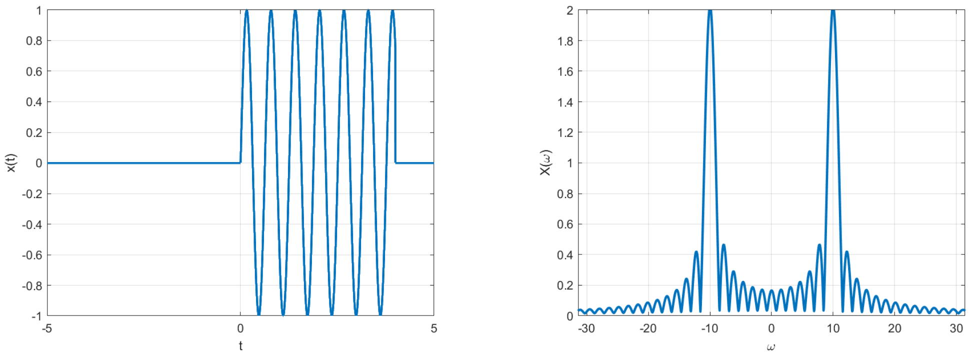

Figura 3: I grafici prodotti dallo script

Ricordare la struttura algebrica dell'insieme $\mathcal{Y}_O$ delle soluzioni dell'omogenea associata ad una equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti (EDOLCC), ed esprimerne una base in termini di radici del polinomio caratteristico dell'EDOLLC.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 4 punti

Si consideri il segnale $x(t) = A\sin(\omega t)\mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(-5, 5)$ campionato a passo $\Delta = 10^{-3}$, con $A = 1$, $T = 2$, $\omega = 10$
2. Tracci in una figura l'andamento di $x(t)$ nel suddetto intervallo.
3. Tracci in una figura, usando la FFT, l'andamento del modulo della trasformata di Fourier di x nell'intervallo di valori di pulsazione $(-10\pi, 10\pi)$. È importante identificare correttamente la scala delle pulsazioni. Per il calcolo della FFT, usare un opportuno zero-padding.

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
%% 4.1
rect = @(t) abs(t)<1/2;
Delta = 1e-3;
t = -5:Delta:5;
A=1; T=2; omega = 10;

x= A*sin(omega*t).*rect((t-T)/(2*T));

%% 4.2
figure(1);
h=plot(t,x,'LineWidth',2);
grid; xlabel('t'); ylabel('x(t)')

%% 4.3
M=2^(3+nextpow2(numel(t)));
X = Delta*fftshift(abs(fft(x,M)));
figure(2);
```

```
omega0 = pi/Delta;
step = 2*omega0/M;
w = -omega0:step:(omega0-step);
plot(w,X,'LineWidth',2);
grid;xlabel('\omega'); ylabel('X(\omega)')
axis([-10*pi 10*pi 0 .5])
```