UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Laboratorio 4
Trasformata di Fourier a tempo continuo

Università degli Studi di Padova

TF: definizione e trasformate note

Attenzione, il simbolo → **non indica un limite**, ma il ruolo delle variabili: la prima è la variabile d'integrazione, la seconda la variabile indip. della trasformata

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\big(x(\cdot)\big)(\omega) = \mathcal{F}(x(t), t \to \omega)$$

Trasformate note:

$x(t)$	$X(\omega)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-\sigma t}u(t), \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
$-e^{-\sigma t}u(-t), \quad \sigma < 0$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
$e^{-\sigma\|t\|}, \quad \sigma > 0$	$\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_0)$

Esercizio 1: Simmetrie della TF

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\big(x(\cdot)\big)(\omega) = \mathcal{F}(x(t), t \to \omega)$$

Ricordiamo che R è l'operatore di ribaltamento e che usiamo la notazione $x \Rightarrow X$ per indicare che X è la TF di x

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti proprietà di simmetria usando la definizione di TF

1.1 $R(x) \Rightarrow R(X)$

1.2 Se $x = R[x]$, allora $X = R[X]$

1.3 $\bar{x} \Rightarrow \overline{R(X)}$

1.4 Se $x = \bar{x}$, allora $X = \overline{R[X]}$

1.5 x reale e pari $\Rightarrow X$ reale e pari

1.6 x reale e dispari $\Rightarrow X$ immaginario e dispari

Esercizio 1: Simmetrie della TF

Soluzione.

1.1 Applichiamo la definizione di TF a $x(-t)$ e poi il cambio di variabile $\tau \leftarrow -t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(-\omega)\tau}d\tau = X(-\omega)$$

1.2 Immediata applicando la 1.1. Un segnale pari ha dunque TF pari

1.3 Applichiamo la definizione di TF a $\bar{x}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}e^{-j\omega t}dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt} = \overline{X(-\omega)}$$

1.4 Immediata applicando la 1.2. Un segnale reale ha TF con simmetria hermitiana

1.5 $x \text{ reale e pari} \Leftrightarrow \ x = \bar{x}$ e $x = R[x]$. Applicando 1.2 e 1.4, $X = R[X]$ e $X = \overline{R[X]} = \bar{X}$ cvd

1.6 $x \text{ reale e dispari} \Leftrightarrow \ x = \bar{x}$ e $x = -R[x]$. Applicando 1.2 e 1.4, $X = -R[X]$ e $X = \overline{R[X]} = \overline{-X}$ cvd

Esercizio 2: Proprietà della TF

Esercizio 2: Se $X(\omega) = \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)$, provare le proprietà seguenti:

1. **Traslazione**: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big(x(t-t_0)\big)(\omega) = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

2. **Modulazione**: $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t}x(t)\right)(\omega) = X(\omega - \omega_0)$

3. **Modulazione 2**: $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(x(t)\cos\omega_0 t)(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)]$

4. **Cambio scala:** $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}\big(x(at)\big)(\omega) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^*$ è l'insieme dei numeri reali diversi da zero

Suggerimento: applicare la definizione di TdF ed opportuni cambi di variabile negli integrali

Suggerimento per il punto 3. Decomporre il coseno con la formula di Eulero ed usare 2. e linearità.

Esercizio 2: Proprietà della TF

Soluzione

1. **Traslazione**: $\mathcal{F}\big(x(t-t_0)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j\omega(s+t_0)}ds = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

2. **Modulazione**: $\mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t}x(t)\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = X(\omega-\omega_0)$

3. **Modulazione 2**: $\mathcal{F}(x(t)\cos\omega_0 t)(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)x(t)\right) = \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$

4. **Cambio scala:** $\mathcal{F}\big(x(at)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-\frac{j\omega s}{a}}\frac{ds}{|a|} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

In 1. abbiamo usato $s = t - t_0$ e quindi $s = t + t_0$ e $dt = ds$

In 4. abbiamo usato $s = at$ e quindi $s = \frac{t}{a}$ e $dt = \frac{ds}{|a|}$

Esercizio 3

Usando la proprietà della TF, calcolare le trasformate dei segnali seguenti:

1. $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$
2. $y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$
3. $z(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$

Esercizio 3

Soluzioni

1. $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Siccome $\mathcal{F}[\text{rect(t)}](\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, allora $\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{\text{t}}{T}\right)\right](\omega) = T\ \text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$

2. $y(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(\omega) = e^{-j\omega t_0}X(\omega) = Te^{-j\omega t_0}\ \text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$

3. $z(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t) = y(t)\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow Z(\omega) = \pi[Y(\omega - \omega_0) + Y(\omega + \omega_0)]$

Calcolo numerico della TF del rect

Calcoliamo adesso *numericamente* la TF di $\mathrm{rect}(t/T)$

Per un valore fissato della pulsazione, sia ω, l'integrale di Fourier si può approssimare come somma discreta, scegliendo un opportuno passo di discretizzazione Δ:

$X(\omega) \approx \Delta \sum_k x(k\Delta)\, e^{-j\omega k\Delta}$

Il passo di discretizzazione deve essere sufficientemente piccolo perché in ogni intervallo di ampiezza Δ l'integranda sia approssimabile come costante. Supponiamo di aver scelto Δ in modo che x sia grosso modo costante in un intervallo di ampiezza Δ

Per l'esponenziale però, la velocità di variazione cresce con ω.

