Equazioni alle differenze lineari a coeff. costanti

EAD-LCC

Un' EAD-LCC è un'equazione del tipo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

dove: • x e y sono segnali a tempo discreto

• N e M sono interi ~~positivi~~ non negativi

• Tra i coefficienti a_k ce n'è almeno uno non nullo

• " " b_k " " " " " "

Esempio: ① "ECO" $y(n) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$ $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$

② "RITARDO" $y(n) = x(n-1)$ $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$

③ $y(n-1) - \frac{1}{2} y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$ $a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = 1$ $b_1 = \frac{1}{2}$

Nel seguito, considereremo sempre $a_0 \neq 0$, senza perdita di generalità. Se così non fosse, come nell'esempio ③, basterebbe considerare il segnale $w(n) = y(n-n_0)$, dove n_0 è il più piccolo intero tale che $a_{n_0} \neq 0$.
Allora, nell'EAD tra w e x il coeff. di $w(n)$ sarebbe $a_{n_0} \neq 0$.
Quindi prima si risolve l'EAD tra w e x e poi y si ottiene banalmente da w per anticipo. Nell'esempio ③ si avrebbe

$$w(n) - \frac{1}{2} w(n-1) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

$a_0 = 1$ $a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = 1$ $b_1 = \frac{1}{2}$

Inoltre, possiamo sempre dividere ambo i membri dell'equazione per a_0, ottenendo una nuova eq. in cui $a_0 = 1$

D'ora in poi considereremo sempre $a_0 = 1$

Def: Polinomio caratteristico $\tilde{a}(z) = \sum_k a_k z^{N-k}$

Teoremi (Analoghi a quelli per le EDO-LCC)

1) Un'EAD-LCC ammette infinite soluzioni nella forma

$y(n) = y_p(n) + y_0(n)$

y_p è una qualsiasi soluzione dell'EAD-LCC

y_0 è una soluzione dell'omogenea associata $\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = 0$

2) L'insieme delle soluzioni dell'O.A. è uno spazio vettoriale di dimensione N, Y_0

3) Una base di Y_0 si costruisce a partire dalle r radici distinte di $a(z)$, siano $\{\lambda_i\}_{i=1 \dots r}$ ognuna con molteplicità n_i $\left(\sum_{i=1}^{r} n_i = N\right)$

$\lambda_1^n \quad n\lambda_1^n \quad \dots \quad n^{n_1-1}\lambda_1^n$

$\vdots$

$\lambda_r^n \quad n\lambda_r^n \quad \dots \quad n^{(n_r-1)}\lambda_r^n$

4) Il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \\ y(-1) = y_1 \quad \dots \quad y(-N) = y_N \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione nella forma

$$y(n) = y_e(n) + y_f(n)$$

$y_e(n)$ è la risposta libera, soluzione unica al problema di Cauchy omogeneo associato. Quindi $y_e \in Y_0$

$y_f(n)$ è la risposta forzata, soluzione unica al p. di Cauchy con condizioni iniziali nulle

Si ha che $y_f = h_+ * x$ con h_+ soluzione al pdC con c.i. nulle e ingresso impulsivo

<u>DEF</u> Il sistema LTI causale associato ad una EAD-LCC è quello di risposta impulsiva h_+

5) si può mostrare che tale sistema, causale per costruzione, è stabile se ~~[illegible]~~ le radici del pol. caratteristico hanno tutte modulo < 1
Se i polinomi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ sono co-primi, tale condizione è anche necessaria

Se $h_+ \in \ell^1$ la DTFT di h_+ è $\dfrac{b(e^{-j\omega})}{a(e^{-j\omega})}$

e quindi si può trovare h_+ per trasformata inversa

Tutti questi teoremi sono senza dimostrazione

Trasformata Z (TZ)

Definizione Sia $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ un segnale tempo discreto.

