Corso di Segnali e Sistemi
Ingegneria Elettronica
Università degli Studi di Padova
(Esercitazione creata dai Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man,
aggiornamento prof. M. Cagnazzo)
A.A. 2022/2023

Laboratorio 03

- Sistemi a Tempo Discreto

Un sistema ecologico

Sia $y(n)$ il numero di individui di una popolazione di una data specie nell'anno n

Supponiamo di conoscere tale valore per $n = -1$ (condizione iniziale)

Negli anni seguenti, la popolazione è ottenuta da quella dell'anno precedente con le modifiche seguenti:

- La natalità comporta un aumento di popolazione proporzionale a $y(n-1)$. Il coefficiente di proporzionalità è il tasso di natalità $b(n-1)$
- La mortalità comporta una riduzione di popolazione proporzionale a $y(n-1)$. Il coefficiente di proporzionalità è il tasso di mortalità $m(n-1)$
- La popolazione può aumentare se ci sono arrivi da un'altra popolazione: $x(n)$
- Infine, per semplicità, non imponiamo il vincolo che i valori di x e y debbano essere interi

Un sistema ecologico

Dato quanto detto in precedenza, la popolazione all'anno n è descritta dalla seguente equazione:

$$y(n) = y(n-1) + b(n-1)y(n-1) - m(n-1)y(n-1) + x(n)$$

- Si noti che $b(\cdot)$ e $m(\cdot)$ sono segnali, ma li considereremo come parametri del sistema. Ugualmente considereremo la condizione iniziale su y, per esempio il valore in $n = -1$ come parametro.
- Tali parametri sono considerati noti.
- Allora si può considerare un sistema con $x(n)$ come ingresso e $y(n)$ come uscita.

$$y(n) = [1 + b(n-1) - m(n-1)]y(n-1) + x(n)$$

Un sistema ecologico

$y(n) \;=$
$[1 + b(n-1) - m(n-1)]y(n-1)$
$+x(n)$

Il Sistema è definito dall'equazione precedente e dai parametri $y(-1), b(\cdot), m(\cdot)$

Esercizio 1. Dire se tale sistema è istantaneo o dinamico, lineare, tempo invariante.

Esercizio 2. Si consideri ora il caso in cui $b(n) = B\ \forall n$ e $m(n) = M\ \forall n$ e $y(n) = 0\ \forall n < 0$. In altre parole,

$$y(n) = [1 + B - M]y(n-1) + x(n)$$

Notare che $M < 1$ (non possono morire più individui di quanti ne esistevano l'anno prima)

Tale sistema è LTI. Provate a stabilirne stabilità e causalità. Se troppo difficile, cominciare a calcolare la risposta impulsiva ed usarla per rispondere.

$$\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) = [1 + B - M]y(-1) + \delta(0) = \delta(0) = 1$$
$$\boldsymbol{h}(\mathbf{1}) = [1 + B - M]\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) + \delta(1) = \cdots$$
$$\boldsymbol{h}(\mathbf{2}) = [1 + B - M]\boldsymbol{h}(\mathbf{1}) + \delta(2) = \cdots$$

...

Esercizio 3

Creare una funzione che, dati i parametri di sistema
y_init (=y[-1]), M, B ed il segnale d’ingresso x[n], restituisca un vettore contenente l’uscita y[n] cioè la numerosità della popolazione y[n] (della stessa lunghezza di x).

Per semplicità, non imponiamo il vincolo che i valori di x e y debbano essere interi.