Allora, fissato Δ, valuteremo l'integrale di Fourier solo per $|\omega| < \omega_{\max}$, dove $\omega_{\max}$ è scelto in modo tale che Δ sia almeno M volte più piccolo del periodo $T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$

$\frac{2\pi}{\omega_{\max}} \geq M\Delta \Leftrightarrow \omega_{\max} \leq \frac{2\pi}{M\Delta}$

Un valore ragionevole di M è 10

Invece il passo di discretizzazzione Δ_ω influenza il numero di punti nei quali andiamo a valutare numericamente l'integrale di Fourier

Esercizio 4

Calcolo numerico della trasformata di Fourier

Lo script fornito qui a lato genera i campioni del segnale x per il calcolo numerico della TF tramite la formula

$X(\omega) \approx \Delta \sum_k x(k\Delta)\, e^{-j\omega k\Delta}$

ESERCIZIO 4:

1. **Quale variabile contiene i tempi discretizzati $k\Delta$?**
2. **Completare il codice fornito con il calcolo approssimato di $X(\omega)$**
3. **Che succede se prendiamo `dt` troppo grande?**
4. **Che succede se `M` è troppo piccolo?**

Eseguite il codice mostrato

```
%% Trasformata di Fourier: teoria e calcolo numerico
clear variables
close all

%% Asse dei tempi
dt = 1e-2; tmin = -10; tmax = 10;
t = tmin:dt:tmax;

%% Creazione del segnale
rect = @(t) double(abs(t)<1/2);
T = 1.2; % Parametro di durata
x = rect(t/T);
figure(1); plot(t,x); grid minor; axis([tmin tmax -0.2 1.2])

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
M = 10; % Rapporto tra il passo di discretizz. e il min periodo dell'exp
wmax = 2*pi/(M*dt); wmin=-wmax;
DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_rect=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_rect(index) = DA COMPLETARE
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro


%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
X_teorico = T*sinc(T*w/(2*pi));
figure(2);
plot(w,real(X_rect),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor; legend('X(\omega) calcolato', 'T sinc(T \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```

Esercizio 4: Soluzione

Calcolo numerico della trasformata di Fourier

$X(\omega) \approx \Delta \sum_k x(k\Delta)\, e^{-j\omega k\Delta}$

Soluzione ex. 4:

1. Quale variabile contiene i tempi discretizzati $k\Delta$?

I tempi discretizzati sono nel vettore `t`

2. Completare il codice fornito con il calcolo approssimato di $X(\omega)$

L'approssimazione discreta dell'integrale di Fourier è `dt * sum(x.*exp(-1i*w0*t));`

Infatti il vettore contiene, e l'esponenziale imm. puro è calcolato sui valori del tempo discretizzato

3. Che succede se prendiamo `dt` troppo grande?

Da una parte riduciamo automaticamente l'intervallo di pulsazioni nelle quali andiamo a calcolare la TF; dall'altra rischiamo di approssimare in modo troppo grossolano l'integrale

4. Che succede se `M` è troppo piccolo?

Per i valori estremi di ω l'integrale sarà male approssimato, mentre per valori piccoli di ω l'approssimazione resta accettabile. L'errore che vediamo è il cosiddetto *aliasing*

```
%% Trasformata di Fourier: teoria e calcolo numerico
clear variables
close all

%% Asse dei tempi
dt = 1e-2; tmin = -10; tmax = 10;
t = tmin:dt:tmax;

%% Creazione del segnale
rect = @(t) double(abs(t)<1/2);
T = 1.2; % Parametro di durata
x = rect(t/T);
figure(1); plot(t,x); grid minor; axis([tmin tmax -0.2 1.2])

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
M = 10; % Rapporto tra il passo di discretizz. e il min periodo dell'exp
wmax = 2*pi/(M*dt); wmin=-wmax;
DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_rect=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_rect(index) = dt * sum(x.*exp(-1i*w0*t));
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro


%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
X_teorico = T*sinc(T*w/(2*pi));
figure(2);
plot(w,real(X_rect),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor; legend('X(\omega) calcolato', 'T sinc(T \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```

Convoluzione e dualità

ULTERIORI PROPRIETÀ da ricordare

Se $X(\omega) = \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)$, $Y(\omega) = \mathcal{F}(y(t))(\omega)$,

Prodotto nel tempo → Convoluzione in frequenza:

$$\mathcal{F}(x(t)y(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(\omega)$$

Convoluzione nel tempo → Prodotto in frequenza:

$$\mathcal{F}(x * y(t))(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

Dualità:

$$\mathcal{F}\big(X(t)\big)(\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

Le proprietà della convoluzione sono senza dimostrazione. Per la dualità basta osservare che:

$$\mathcal{F}\big(X(t)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt = 2\pi \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{j(-\omega)t}dt = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(X(t), t \to -\omega\,)$$
$$= 2\pi x(-\omega)$$

