Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome, Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Esercizio 1: Segnali a tempo continuo, 7 punti

Siano dati i segnali di variabile reale $x(t) = e^{-t}u(t)$ e $y(t) = tu(t)$, dove $u(t)$ è la funzione gradino.

1. Tracciare l'andamento di x e y e dire se tali segnali appartengono ad uno o più degli spazi $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, con $p \in \{1, 2, \infty\}$.
2. Calcolare $h(t) = x * y\,(t)$ (convoluzione di x e y).
3. Consideriamo 3 sistemi LTI con risposte impulsive rispettivamente date da x, y e h. Discutere la stabilità e la causalità dei tre sistemi e motivare le risposte.
4. Sia $v(t) = \cos(\sqrt{3}t)$ l'ingresso al sistema LTI di risposta impulsiva x. Calcolare l'uscita w corrispondente a tale ingresso, usando la risposta in frequenza del sistema.

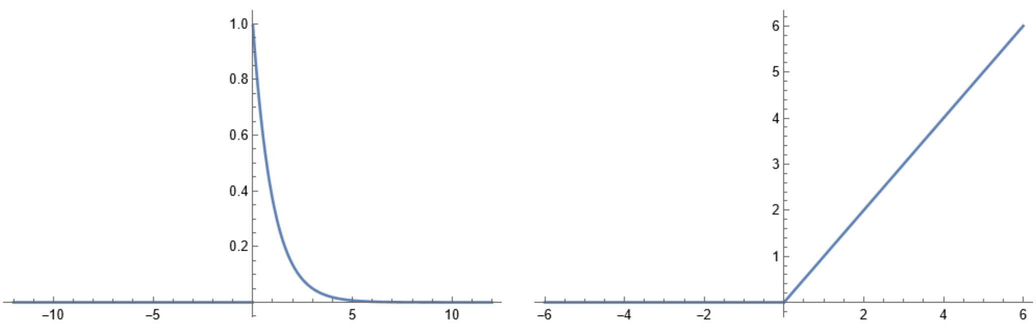
Soluzione dell'esercizio 1

1. I segnali sono mostrati nella Fig. 1. Il segnale x è evidentemente assolutamente integrabile, a energia finita e limitato, quindi appartiene a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Invece y non appartiene a nessuno dei tre.

2. Per il calcolo di h si può lavorare nel dominio del tempo oppure nel dominio di Laplace. È anche possibile utilizzare la TFtc, ma è un po' più complicato, dovendosi usare le distribuzioni.

   Applicando la definizione di convoluzione abbiamo:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$



(a) (b)

Figura 1: I segnali (a) $x(t)$ e (b) $y(t)$

Se $t < 0$ l'integrale è ovviamente nullo. Se invece $t > 0$, usando il trucco della funzione indicatrice abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\forall t > 0,\, h(t) = \int_0^t e^{-\tau}(t-\tau)\, d\tau = t\int_0^t e^{-\tau}\, d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau}\, d\tau \\
&t\int_0^t e^{-\tau}\, d\tau = t\left[-e^{-\tau}\right]_0^t = -te^{-t} + t \\
&\int_0^t \tau e^{-\tau}\, d\tau = \left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau = -te^{-t} - e^{-t} + 1 \\
&\forall t > 0,\, h(t) = te^{-t} + t - \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) = t + e^{-t} - 1
\end{aligned}$$

Si può arrivare allo stesso risultato utilizzando la TL:

$$X(s) = \frac{1}{1+s} \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2} \qquad H(s) = \frac{1}{s^2(1+s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

Per calcolare B e C possiamo usare il solito metodo del prodotto per il fattore a denominatore:

$$\begin{aligned}
B &= (s^2)H(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \\
C &= (s+1)H(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1} = 1
\end{aligned}$$

Ricordiamo che questo metodo non può essere usato per il coefficiente A in quanto la radice corrispondente è di ordine maggiore di 1. Basterà calcolare $H(s)$ per un s qualsiasi (non un polo), usando i valori noti di B e C:

$$H(s) = \frac{1}{s^2(1+s)} = \frac{A}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \qquad H(1) = \frac{1}{1+1} = A + 1 + \frac{1}{1+1} \qquad A = -1$$

Usando le tabelle della TL inversa, si ottiene come prima $h(t) = (t + e^{-t} - 1)\, u(t)$.