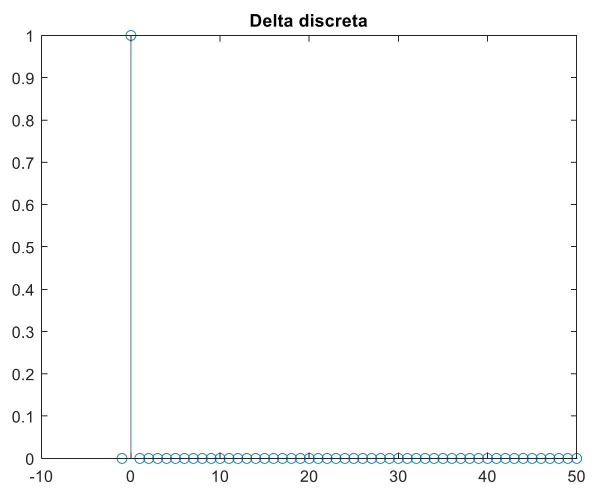
Nota: salvare la funzione in un file con lo stesso nome della funzione e con estensione .m

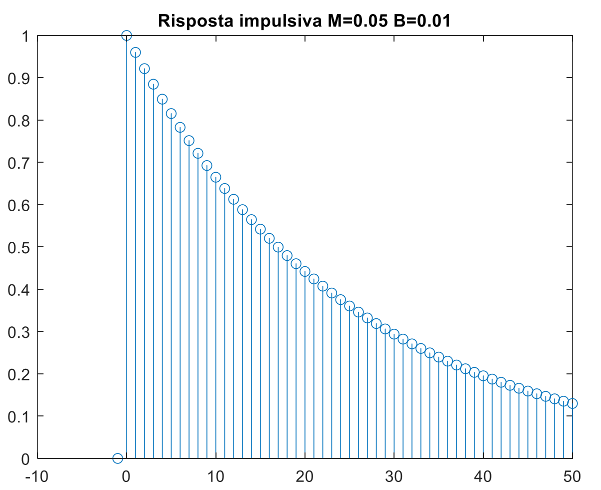
```
function y = popolazione(y_init, M, B, x)
%y=popolazione(y_init, m, b, x)
%Calcola l'andamento del numero y d'individui. Gli ingressi sono:
%  - y_init: popolazione iniziale (all'instante 1)
%  - m: tasso mortalità
%  - b: tasso natalità
%  - x: vettore ingresso individui esterni

% preparo il vettore di uscita: stessa dimensione di x, ma valori nulli
y = zeros(size(x));
% Inizializzazione del primo valore di y
% NB In Matlab l'indicizzazione dei vettori comincia da 1, non da zero!
y(1)=[redacted]
% ciclo di aggiornamento
for n = 2:numel(y)
    y(n) = [redacted]
end
```

Esercizio 4

Usare tale funzione per valutare numericamente la risposta impulsiva. Cambiare i parametri e verificare la stabilità

```
B = 0.01;  M = 0.05; y_init = 0;
anni = -1:50;
delta = zeros(size(anni)); %
delta(2) = 1; % l'anno 0 si trova in posizione 2
figure(1);
stem(anni,delta); % mostra la Delta discreta
title ('Delta discreta');

h = popolazione(y_init,M,B,delta);
figure(2);
stem(anni,h);
title(sprintf('Risposta impulsiva M=%3.2f B=%3.2f',M,B));
```