Esercizio 5

Calcolare $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)](\omega)$ e $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t/T)](\omega)$

Esercizio 5

Calcolare $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)](\omega)$ e $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t/T)](\omega)$

Siccome $\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, allora, per dualità

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{2\pi}\right)\right](\omega) = \boldsymbol{2\pi}\,\mathrm{rect}(\boldsymbol{-\omega}) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$$ (perché il rect è pari)

Allora scriviamo $\mathrm{sinc}(t)$ come $\mathrm{sinc}\left(2\pi\frac{t}{2\pi}\right)$ e poi usiamo il cambiamento di scala:

$$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)](\omega) = \mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}\left(2\pi\frac{t}{2\pi}\right)\right](\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right]\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Quindi $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)](\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Applicando la regola del cambiamento di scala, $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t/T)](\omega) = \mathrm{Trect}\left(T\frac{\omega}{2\pi}\right) = T\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Esercizio 6

Calcolo numerico della TF di $x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

Si può usare uno script molto simile al precedente per il calcolo numerico della TF del sinc.

Esercizio 6

1. Completare il codice definendo la formula del segnale x e della sua TF

2. Questa volta si nota un errore nel calcolo numerico di $X(\omega)$ simile al fenomeno di Gibbs. È sufficiente ridurre `dt` o aumentare `M` per controllare tale errore?

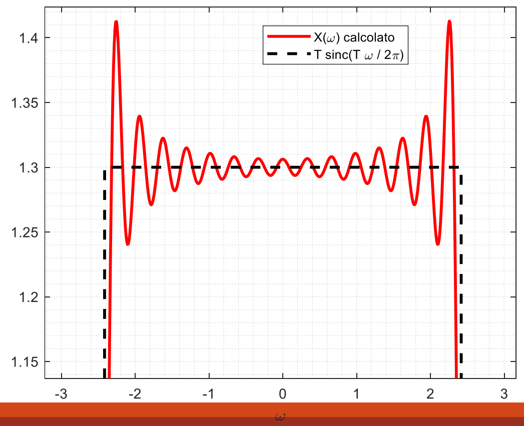
Eseguite il codice mostrato

```
%% Trasformata di Fourier: teoria e calcolo numerico
clear variables
close all

%% Asse dei tempi
dt = 1e-2; tmax = 20; tmin = -tmax;
t = tmin:dt:tmax;

%% Creazione del segnale
T = 1.3; % Parametro di durata
x = DA COMPLETARE
figure(1); plot(t,x); grid minor; axis([-10 10 -0.2 1.2])

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
M = 20; % Rapporto tra il passo di discretizz. e il min periodo dell'exp
wmax = 2*pi/(M*dt); wmin=-wmax;
DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_rect=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_rect(index) = dt * sum(x.*exp(-1i*w0*t));
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro

%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
rect = @(t) double(abs(t)<1/2);
X_teorico = DA COMPLETARE
figure(2);
plot(w,real(X_rect),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor; legend('X(\omega) calcolato', 'T sinc(T \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```

Esercizio 6

SOLUZIONE

1. Il codice mancante è mostrato a lato.
2. Questa volta l'approssimazione dell'integrale di Fourier soffre anche del fatto che non possiamo calcolare la somma per t che va da meno infinito a infinito. Siamo obbligati a prendere un intervallo finito di valori di t. Per migliorare la precisione dell'approssimazione bisogna aumentare l'intervallo temporale.
   Si noti comunque che all'aumentare di `tmax` si riduca l'energia dell'errore ma non la sovraelongazione massima (fenomeno di Gibbs)




```
%% Trasformata di Fourier: teoria e calcolo numerico
clear variables
close all

%% Asse dei tempi
dt = 1e-2; tmax = 20; tmin = -tmax;
t = tmin:dt:tmax;

%% Creazione del segnale
T = 1.3; % Parametro di durata
x = sinc(t/T);
figure(1); plot(t,x); grid minor; axis([-10 10 -0.2 1.2])

%% Calcolo numerico dell'integrale di Fourier
M = 20; % Rapporto tra il passo di discretizz. e il min periodo dell'exp
wmax = 2*pi/(M*dt); wmin=-wmax;
DW = 1e-2; % passo di campionamento dell'asse omega
w = wmin:DW:wmax; % valori di w su cui calcolare X(w)
X_rect=zeros(size(w)); % Inizializzazione TdF di x
tic % start timer
for index = 1:numel(w)
    w0 = w(index); % Seleziona il valore di pulsazione
    % Approssimazione dell'integrale di Fourier per omega=w0
    X_rect(index) = dt * sum(x.*exp(-1i*w0*t));
end
toc % stop timer: quanto tempo ci vuole per calcolare lo spettro

%% Confronto tra calcolo numerico e teoria
rect = @(t) double(abs(t)<1/2);
X_teorico = T*rect(T*w/(2*pi));
figure(2);
plot(w,real(X_rect),'r',w,X_teorico,'k--','LineWidth',2);
grid minor; legend('X(\omega) calcolato', 'T sinc(T \omega / 2\pi)');
xlabel('\omega')
```