Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 40 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome, Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Esercizio 1: Sistemi LTI a tempo discreto, 7 punti

Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due sistemi LTI a tempo discreto con risposte impulsive rispettivamente pari a:

$$h_1 : n \in \mathbb{Z} \to \delta(n+1) - \frac{1}{2}\delta(n) \qquad\qquad h_2 : n \in \mathbb{Z} \to 2^{-n}u(n),$$

dove $\delta(n) = 1$ se $n = 0$ e $\delta(n) = 0$ altrimenti. Sia poi $\mathcal{S}$ il sistema formato dalla serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

1. Calcolare le risposte in frequenza $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ dei sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
2. Tracciare l'andamento di $|H_1(\omega)|$ e $|H_2(\omega)|$. **Suggerimento.** Calcolare i moduli quadri $|H_1(\omega)|^2$ e $|H_2(\omega)|^2$ ed usarli per tracciare anche in modo approssimativo gli andamenti richiesti. In particolare, siccome la radice quadrata è una funzione strettamente crescente, basta dedurre l'andamento approssimativo di $|H_1(\omega)|$ da quello di $|H_1(\omega)|^2$. Per H_2, sfruttare il risultato ottenuto per H_1.
3. Determinare la risposta in frequenza del sistema $\mathcal{S}$ e dedurne la risposta impulsiva.
4. Discutere stabilità e causalità dei tre sistemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$.
5. Determinare la risposta $y(n)$ di $\mathcal{S}$ all'ingresso $x(n) = \cos(199.7 \cdot \pi \cdot n) + \cos(54.1 \cdot \pi \cdot n + 255.5 \cdot \pi)$. Esprimere y come somma di sinusoidi in forma canonica.

Soluzione dell'esercizio 1

1. Applicando la definizione di risposta in frequenza per sistemi t.d., abbiamo:

$$H_1(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_1(n)e^{-j\omega n} = e^{j\omega} - \frac{1}{2}$$
$$H_2(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

2. Calcoliamo il modulo quadro di ognuna delle due risposte in frequenza:

$$|H_1(\omega)|^2 = \left|e^{j\omega} - \frac{1}{2}\right|^2 = \left|-\frac{1}{2} + \cos\omega + j\sin\omega\right|^2 = \frac{1}{4} - \cos\omega + 1 = \frac{5}{4} - \cos\omega$$
$$|H_2(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right|^2 = \frac{1}{\left|1-\frac{1}{2}\cos\omega + j\frac{1}{2}\sin\omega\right|^2} = \frac{1}{1-\cos\omega+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}-\cos\omega}$$

L'andamento di $|H_1(\omega)|^2$ è facile da tracciare: un coseno che oscilla tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{9}{4}$, di cui si può tracciare in modo approssimato la radice quadrata. L'andamento di $|H_2(\omega)|$ si ottiene considerando il reciproco della funzione precedente. I grafici di $|H_1(\omega)|$ e $|H_2(\omega)|$ sono illustrati in Fig. 1.

3. La serie di due LTI è un altro LTI la cui risposta impulsiva è la convoluzione delle risposte impulsive. Ne segue che la risposta in frequenza $H(\omega)$ di $\mathcal{S}$ è il prodotto di H_1 e H_2. Si ha:

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = e^{j\omega}\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = e^{j\omega}$$

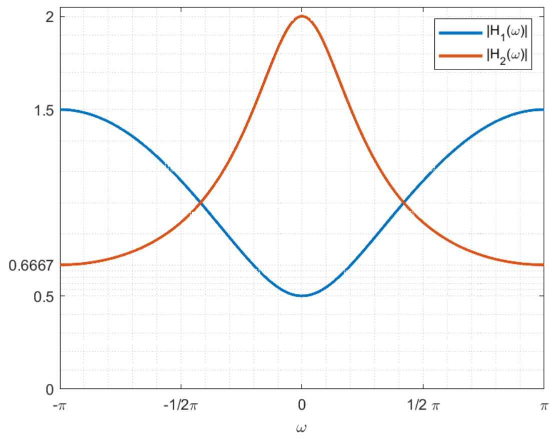

Figura 1: Risposta in frequenza dei sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

e quindi $h(n) = \delta(n+1)$.