3. I tre segnali hanno supporto $\mathbb{R}^+$, quindi i tre sistemi sono causali. Solo x è assolutamente integrabile, quindi solo il primo sistema è stabile.

4. Calcoliamo per prima cosa la RF del sistema con RI x. Si può effettuare il calcolo diretto, oppure osservare che $X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega}$.
   Poniamo ora $z = X(\omega)|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{1}{1+j\sqrt{3}}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \frac{1}{|1+j\sqrt{3}|^2} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \qquad\qquad |z| = \frac{1}{2} \\
\arg z &= -\arg\left(1+j\sqrt{3}\right) = -\operatorname{atan}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

   Cioè $X\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$. Allora

$$w(t) = |z|\cos\left(\sqrt{3}t + \arg z\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Esercizio 2: Segnali a tempo discreto, 7 punti

Sia $u(n)$ la sequenza gradino discreta (cioè $u(n) = 0$ per n intero negativo e $u(n) = 1$ per n nullo o intero positivo). Siano inoltre definiti i seguenti segnali:

$$x_1 = u(25 - n^2) \qquad\qquad x_2(n) = -n \cdot x_1(n) \qquad\qquad y(n) = x_1 * x_2(n)$$

1. Per ognuno dei 3 segnali, determinare il supporto e l'appartenenza o meno agli spazi $\ell^1(\mathbb{Z})$, $\ell^2(\mathbb{Z})$, $\ell^\infty(\mathbb{Z})$
2. Tracciare l'andamento dei segnali x_1 e x_2
3. Mostrare che la TFtD del segnale a tempo discreto $w_N(n) = \mathrm{rect}_N(n)$ (impulso rettangolare discreto, non nullo da $-N$ a N) è $W_N(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$
4. Calcolare $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $Y(\omega)$, in termini di $W_N(\omega)$ e $W'_N(\omega)$ con N opportuno da determinare (non si richiede il calcolo esplicito di quest'ultima funzione)

Soluzione dell'esercizio 2

1. Si riconosce che $x_1(n)$ è non nullo se e solo se $25 - n^2 \geq 0$, cioè $|n| \leq 5$, e per tali valori di n il segnale vale 1. Abbiamo allora $x_1(n) = \mathrm{rect}_5(n)$. Si tratta quindi di un segnale a supporto finito, quindi è necessariamente limitato, assolutamente sommabile e ad energia finita. Siccome x_2 è il prodotto di x_1 con $-n$, il supporto non può essere più grande di quello di x_1. Allora anche tale segnale appartiene ai tre spazi. Infine, $y(n)$ è la convoluzione di sequenze a supporto limitato e quindi è anch'essa a supporto limitato e a valori finiti. Quindi anche y appartiene ai tre spazi.

2. Si veda Fig. 2.

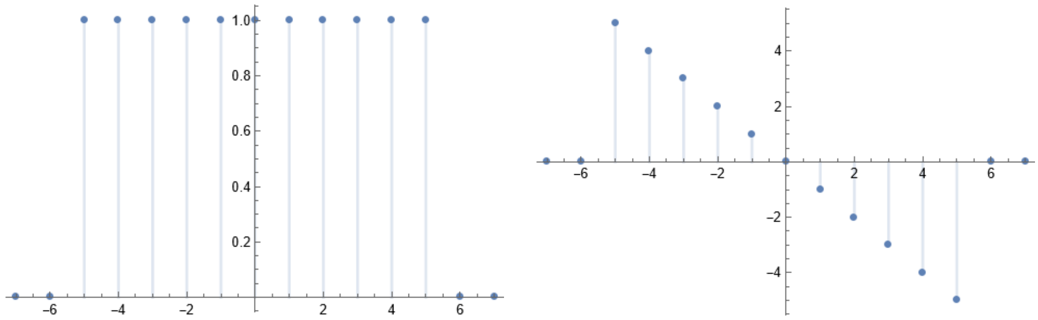


Figura 2: Andamento dei segnali x_1 e x_2.