La sua TZ, se esiste, è la funzione:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

per i valori $z\in\mathbb{C}$ per i quali la serie converge: ROC

Esempio 1 $x(n) = a^n u(n)$ con $a\in\mathbb{C}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$\forall z : |az^{-1}|<1 \iff |z|>|a|$

ROC 

Esempio 2 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ con $a\in\mathbb{C}$

per $|a^{-1}z|<1$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} a^{-m} z^{m} - 1 + 1 = 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \left(a^{-1}z\right)^m = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$= \frac{1-a^{-1}z-1}{1-a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

con ROC $|z|<|a|$

Teorema Tutte le ROC sono insiemi di circonferenze centrate in $z=0$

Discussione Basta osservare che, se $z_0 \in ROC$, con $z_0 = \rho_0 e^{j\omega_0}$ e $z_1 = \rho_0 e^{j\omega_1}$

$$|X(z_1)| \le \sum_n |x(n)\, z_1^{-n}| = \sum_n |x(n)|\, \rho_0^{-n}$$

la convergenza non dipende da ω_1

Allora ci sono 5 possibili ROC:

1) Insieme vuoto
2) $\mathbb{C}$ — Senza DIM.
3) $|z|>\rho_0$
4) $|z|<\rho_1$
5 $\rho_0<|z|<\rho_1$

Esempio 3 $\quad x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]u(n) \qquad X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\,\frac{2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{1 - \cos\omega_0 z^{-1}}{1 + z^{-2} - z^{-1}(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})}$$

$$= \frac{1 - (\cos\omega_0)z^{-1}}{1 - 2z^{-1}(\cos\omega_0) + z^{-2}}$$

Proprietà

1. Coniugio: $\mathcal{Z}[\overline{x}(n)] = \overline{X}(\overline{z})$ $\quad ROC = R_x$
2. Traslazione: $\mathcal{Z}[x(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z)$ $\quad ROC = R_x$
3. Ribaltamento: $\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$ $\quad ROC = z : z^{-1} \in R_x$
4. Derivata in z: $\mathcal{Z}[n\,x(n)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$ $\quad ROC = R_x$
5. Riscalamento in z $\quad \mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$ $\quad ROC = z : |a| \cdot z \in R_x$
6. Convoluzione $\quad \mathcal{Z}[v * w(n)] = V(z) \cdot W(z)$ $\quad ROC \supset (R_v \cap R_w)$
7. ~~Trasformazione~~ DTFT. $\quad$ Se $|z| = 1 \in ROC$, $\quad DTFT(x(n)) = \mathcal{Z}(x(n))\big|_{z = e^{j\omega}}$
8. Inversione $\quad$ Se $|z| = \rho \in ROC$, $\quad x(n) = \rho^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\rho e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$

Funzione di Trasferimento di un LTI

Se $y = h * x$ allora $H(z) = \mathcal{Z}[h]$ è la funzione di Trasferimento del sistema LTI tempo discreto

Se il sistema è FIR causale (risposta impulsiva a supporto finito)

$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \ldots + h_M z^{-M}$ (polinomio in z^{-1}) e $ROC = \mathbb{C} - \{0\}$

Se è un IIR, $H(z)$ è una ~~...~~ somma di serie infinita

Se il sistema è stabile esiste la DTFT e $\mathbb{U}$ fa parte della ROC

~~Osservazione~~

I FIR sono implementabili con M operazioni per campione
Gli IIR richiedono in principio ∞ operazioni, ma permettono molta più flessibilità

La TZ permette di capire facilmente come implementare una sottoclasse di IIR vegliando alla causalità ed alla stabilità

Si considerano in particolare i filtri (LTI) associati alle EAD-LCC

Mostreremo che

- Gli LTI associati alle EAD-LCC corrispondono ad una particolare famiglia che ~~...~~ comprende FIR ed alcuni IIR
- È facile studiarne la stabilità
- Sono causali per costruzione
- Permettono maggiore flessibilità nel progetto di filtri: esempio: inversione di sistemi; progetto di filtri

Filtri ricorsivi

Sono LTI discreti (quindi $y = h * x$) caratterizzati dall'esistenza di polinomi coprimi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ tali che ogni coppia di segnali x e $y = h * x$ soddisfano una EAD-LCC:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k) \qquad (1)$$

Si noti che, mentre h caratterizza il filtro, lo stesso non vale per i coeff. a e b, che richiedono anche le condizioni iniziali (altrimenti ci sono infinite soluzioni)

In pratica, in alcuni casi abbiamo solo l'EAD-LCC: come fare per stabilire h?