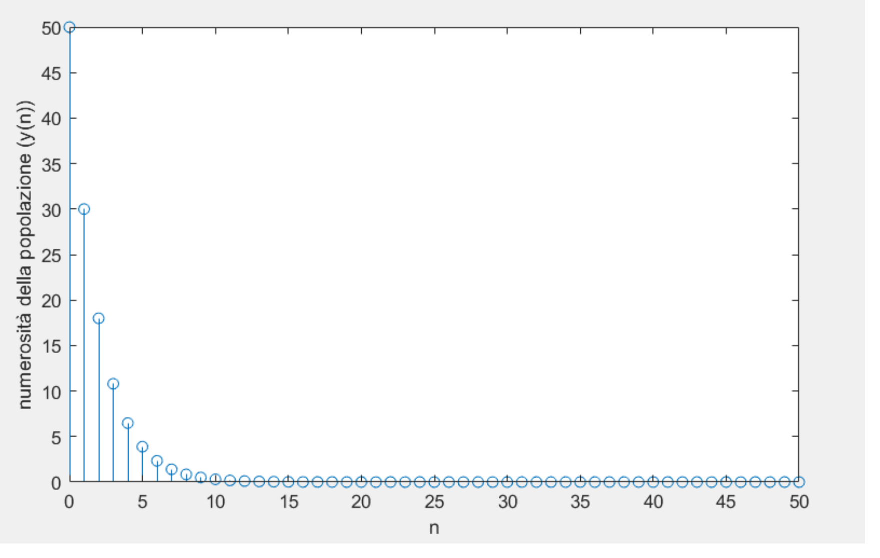


Esercizio 5

- In caso di natalità nulla (b=0) e nessun ingresso di individui provenienti da altre popolazioni (x[n]=0 ∀n), la specie tende ad estinguersi con un tasso di mortalità pari a m

$$y[n] = y[n-1] - m \cdot y[n-1]$$

- Usando la funzione creata all'Esercizio 3, determinare e plottare y[n] nel caso che y_init=50, m=0.4.



Nota: Per plottare il segnale a tempo discreto usare il comando ***stem*** invece di ***plot*** (si veda l'help in linea)

Parte 2: Serie di Fourier dell'onda quadra

Ricordiamo che l'onda quadra $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$ ammette la serie di Fourier:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

Esercizio: esprimere la serie di Fourier in termini di funzioni coseno.

Parte 2: Serie di Fourier dell’onda quadra

Ricordiamo che l’onda quadra $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$ ammette la serie di Fourier:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

Esercizio: esprimere la serie di Fourier in termini di funzioni coseno.

Soluzione:
Decomponiamo la somma per $m \geq 0$ e $m < 0$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}+\frac{1}{\pi}\sum_{m<0}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

Nella seconda serie, poniamo $\ell = -m-1$. Allora la somma è su $\ell \geq 0$ e $2m+1 = -(2\ell+1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}+\frac{1}{\pi}\sum_{\ell\geq 0}\frac{(-1)^{(-\ell-1)}}{-(2\ell+1)}e^{-j(2\ell+1)\omega_0 t}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}+\frac{1}{\pi}\sum_{\ell\geq 0}\frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)}e^{-j(2\ell+1)\omega_0 t}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)\omega_0 t
\end{aligned}$$

Parte 2: Serie di Fourier dell'onda quadra

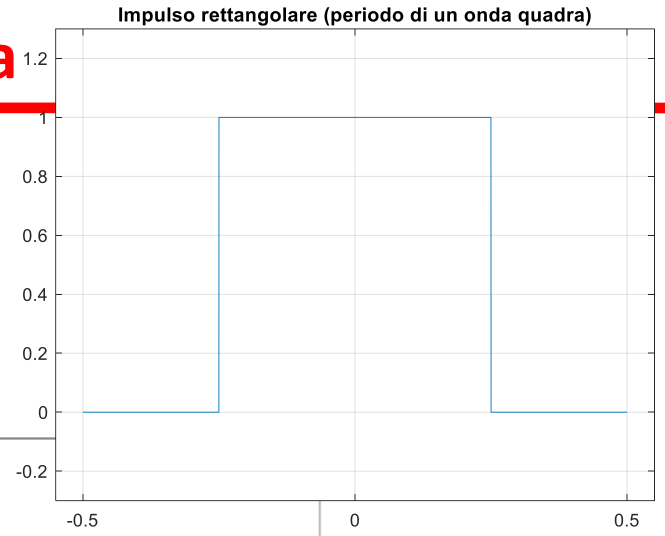
Usiamo Matlab per confrontare l'onda quadra $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$ con la somme parziale di ordine M della sua serie di Fourier:

$$x_M(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{0\leq m<M} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos(2m+1)\omega_0 t$$