4. I tre sistemi sono stabili in quanto le 3 risposte impulsive sono tutte assolutamente sommabili. Il supporto di h_2 è $\mathbb{Z}^+$, quindi $\mathcal{S}_2$ è causale. Invece h e h_1 sono non nulle per $n{=}{-1}$, quindi entrambi i sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$ non possono essere causali. Più precisamente, $\mathcal{S}$ è anticausale poiché $h(n) = 0\ \forall n \geq 0$.

5. Per prima cosa riscriviamo i segnale $x(n)$ come somma di sinusoidi in forma canonica:

$$\cos(199.7 \cdot \pi \cdot n) = \cos\left[(200 - 0.3) \cdot \pi \cdot n\right] = \cos\left[200 \cdot \pi \cdot n - 0.3 \cdot \pi \cdot n\right] = \cos\left(\frac{3\pi}{10} n\right)$$

$$\cos\left(54.1 \cdot \pi \cdot n + 255.5 \cdot \pi\right) = \cos\left(54\pi n + \frac{\pi}{10} n + 256\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10} n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(n) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10} n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo ora che, essendo $h(n) = \delta(n+1)$, allora $y(n) = h * x(n) = x(n+1)$ e quindi

$$y(n) = x(n+1) = \cos\left[\frac{3}{10}\pi(n+1)\right] + \cos\left[\frac{1}{10}\pi(n+1) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{10} n + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10} n - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} n + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10} n - \frac{2\pi}{5}\right)$$

Esercizio 2: Sistema LTI a tempo continuo, 7 punti

Sia $h(t) = -2\cos(3\pi t) \cdot \mathrm{rect}(t)$ la risposta impulsiva di un sistema LTI a tempo continuo $\mathcal{L}$.

1. Discutere la causalità e la stabilità di $\mathcal{L}$.
2. Calcolare $H(\omega)$, cioè la risposta in frequenza di $\mathcal{L}$. Tale funzione ha supporto finito?
3. Determinare l'uscita del sistema quando l'ingresso è $x(t) = \cos(3\pi t)$
4. Determinare la risposta indiciale di $\mathcal{L}$ cioè il segnale $y(t) = h * u(t)$.

Soluzione dell'esercizio 2

1. La funzione h ha supporto in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dunque il sistema è non causale. Inoltre $h \in L^1$, quindi il sistema è stabile.

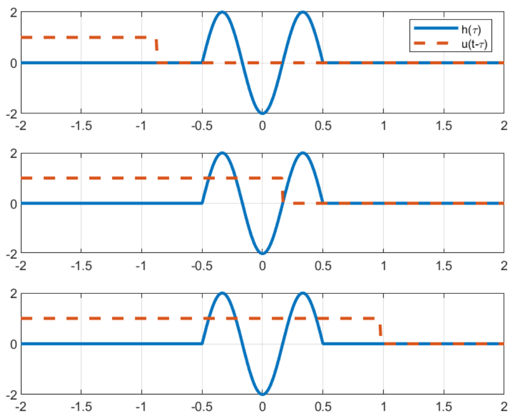

Figura 2: Illustrazione di $h(\tau)$ e di $u(t-\tau)$ per $t < -1/2$ (in alto), $-1/2 < t < 1/2$ (centro) e $t > 1/2$ (in basso). L'asse orizzontale nei tre casi è τ.

2. Usando la proprietà di modulazione si ha:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}(t)\right](\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$
$$H(\omega) = -\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-3\pi}{2\pi}\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega+3\pi}{2\pi}\right)$$

3. L'ingresso è una sinusoide con pulsazione $\omega_0 = 3\pi$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} H(\omega_0) &= H(3\pi) = -\mathrm{sinc}\,(0) - \mathrm{sinc}\,(3) = -1 - 0 = -1 \\ |H(\omega_0)| &= 1 \\ \angle H(\omega_0) &= \pi \\ h * x(t) &= |H(\omega_0)| \cos\left[\omega_0 t + \angle H(\omega_0)\right] = -\cos(3\pi t) \end{aligned}$$

4. Abbiamo i calcoli seguenti:

$$y(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} -2\cos(3\pi\tau) \cdot \mathrm{rect}(\tau)\, d\tau$$

