Corso di Segnali e Sistemi
Ingegneria Elettronica
Università degli Studi di Padova

Laboratorio 05

- Trasformata di Fourier a Tempo Continuo

Richiami teorici sulla trasformata di Fourier

Attenzione, il simbolo → **non indica un limite**, ma il ruolo delle variabili: la prima è la variabile d'integrazione, la seconda la variabile indip. della trasformata

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\big(x(\cdot)\big)(\omega) = \mathcal{F}(x(t), t \to \omega)$$

Trasformate note:

$x(t)$	$X(\omega)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-\sigma t} u(t), \qquad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
$-e^{-\sigma t} u(-t), \qquad \sigma < 0$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
$e^{-\sigma \lvert t \rvert}, \qquad \sigma > 0$	$\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_0)$

Richiami teorici sulla trasformata di Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\big(x(\cdot)\big)(\omega) = \mathcal{F}(x(t), t \to \omega)$$

Proprietà

Ricordiamo che R è l'operatore di ribaltamento

$$\mathcal{F}(R(x)) = R(X)$$
$$\mathcal{F}(\bar{x}) = \overline{R(X)}$$
$$x(t) = \overline{x(t)} \Rightarrow X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$
$$x(t) = x(-t) \Rightarrow X(\omega) = X(-\omega)$$
$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(\omega) = -X(-\omega)$$
$$x \text{ reale e pari} \Rightarrow X \text{ reale e pari}$$
$$x \text{ reale e dispari} \Rightarrow X \text{ immaginario e pari}$$

Le dimostrazioni sono tutte immediate per sostituzione nella definizione di TdF

Proprietà della trasformata di Fourier

Esercizio 1: carta e penna

Se $X(\omega) = \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)$, provare le proprietà seguenti:

1. Traslazione:
   $\forall t_0 \in \mathbb{R},\ \ \mathcal{F}\big(x(t - t_0)\big)(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

2. Modulazione:
   $\forall \omega_0 \in \mathbb{R},\ \ \mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t} x(t)\right)(\omega) = X(\omega - \omega_0)$

3. Modulazione 2:
   $\forall \omega_0 \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(x(t) \cos \omega_0 t)(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$

4. Cambio scala:
   $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \ \mathcal{F}\big(x(at)\big)(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^*$ è l'insieme dei numeri reali diversi da zero

Suggerimento: applicare la definizione di TdF ed opportuni cambi di variabile negli integrali
Suggerimento per il punto 3. Decomporre il coseno con la formula di Eulero ed usare 2. e linearità.

Proprietà della trasformata di Fourier

Esercizio 1: soluzioni

Se $X(\omega) = \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)$,

1. $\mathcal{F}\big(x(t-t_0)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j\omega(s+t_0)}ds = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

2. $\mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t}x(t)\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = X(\omega-\omega_0)$

3. $\mathcal{F}(x(t)\cos\omega_0 t)(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)x(t)\right) = \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)]$

4. $\mathcal{F}\big(x(at)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-\frac{j\omega s}{a}}\frac{ds}{|a|} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

In 1. abbiamo usato $s = t - t_0$ e quindi $s = t + t_0$ e $dt = ds$

In 4. abbiamo usato $s = at$ e quindi $s = \frac{t}{a}$ e $dt = \frac{ds}{|a|}$

Proprietà della trasformata di Fourier

ULTERIORI PROPRIETÀ da ricordare

Se $X(\omega) = \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)$, $Y(\omega) = \mathcal{F}(y(t))(\omega)$,

5. Prodotto nel tempo → Convoluzione in frequenza:
$$\mathcal{F}(x(t)y(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$
6. Convoluzione nel tempo → Prodotto in frequenza:
$$\mathcal{F}(x(t) * y(t))(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$
7. Dualità:
$$\mathcal{F}\big(X(t)\big)(\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

5. e 6. senza dimostrazione. Per la 7. basta osservare che:
$$\mathcal{F}\big(X(t)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt = 2\pi \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{j(-\omega)t}dt = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(X(t), t \to -\omega\,)$$
$$= 2\pi x(-\omega)$$

ESEMPIO DUALITÀ: Siccome $\mathcal{F}\big(\mathrm{rect}(t)\big) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, allora
$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)(\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$$
Usando il cambiamento di scala $\mathcal{F}\big(\mathrm{sinc}(t)\big)(\omega) = \mathrm{rect}(\omega/2\pi)$

Esercizio 2

Parte 1, carta e penna:

2.1 Usando la proprietà del cambiamento di scala e la tabella delle trasformate, provare che

$$\forall D \in \mathbb{R}^+, \qquad x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \Rightarrow X(\omega) = D\mathrm{sinc}\left(D\,\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Parte 2, Matlab