Per semplicità, prendiamo $T = 1$ e quindi $\omega_0 = 2\pi$

1. Tracciare $x(t)$ in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con passo $\Delta = 10^{-4}$. Porre $x\left(\pm\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ in modo da ottenere convergenza puntuale in ogni t
2. Tracciare $x_0(t) = \frac{1}{2}$ e conservarlo in x_{old}
3. Per ogni $m \in \{0,1,2, \dots, 20\}$: calcolare x_{current} da x_{old} nel modo seguente:
   - Calcolare $v_m(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)\omega_0 t$ in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con passo $\Delta = 10^{-4}$
   - Aggiungerlo a $x_{\mathrm{old}}(t)$ per ottenere $x_{\mathrm{current}}(t)$
   - x_{current} corrisponde a $x_M(t)$ (con $M = m + 1$)
   - Tracciare nello stesso grafico $x(t)$ e $x_M(t)$ e verificare visualmente la convergenza
   - Calcolare:
     - il segnale d'errore $e_M(t) = |x(t) - x_M(t)|$
     - e la sua energia $E_M \approx \sum_i e_M^2\left(-\frac{1}{2} + i\Delta\right) \cdot \Delta$
4. Mostrare E_M in funzione di M e commentare il risultato

Parte 2: Serie di Fourier dell’onda quadra



Soluzione

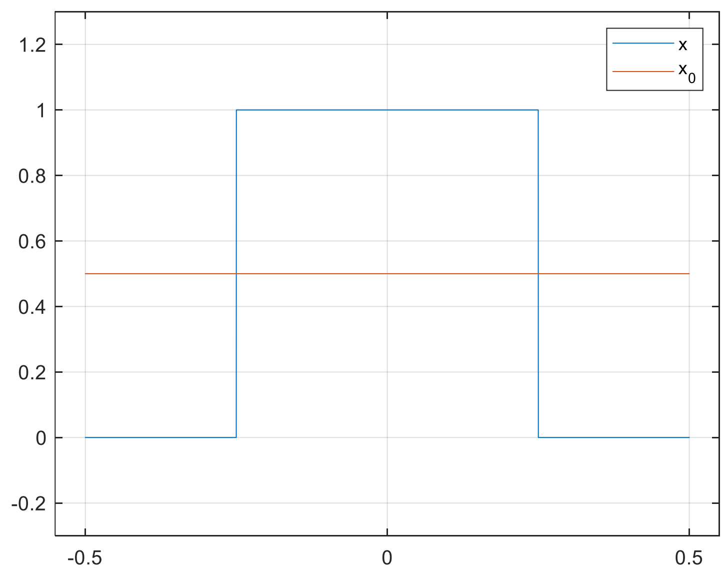
```
%% Serie di Fourier dell'onda quadra
clear vars
close all;

%% Inizializzazioni
T=1;
Delta = 1e-4;
w0 = 2*pi/T;
maxM = 14; % numero max di armoniche in più della componente continua
EM = zeros(1,maxM+2); % Vettore distanze quadratiche ||x-x_M||^2
t= -1/2:Delta:1/2; % Asse dei tempi

%% DOMANDA 1: Impulso rettangolare
% Creiamo l'impulso rettangolare come intersezione (cioè, AND) degli
% intervalli t>-1/4 e t<1/4
x= ((t>(-1/4)) & (t<1/4));  % questo vettore è booleano (vale true o false)
x=double(x);% bisogna usare double() affinché x sia numerico (vale 1 o 0)
% Cambiamo i valori nei punti discontinuità portandoli alla media dei
% limiti destro e sinistro: in questo modo il Teorema di Dirichlet assicura
% convergenza puntuale ovunque della serie di Fourier
x(t==1/4)=1/2;
x(t==-1/4)=1/2;
figure(1);
plot(t,x,'-');
axis([-0.55 0.55 -0.3 1.3]); grid on;
title('Impulso rettangolare (periodo di un onda quadra)')
```