Dalla Fig. 2 appare chiaro che bisogna considerare tre casi:

$$\begin{aligned} &\forall t < -\frac{1}{2} && y(t) = 0 \\ &\forall t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) && y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} -2\cos(3\pi\tau) d\tau = -\frac{2}{3\pi}\left[\sin(3\pi\tau)\right]_{-\frac{1}{2}}^{t} = \frac{2}{3\pi}(1 - \sin(3\pi t)) \\ &\forall t > \frac{1}{2} && y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -2\cos(3\pi\tau) d\tau = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

Esercizio 3: Funzione di trasferimento, 7 punti

Il sistema $\mathcal{S}$ LTI a tempo continuo ha in ingresso il segnale $x(t) = e^{-2t}u(t)$ e produce in uscita il segnale

$y(t) = [1 + \cos(3t)]\, u(t)$. Ricordiamo la seguente trasformata di Laplace, valida per ogni $A, B, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t} u(t) \left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]\right](s) = \frac{A(s-\sigma) + B\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \qquad \text{ROC} = \{s : \Re(s) > \sigma\}$$

1. Determinare $X(s)$ e $Y(s)$, le trasformate di Laplace di $x(t)$ e di $y(t)$.
2. Calcolare quindi $H(s)$, cioè la funzione di trasferimento del sistema e usare tale risultato per determinare l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di cui $\mathcal{S}$ è il sistema LTI causale associato.
3. Si dica se il sistema $\mathcal{S}$ è stabile.
4. Si determini la risposta impulsiva del sistema $\mathcal{S}$.
5. Si determini l'uscita del sistema $\mathcal{S}$ quando l'ingresso è $v(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$. **Suggerimento.** Osservare che v è la combinazione lineare di due segnali per i quali la risposta del sistema è già nota.

Soluzione dell'esercizio 3

1. Usando la formula indicata con $A = 1$, $B = 0$, $\sigma = -2$ e $\omega = 0$, si ottiene

$$X(s) = \frac{1}{s+2}.$$

   Per y conviene considerare separatamente la TL del gradino e la TL del coseno monolatero. Si ha, per $A = 1$, $B = 0$, $\sigma = 0$ e $\omega = 0$, che $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$, mentre per $A = 1$, $B = 0$, $\sigma = 0$ e $\omega = 3$, $\mathcal{L}[\cos((3t)\, u(t)] = \frac{s}{s^2+9}$ e quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+9}$$

   .

2. Abbiamo che $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, quindi:

$$H(s) = (s+2)\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s}\right) = \frac{s^2}{s^2+9} + \frac{2s}{s^2+9} + \frac{2}{s} + 1 = \frac{2s^3 + 4s^2 + 9s + 18}{s^3 + 9s}$$

   Da cui, l'EDOLCC cercata è:

$$y''' + 9y' = 2x''' + 4x'' + 9x' + 18x$$

3. Il grado del numeratore di $H(s)$ è uguale a quello del denominatore, per cui possiamo guardare unicamente alla parte reale delle radici del denominatore. Tali radici sono 0 e $\pm 3j$. La condizione di stabilità è che tutte le radici abbiano parte reale strettamente maggiore di zero. Questo non accade, per cui il sistema non è stabile.

4. Dall'espressione di $H(s)$ trovata in precedenza si ottiene:

$$\begin{aligned} H(s) = &\frac{s^2}{s^2+9} + \frac{2s}{s^2+9} + \frac{2}{s} + 1 = \frac{s^2+9-9}{s^2+9} + 2\frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s} + 1 \\ =&2 - 3\frac{3}{s^2+9} + 2\frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s} \end{aligned}$$

   In alternativa, si può procedere nel modo seguente:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 9s + 18}{s^3 + 9s} = \frac{2(s^3 + 9s - 9s) + 4s^2 + 9s + 18}{s^3 + 9s} = 2 + \frac{4s^2 - 9s + 18}{s^3 + 9s}$$

Posto $W(s) = \frac{4s^2-9s+18}{s^3+9s}$ si ha che le radici di W sono $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega = \pm 3j$ e $\lambda_3 = 0$ dunque abbiamo la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$
\begin{aligned}
W(s) &= \frac{4s^2-9s+18}{s^3+9s} = \frac{A(s-\sigma)+B\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{C}{s} = \frac{As+3B}{s^2+9} + \frac{C}{s} \\
W(s) &= \frac{4s^2-9s+18}{s(s^2+9)} = \frac{As+3B}{s^2+9} + \frac{C}{s}
\end{aligned}
$$