2.2 Verificare che si può ottenere la funzione $\mathrm{rect}(t)$ creando il file `rect_pulse.m` con il codice seguente:

```
function x=rect_pulse(t)
%RECT_PULSE
x = double((t>-0.5)&(t<(0.5)));
end
```

Per la verifica si può usare lo script seguente:

```
%% Creazione del segnale rect(t/D)
Delta = 1e-3;
tmin = -10; tmax = 10;
t = tmin:Delta:tmax;
D = 2;
rect = rect_pulse(t/D);
%% Grafico del segnale
figure(1); plot(t,rect); grid minor;
axis([tmin tmax -0.2 1.2])
```

Esercizio 2

Parte 3, Matlab

2.3 **Calcolo numerico della trasformata di Fourier.**

Per un valore fissato della pulsazione, sia ω_0, l'integrale di Fourier si può approssimare come somma discreta, scegliendo un opportuno passo di discretizzazione Δ:

$$X(\omega_0) \approx \Delta \sum_k x(k\Delta)\, e^{-j\omega_0 k\Delta}$$

Suggerimento: in Matlab i $k\Delta$ sono stati già calcolati: in quale variabile sono contenuti?

Usare questa approssimazione per calcolare $X(\omega_0)$ con ω_0 che varia da -30π a 30π con passo $\frac{1}{10}$

Misurare il tempo di esecuzione con i comandi `tic` e `toc`

Poi confrontare il risultato ottenuto dal calcolo numerico con quello teorico

Domanda: come ridurre l'errore di approssimazione?

```
%% Trasformata di Fourier: teoria e calcolo numerico
clear variables
close all

%% Creazione del segnale rect(t/D)
Delta = 1e-3;
tmin = -10; tmax = 10;
t = tmin:Delta:tmax;
D = 2;
rect = rect_pulse(t/D);

%% Grafico del segnale
figure(1); plot(t,rect); grid minor;
axis([tmin tmax -0.2 1.2])

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
x=rect;  % segnale da trasformare
DW = 1e-1; % passo di campionamento dell'asse omega
wmin = -30*pi; wmax = 30*pi;
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_rect=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic  % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_rect(index) = Delta * sum(               );
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro

%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
X_teorico =  D*sinc(D*w/(2*pi));
figure(2);
plot(w,real(X_rect),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor;
legend('X(\omega) calcolato', 'D sinc(D \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```

Esercizio 3

Parte 1, carta e penna:

3.1 Usando dualità, cambiamento di scala e modulazione, provare che

$$\forall D, \omega_1 \in \mathbb{R}^+,$$

$$x(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{D}\right)\cos(\omega_1 t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{D}{2}\left[\operatorname{rect}\left(D\frac{\omega-\omega_1}{2\pi}\right) + \operatorname{rect}\left(D\frac{\omega+\omega_1}{2\pi}\right)\right]$$

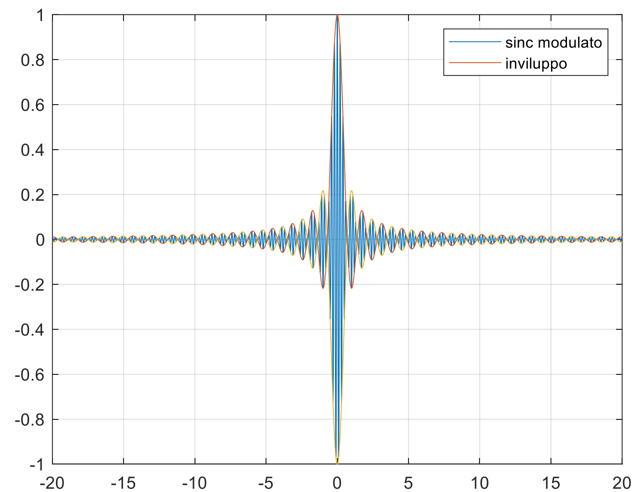
Tracciare l'andamento qualitativo di $X(\omega)$

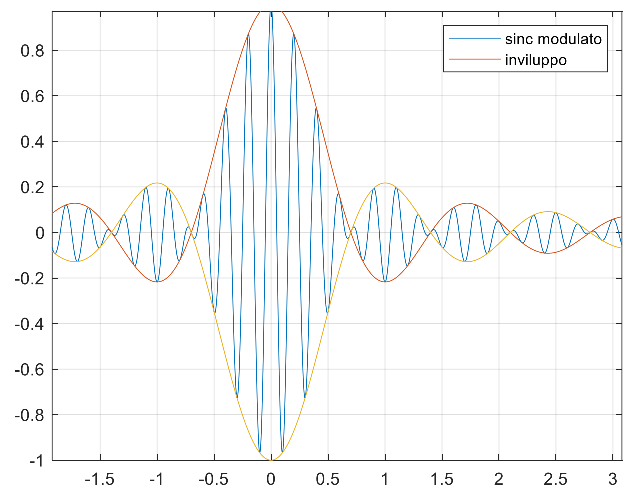
Parte 2, Matlab

3.2 Tracciare l'andamento di e del suo $x(t)$ inviluppo.

Testare diversi valori di D e di ω_1