Dopo aver completato lo script, eseguirlo con diversi valori di `maxM`

Parte 2: Serie di Fourier dell’onda quadra

Soluzione

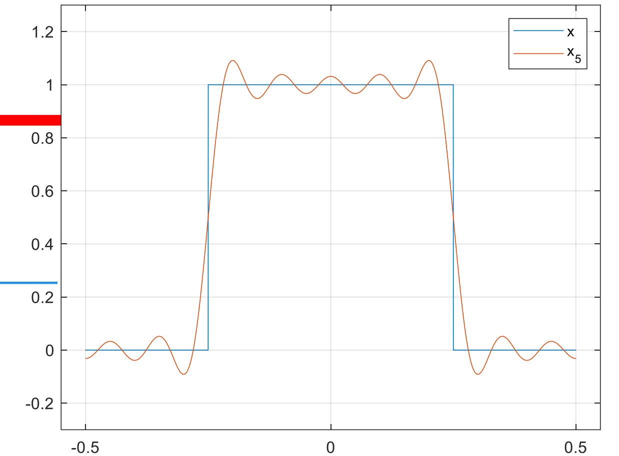
```
%% DOMANDA 2: Calcolo componente continua (ie. a frequenza 0)
x0 = 1/2*ones(size(t));
% Tracciamo x e x0
figure(2);
plot(t,x); hold on
axis([-0.55 0.55 -0.3 1.3]);
grid on;
plot (t,x0); hold off;
legend('x','x_0'); pause;
eM = abs(x-x0); % Calcolo dell'errore assoluto
EM(1)= sum(eM.^2)*Delta; % Calcolo dell'energia dell'errore

```

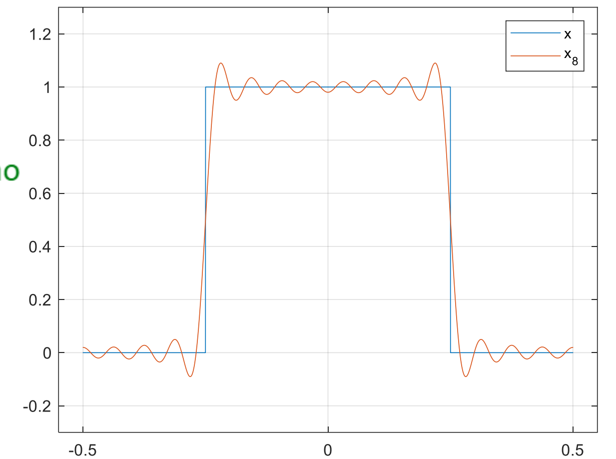


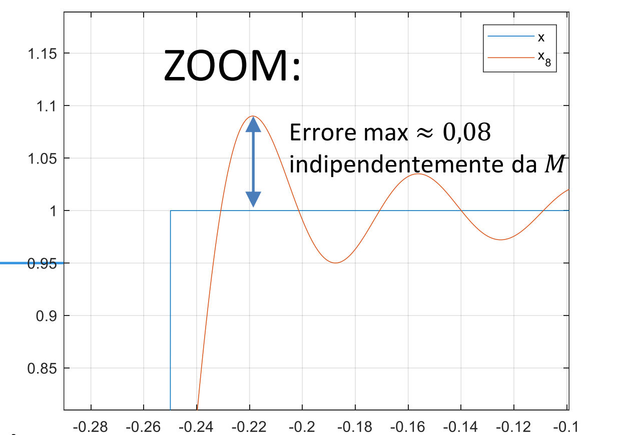
Parte 2: Serie di Fourier dell'onda quadra

Soluzione

```
%% Domanda 3: Calcolo delle somme parziali della sdF di x
% Calcoliamo i coefficienti del coseno fuori dal for loop
m=0:maxM; %numero massimo di armoniche da usare
c= 2*((-1).^m)./(2*m+1)/pi;
% Inizializzazione somma parziale
xOld = x0;
for index=1:maxM+1 % serve un indice che comincia da 1
    m = index-1; % ma il primo valore di m è zero
    C = c(index); % prendiamo il corrispondente coeff del coseno
    vm = C* cos ((2*m+1)*w0*t);
    xM = xOld+vm;
    % Tracciamo xM
    figure(2);
    plot(t,x,t,xM); grid on;
    axis([-0.55 0.55 -0.3 1.3]);
    legend('x', sprintf('x_{%d}',index));   pause;
    % Calcolo errore assoluto
    eM = abs(x-xM);
    % Energia dell'errore
    EM(index+1)= sum(eM.^2)*Delta;
    xOld = xM; % Pronti per la prossima iterazione
end
```