Per il calcolo di C valutiamo $sW(s)$ in zero:

$$C = sW(s)|_{s=0} = \frac{18}{9} = 2.$$

Per il calcolo di A e B valutiamo $W(s)$ in ± 1:

$$
\begin{aligned}
W(1) &= \frac{4-9+18}{1+9} = \frac{A+3B}{1+9} + 2 & W(-1) &= \frac{4+9+18}{-1-9} = \frac{-A+3B}{1+9} - 2 \\
\frac{A+3B}{10} + 2 &= \frac{13}{10} & \frac{-A+3B}{10} - 2 &= -\frac{31}{10} \\
A+3B &= 13-20 = -7 & -A+3B &= -31+20 = -11 \\
2A &= -7+11 = 46B = -7-11 = -18 & & \\
A &= 2 & B &= -3
\end{aligned}
$$

Quindi otteniamo la stessa decomposizione in fratti semplici vista prima. Applicando la formula data, con gli opportuni valori dei parametri, si ottiene infine:

$$h(t) = 2\delta(t) + u(t)\left[-3\sin(3t) + 2\cos(3t) + 2\right]$$

5. Osserviamo che $v(t) = \delta(t) - 2x(t)$ quindi l'uscita corrispondente è:

$$
\begin{aligned}
h * v(t) = h(t) - 2y(t) &= 2\delta(t) + u(t)\left[-3\sin(3t) + 2\cos(3t) + 2\right] - 2\left[1+\cos(3t)\right]u(t) \\
&= 2\delta(t) - 3u(t)\sin(3t)
\end{aligned}
$$

Domanda teorica 1 : TFtd e TFD, 4 punti

1. Mostrare che utilizzando la Trasformata di Fourier Discreta e lo *zero-padding* è possibile ottenere una rappresentazione discreta della trasformata di Fourier a tempo discreto (TFtd) di un segnale $x(n)$ a supporto finito in $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ con risoluzione arbitrariamente fine.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : LTI in regime sinusoidale, 4 punti

1. Ricordare la definizione di risposta in frequenza di un LTI tempo continuo stabile.
2. Mostrare che se $\mathcal{S}$ è un LTI stabile, $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $y(t) = \mathcal{S}[x](t)$, allora esistono delle opportune costanti (rispetto a t), A ϕ, tali che $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ Esprimere tali costanti in termini di $H(\omega)$ (risposta in frequenza di $\mathcal{S}$).

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Sistema LTI, 4 punti

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva. $h(t) = u(t)\cos(10t)e^{-3t}$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Tracci l'andamento di $h(t)$ tra -5 e 10 con passo di campionamento $\Delta = 10^{-3}$.
2. Tracci il modulo della risposta in frequenza del sistema $H(f)$ per $f \in (-30, 30)$ usando la trasformata discreta di Fourier con opportuno zero-padding. A tale scopo, anche se il segnale h non è a spettro limitato, si può considerare trascurabile l'aliasing con il valore prescelto di Δ e nell'intervallo di frequenze considerato. È importante determinare correttamente la scala dell'asse delle **frequenze** (attenzione, le ascisse sono quindi frequenze, non pulsazioni).

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
clearvars; close all;
% 1. Andamento di h tra -5 e 10 con passo 1e-3
Delta = 1e-3;
t = -5:Delta:10;
h = cos(10*t).*exp(-3*t).*(t>=0);
figure;
plot(t,h, 'LineWidth',2);
xlabel('t'); ylabel('h(t)');
grid on;
% 2. Modulo di H tramite fft
M = 2^nextpow2(numel(h)); % Prendiamo la min potenza di 2 superiore a N
H = fftshift(Delta * fft(h,M));
Fc = 1/Delta;
Fs = Fc/2;
step = Fc/M;
F = -Fs:step:(Fs-step);
figure; plot(F,abs(H), 'LineWidth',2);
axis([-30 30 0 max(abs(H(:)))]);
grid; xlabel('f'); ylabel('|H(f)|')
```