```
%% Il sinc modulato
Delta = 1e-3;
tmin = -20; tmax = 20;
t = tmin:Delta:tmax;
D = 0.7;
w1 = 10*pi;
sinc_modulato = ;
figure(3);
plot(t,sinc_modulato,t,sinc(t/D),t,-sinc(t/D));
axis([tmin tmax -1 1]);
legend('sinc modulato', 'inviluppo'); grid;
```





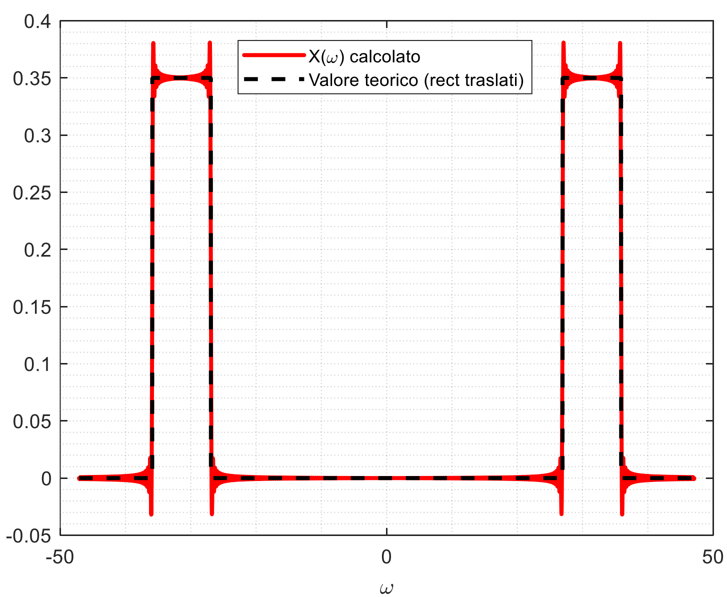
Esercizio 3

Parte 3, Matlab

3.3 **Calcolo numerico della trasformata di Fourier.**

Come prima, calcolare numericamente la TdF del sinc modulato e poi confrontare il risultato ottenuto dal calcolo numerico con quello teorico

Domanda: Questa volta l'errore è più grande, perché? Come ridurlo?




```
%% Il sinc modulato
Delta = 1e-3;
tmin = -20; tmax = 20;
t = tmin:Delta:tmax;
D = 0.7;
w1 = 10*pi;
sinc_modulato = sinc(t/D).*cos(w1*t);
figure(3);
plot(t,sinc_modulato,t,sinc(t/D),t,-sinc(t/D));
axis([tmin tmax -1 1]);
legend('sinc modulato', 'inviluppo'); grid;
```

```
%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
x=sinc_modulato;  % segnale da trasformare

DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
wmin = -15*pi; wmax = 15*pi; % estremi dell'intervallo delle pulsazioni
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_sincmodulato=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic  % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_sincmodulato(index) = Delta * sum(x.*exp(-1i*w0*t));
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro
```

```
%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
X_teorico = D/2*(rect_pulse([redacted])+rect_pulse([redacted]));
figure(4);
plot(w,real(X_sincmodulato),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor;
legend('X(\omega) calcolato', 'Valore teorico (rect traslati)');
xlabel('\omega')
```

Esercizio 4

Parte 1, carta e penna:

4.1 Ricordando che l'impulso triangolare si ottiene come convoluzione di 2 rect:

$$\text{triang}(t) = (1 - |t|)\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = (\text{rect} * \text{rect})(\text{t})$$

Calcolare la TdF di un impulso triangolare di durata $2D$:

$$x(t) = \text{triang}\left(\frac{t}{D}\right) = \frac{1}{D}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) * \text{rect}\left(\frac{\text{t}}{\text{D}}\right)\right)(\text{t})$$

$$\Rightarrow X(\omega) = D\,\text{sinc}^2\left(D\,\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

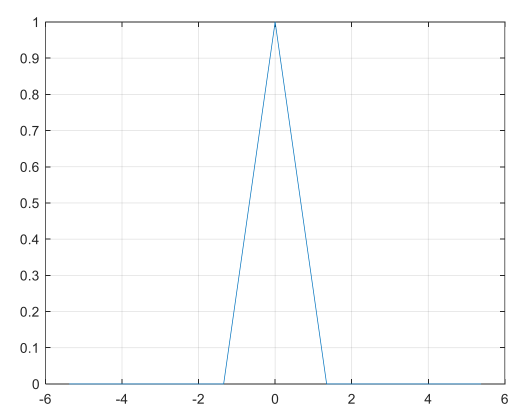
Suggerimento: calcolare prima la TdF di $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$ e poi applicare il cambiamento di scala

Parte 2, Matlab

4.2 Verificare che la convoluzione di due rect dà l'impulso triangolare