3. Si trova:

$$\begin{aligned} W_N(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N}\sum_{n=0}^{2N} e^{j\omega n} \\ &= e^{-j\omega N}\frac{1-e^{j\omega(2N+1)}}{1-e^{j\omega}} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Ricordando che il passaggio 1 vale solo per $\omega \neq 2k\pi$, ma che l'espressione di $W(\omega)$ si prolunga in $2k\pi$ per continuità.

4. Abbiamo $x_1(n) = \mathrm{rect}_5(n)$ quindi $X(\omega) = W_N(\omega)$ con $N = 5$. Ricordiamo poi che dato un segnale $v(n)$ con trasformata $V(\omega)$, se $nv(n)$ è ancora assolutamente sommabile allora la sua trasformata è $jV'(\omega)$. Allora, siccome $x_2(n) = -nx_1(n)$, si ha $X_2(\omega) = -jW'_N(\omega)$. Infine, per la regola della convoluzione, $Y(\omega) = -jW_N(\omega)W'_N(\omega)$

Esercizio 3: Funzione di trasferimento, 7 punti

Il sistema LTI a tempo continuo causale $\mathcal{S}$ ha in ingresso il segnale $x(t) = e^{-t/T}u(t)$ e produce in uscita il segnale $y(t) = [1 - \cos(\omega t)]\, e^{-t/T}u(t)$, con T, ω reali strettamente positivi. Ricordiamo la seguente trasformata di Laplace, valida per ogni $A, B, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t}u(t)\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]\right](s) = \frac{A(s-\sigma) + B\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \qquad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > \sigma\}$$

1. Determinare $X(s)$ e $Y(s)$, le trasformate di Laplace di $x(t)$ e di $y(t)$.
2. Calcolare quindi $H(s)$, cioè la funzione di trasferimento del sistema e usare tale risultato per determinare l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di cui $\mathcal{S}$ è il sistema LTI causale associato.
3. Si dica se il sistema $\mathcal{S}$ è stabile, motivando la risposta
4. Si determini la risposta impulsiva del sistema $\mathcal{S}$.
5. Esistono valori (sempre strettamente positivi) dei parametri T e ω che rendono il sistema risonante? (Cioè tale che, l'uscita associata a un opportuna sinusoide ha la forma di una sinusoide moltiplicata per un polinomio di grado maggiore o uguale a 1)

Soluzione dell'esercizio 3

1. Usando la formula indicata con $A = 1$, $B = 0$, $\sigma = -1/T$ e $\omega = 0$, si ottiene

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > -1/T\}.$$

   Per y conviene osservare che $y(t) = x(t) - \cos(\omega t)\, e^{-t/T}u(t)$ Si ha, per $A = 1$, $B = 0$ e $\sigma = -1/T$, che $\mathcal{L}\left[\cos((\omega t)\, e^{-t/T}u(t)\right] = \frac{s+\frac{1}{T}}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2+\omega^2}$ e quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} - \frac{s + \frac{1}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{\left(s + \frac{1}{T}\right)\left[\left(s + \frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2\right]}$$

   . La ROC è ancora $\quad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > -1/T\}$

2. Abbiamo che $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, quindi:

$$H(s) = \frac{\omega^2\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)\left[\left(s + \frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2\right]} = \frac{\omega^2}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2} + \omega^2}$$