Ci sono vari casi:

- se supponiamo che il sistema è causale, si può trovare h_+, la soluzione al P.d.C. "causale" (cioè, cond. iniziali nulle), che corrisponde a prendere come ROC l'esterno di un cerchio
- se il sistema è stabile, deve includere il cerchio unitario

Dalla (1) si ottiene che $H(z) = \dfrac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$

Quindi, data l'EAD-LCC, le possibili ROC sono le corone circolari individuate dalle radici (inverse) di $a(\cdot)$

<u>Esempio</u> L'equazione $y(n) - a\,y(n-1) = x(n)$

è associata alla f.d.t. $H(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$

Qual è il sistema LTI associato? impossibile dirlo se non si dà la ROC $\iff$ impossibile dirlo se non si danno le cond. iniziali

Siccome $z_0 = a$ è un polo (cioè $|H(z)| \xrightarrow[z \to a]{} \infty$)

le ROC possibili sono: $|z| < |a|$ e $|z| > |a|$

Nel primo caso $h(n) = -a^n u(-n-1)$ <u>anticausale</u>

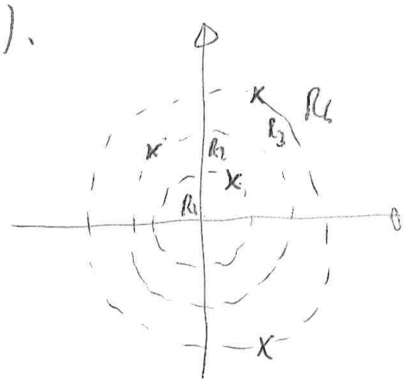
nel secondo $h(n) = a^n u(n)$ <u>causale</u>

Ora, se $|a| < 1$ il sistema causale è stabile, quello anticausale instabile

se invece $|a| > 1$ è il sistema anticausale ad essere stabile

<u>Generalizzando</u> Consideriamo l'insieme dei poli di $H(z)$, dopo aver semplificato eventualmente gli zeri comuni di $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$.

Ci sono $\leq r+1$ possibili ROC:



- Se si prende la ROC + esterna, si sta considerando la soluzione causale
- Se si prende la ROC che contiene il cerchio unitario, si sta considerando la soluzione stabile

→ Il sistema è causale <u>e</u> stabile se e solo se tutti i poli sono all'interno del cerchio unitario

Implementazione della soluzione causale di un EAD-LCC

Consideriamo il sistema LTI causale associato a: $\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$

con $a_0 = 1$

Consideriamo l'algoritmo seguente: $x^c(n) = x(n)u(n)$

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ \sum_{k=0}^{M} b_k x^c_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k t_{n-k} \end{cases}$$

Questo algoritmo consente di calcolare $t(n)$ con $N+M$ moltiplic. e somme

Allora si dimostra che:

- Se $x(n)$ è nullo per $n<0$, $t(n) = y(n)$ $y(n)$ che è $h_+ * x$
- Se $x(n) \neq 0$ per $n<0$, $|y(n) - t(n)| < Ca^n$ con $|a|<1$ e $n \geq 0$ (soluzione)
  a condizione che tutti i poli di $H(z)$ siano a modulo <1
- In altre parole t è la soluzione del problema di Cauchy causale
- Quindi questo algoritmo implementa $h_+ * x^c$
- Se $x^c \neq x$ allora $x = x^c + x^a$ + parte anticausale e

$$\boxed{y = x^c * h_+ + h_+ * x_a} \quad \text{risp. forzata + risp. libera}$$

Ma $h_+ * x_a(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_+(k) x_a(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_+(k) x_a(n-k)$