```
%% Convoluzione e prodotto
%% Creazione del segnale rect(t/D)
Delta = 1e-3;
D = 1.345; % Durata del rect
tmin = -2*D; tmax = 2*D;
t = tmin:Delta:tmax;
rect = rect_pulse(t/D);

%% Creazione del segnale impulso triangolare
triang  = Delta*conv(r[redacted]t)/D;
t_conv = 2*tmin:Delta:2*tmax;
figure(5);
plot(t_conv, triang);
grid;
```

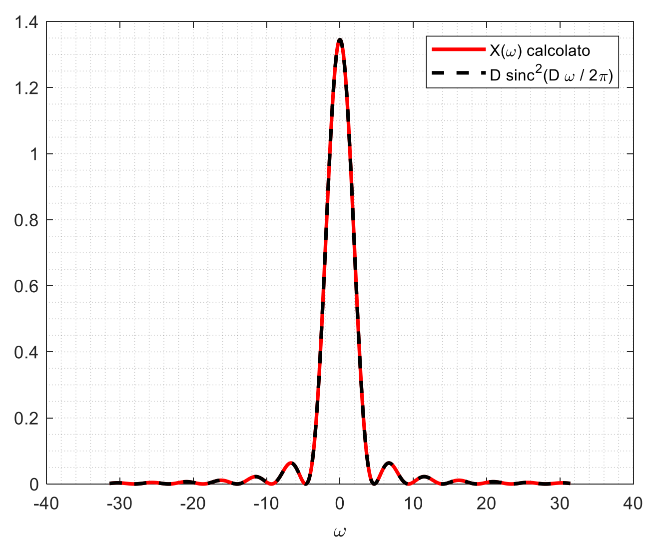


Esercizio 4

Parte 3, Matlab

4.3 **Calcolo numerico della trasformata di Fourier.**

Come prima, calcolare numericamente la TdF dell'impulso triangolare e confrontare con l'espressione teorica




```
%% Convoluzione e prodotto
%% Creazione del segnale rect(t/D)
Delta = 1e-3;
D = 1.345; % Durata del rect
tmin = -2*D; tmax = 2*D;
t = tmin:Delta:tmax;
rect = rect_pulse(t/D);

%% Creazione del segnale impulso triangolare
triang  = Delta*conv(rect,rect)/D;
t_conv = 2*tmin:Delta:2*tmax;
figure(5);
plot(t_conv, triang);
grid;

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
x=triang;  % segnale da trasformare

DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
wmin = -10*pi; wmax = 10*pi; % estremi dell'intervallo delle pulsaz
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_triang=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic  % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione

    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_triang(index) = Delta * sum(x.*exp(-1i*w0*t_conv));
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro

%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
X_teorico =  D*(sin[redacted])).^2;
figure(6);
plot(w,real(X_triang),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor;
legend('X(\omega) calcolato', 'D sinc^2(D \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```

Appendice: TdF esponenziale immaginario

Soluzione dell'esercizio sulla TdF del segnale esponenziale immaginario
Vogliamo provare che se $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, la sua TdF è $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Sia allora $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ (cioè f è assolutamente integrabile, ad energia finita, continua, derivabile e con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$).

Per mostrare che $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ è una delta, proviamo la proprietà di campionamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)f(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt\right]f(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}f(\omega)d\omega\right]dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}F(t)\ dt = 2\pi f(\omega_0)$$

Dove abbiamo applicato: definizione di $X(\omega)$, teorema di Fubini per lo scambio d'ordine d'integrazione, definizione della TdF di f (seppur con la variabile t a giocare il ruolo di "pulsazione" e ω quello di "tempo") teorema di convergenza puntuale per l'antitrasformata di f (ancora con ruoli di t e ω scambiati rispetto all'usuale). Confrontando il risultato con la proprietà di campionamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)f(\omega)d\omega = 2\pi f(\omega_0) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \omega_0)f(\omega)d\omega$$

si deduce la tesi $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$