   La ROC è ancora $\quad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > -1/T\}$. Da quanto ottenuto, l'EDOLCC cercata è:

$$y'' + \frac{2}{T}y' + \left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right) = \omega^2 x$$

3. Il grado del numeratore di $H(s)$ è minore di quello del denominatore, per cui possiamo guardare unicamente alla parte reale delle radici del denominatore. Tali radici sono $-\frac{1}{T} \pm j\omega$. La condizione di stabilità è che tutte le radici abbiano parte reale strettamente minore di zero. La parte reale delle radici è $-1/T$, che nelle ipotesi date è sempre strettamente negativo. Il sistema è sempre stabile.

4. Dall'espressione di $H(s)$ trovata in precedenza, applicando la formula della TL data nel testo con $A = 0$, $B = \omega$, $\sigma = -1/T$, si ottiene:

$$h(t) = \omega e^{-\frac{t}{T}} \sin(\omega t) u(t)$$

5. Un sistema risonante non è stabile, in quanto l'uscita associata ad un ingresso limitato (sinusoide) è non limitata (sinusoide moltiplicata per polinomio di grado almeno 1). Siccome il sistema considerato è sempre stabile, la risposta è no.

   Un altro modo di trovare la riposta è di ricordare che i sistemi LTI di secondo grado (come $\mathcal{S}$) devono avere EDOLCC nella forma $y'' + ay = bx$ per essere risonanti ($a > 0$). Nel nostro caso, il coefficiente di y' è $\frac{2}{T} \neq 0$.

   Nel limite $T \to +\infty$, l'EDOLCC tende alla forma risonante - e infatti le radici del polinomio caratteristico tendono a $\pm j\omega$ (sistema instabile).

Domanda teorica 1 : Serie di Fourier, 4 punti

Ricordare le formule di analisi e sintesi della serie di Fourier. Sia $x(t)$ un segnale periodico in $\mathcal{L}^1(T)$, sia $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e siano, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a_k i coefficienti della serie di Fourier di x. Mostrare che se x è pari, $a_k = a_{-k}$, e che se invece x è dispari, $a_k = -a_{-k}$.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda teorica 2 : Campionamento, 4 punti

Ricordare l'enunciato del teorema del campionamento di Shannon e la formula d'interpolazione ideale nel caso di passo di campionamento generico T_C. Ricordare la formula della frequenza di Nyquist ed il suo utilizzo nel progetto di un convertitore analogico/digitale.

Soluzione dell'esercizio

Vedere il testo o gli appunti del corso.

Domanda di Matlab : Sistema LTI, 4 punti

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ a supporto limitato, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore `x` con passo di campionamento `TC` scelto opportunamente e con tempi di campionamento `tx=TC*(0 : length(x)-1)`. Si chiede di ideare uno script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier di $x(t)$ e le **frequenze** associate, e quindi dia una rappresentazione grafica del modulo. Si supponga che $X(f) \approx 0$ per $f \geq F_{\max}$, con $F_{\max} = \frac{F_C}{2} = \frac{1}{2T_C}$. Usare lo zero-padding per ottenere un numero di campioni di $X(f)$ almeno doppio del numero di campioni di $x(t)$.

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
% Il vettore x contiene i campioni del segnale
% Calcoliamo i campioni di X(f) tramite FFT, usando lo zero-padding
M = 2^(nextpow2(numel(x)+1));
X = Tc*fft(x,M);
% Adesso determiniamo i valori di frequenza corrispondenti ai campioni:
% Il passo di campionamento è Tc
Fc = 1/Tc;
% Usando la FFT possiamo stimare lo spettro fino alla freq. Fmax = Fc/2
Fmax = Fc/2;
```

```
% La FFT produce i campioni dello spettro campionati con passo Fc/M
step = Fc/M;
F = -Fmax:step:(Fmax-step);

figure; plot(F,abs(X), 'LineWidth',2);
grid; xlabel('f'); ylabel('|X(f)|')
```