Se $n>0$, $h_+ * x_a(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h_+(k) x_a(n-k)$ $\quad$ $n-k>0$, $k<n$ ma anche $k<0$

oppure $h_+ * x_a(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(k) h_+(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x_a(k) h_+(n-k)$

$$\text{se } n>0 \quad = \sum_{k=-\infty}^{-1} x_a(k) h_+(n-k)$$

Inversione di un FIR

Se $y(n) = \sum b_k x(n-k)$ (FIR)

Allora $Y(z) = b(z^{-1}) X(z)$ ROC $= \mathbb{C}$

Per invertire il sistema dovremmo avere $X(z) = \frac{1}{b(z^{-1})} Y(z)$

L'implementazione causale con l'algoritmo ricorsivo è stabile se e soltanto se $b(z^{-1})$ non ha radici ~~fuori~~ sul cerchio unitario

- Più in generale, un filtro ricorsivo stabile è invertibile se tutti gli zeri hanno modulo < 1 in tal caso l'inverso è causale

- Filtri a minimo di fase: hanno tutti i poli e gli zeri strettamente contenuti ~~nel~~ nel cerchio unitario. Sono causali stabili invertibili e l'inverso stabile e causale

Esercizio

Dato LTI causale descritto dalle EAD

3 - 10 + 6

$$3y(n) + 5y(n-1) - 2y(n-2) = 3x(n) + 3x(n-1)$$

1) Trovare la fdT, poli e zeri
2) discutere la stabilità e invertibilità

1) Dividendo tutto per 3: $y(n) + 5/3\, y(n-1) - 2/3\, y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 5/3\, z^{-1} - \frac{2}{3} z^{-2}}$$

zeri: $z_1 = -1$

poli: $\frac{-5/3 \pm \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{8}{3}}}{2} = \frac{-5/3 \pm \sqrt{\frac{49}{3}}}{2} = \frac{-5/3 \pm 7/3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1/3 \end{cases}$

$1 - \alpha z^{-1}$ polo: $z = \alpha$

Pol. caratt. $z - \alpha = 0$

$1 - \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$

$1 + 5 - 6$

Il polo -2 è esterno al cerchio $\Rightarrow$ sistema instabile

$$h(n) = u(n)\left(\left(1/3\right)^n + (-2)^n \right)$$

2) Instabile perché $|p_2| = 2 > 1$

sistema inverso: $H_1(z) = \frac{1 + 5/3\, z^{-1} - 2/3\, z^{-2}}{1 + z^{-1}}$

Instabile perché ha polo in -1

Trasformata in Z

- Definizione
- Proprietà
- Esempi
- Applicazione alle equazioni alle differenze
- Condizione di stabilità
- Esercizi

1 Sia $H(z) = \frac{-1}{1-z^{-2}}$ la f.d.T di un sistema causale

1.1) Scrivere l'EAD
1.2) Discutere la stabilità
1.3) Calcolare $h(n)$
1.4) Calcolare l'ingresso che genera $y_f = u(n)$

1.1) $y(n) - y(n-2) = -x(n)$

1.2) Poli: ± 1. Il modulo non è strettamente $<1 \Rightarrow$ non stabile

1.3) $H(z) = \frac{-1}{1-z^{-2}} = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1+z^{-1}}$

$A_1 = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})H(z) = -1/2 \qquad A_2 = \lim_{z\to -1} (1+z^{-1})H(z) = -1/2$

$H(z) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}}\right] \Rightarrow h(n) = -\frac{1}{2}\left[u(n) + (-1)^n u(n)\right] = \begin{cases} -1 & \text{per } n\geq 0 \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

1.4) $Y_f(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad X(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{-1} = -(1+z^{-1})$

$x(n) = -\delta(n) - \delta(n-1)$