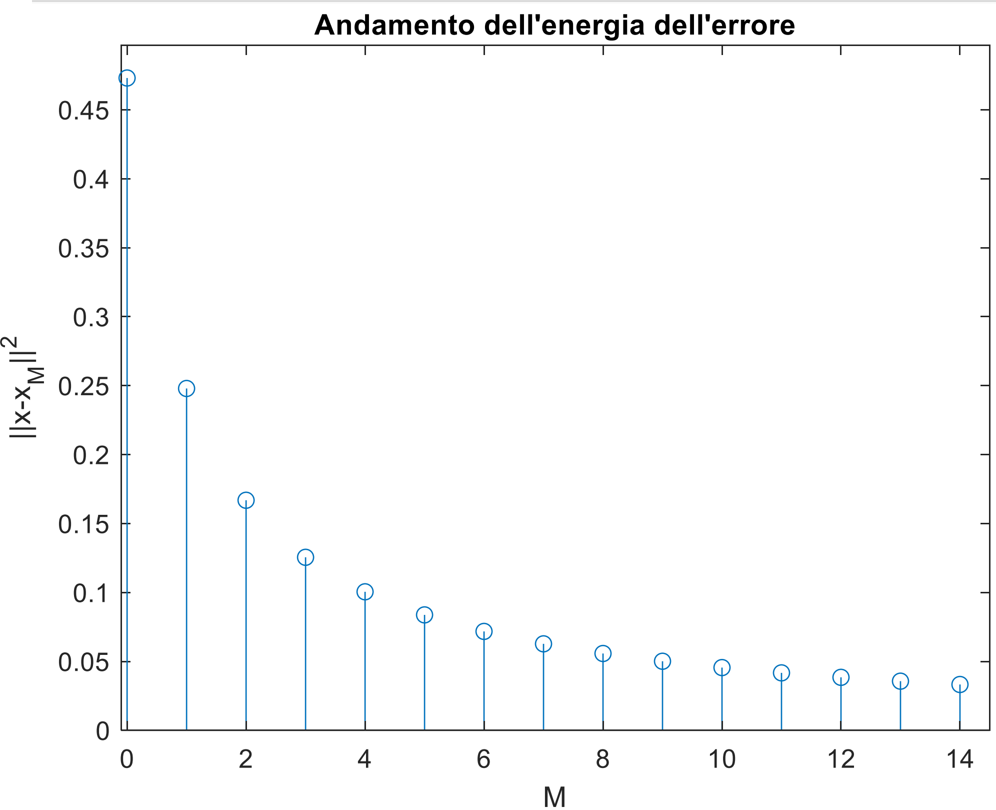


Notare il ***fenomeno di Gibbs:*** l'errore massimo di sovraelongazione ha un ampiezza che *non tende a zero.* Nondimeno, l'energia dell'errore *tende a zero* (vedi Domanda 4)

Parte 2: Serie di Fourier dell'onda quadra

Soluzione

```matlab
%% Domanda 4: andamento dell'energia dell'errore
figure(3)
stem(0:maxM,EM); axis([-0.1 maxM+0.5 0 max(EM)*1.05])
title ('Andamento dell''energia dell''errore')
xlabel('M')
ylabel('||x-x_M||^2')

```



Convergenza della serie di Fourier: l'errore ha un energia che tende a zero al crescere dell'ordine della somma parziale.
Il teorema Riesz-Fischer assicura che tale energia è infinitesima su M