Esercizi proposti 16
soluzioni

Trasformata di Laplace e applicazione alle EDO

16.1

Trovare la trasformata di Laplace con la rispettiva regione di convergenza del segnale

$$x(t) = e^{-t}\, u(t) + e^{-2|t|}.$$

Soluzione

Usiamo la linearità e determiniamo le trasformate dei due addendi separatamente. Detto $x_1(t) = e^{-t}1(t)$, la trasformata di Laplace e la relativa regione di convergenza (ROC) sono

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \mathrm{Re}(s) > -1.$$

Detto $x_2(t) = e^{-2|t|}$ si può scrivere $x_2(t) = x_{21}(t) + x_{22}(t) = e^{-2t}1(t) + e^{2t}1(-t)$. L'addendo $x_{21}(t)$, dello stesso tipo di $x_1(t)$, ha trasformata pari a $\frac{1}{s+2}$ con ROC $\mathrm{Re}(s) > -2$. Si noti che $x_{22}(t) = x_{21}(-t)$ quindi, applicando la regola del ribaltamento temporale, la sua trasformata di Laplace è $\frac{1}{-s+2}$ con ROC $\mathrm{Re}(-s) > -2$, ovvero $\mathrm{Re}(s) < 2$. La trasformata di $x_2(t)$ si trova sommando quelle dei due addendi, con ROC data dall'intersezione delle ROC degli addendi, quindi

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{-s+2} = \frac{4}{4-s^2}, \qquad -2 < \mathrm{Re}(s) < 2.$$

Allo stesso modo, sommando le trasformate degli addendi, e limitando la ROC all'intersezione delle ROC degli addendi si trova

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{4}{4-s^2}, \qquad -1 < \mathrm{Re}(s) < 2.$$

16.2

[difficile] Si trovi un segnale $x(t)$ che ammette trasformata bilatera di Laplace con regione di convergenza coincidente con l'asse immaginario.

Soluzione

Il segnale

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

è assolutamente integrabile infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

ma il segnale $x(t)e^{-\sigma t}$ non è integrabile per nessun valore di $\sigma \neq 0$ infatti per $\sigma > 0$ la coda sinistra non è integrabile, mentre per $\sigma < 0$ la coda destra non è integrabile. La conclusione è che $x(t)$ è trasformabile secondo Laplace con regione di convergenza coincidente con l'asse immaginario, ovvero una striscia (verticale) degenere del piano complesso. Si osservi che, poiché la ROC della trasformata di Laplace contiene l'asse immaginario, di $x(t)$ esiste anche la trasformata di Fourier $X(j\omega) := X(s)_{|s=j\omega}$.

16.3

Un sistema LTI causale risponde al segnale d'ingresso $x(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$ con l'uscita $y(t) = 2t^3 e^{-2t} u(t)$.

(a.) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

(b.) La coppia di segnali $x_1(t) = 3\sin t\ u(t)$, $y_1(t) = t \sin 2t\ u(t)$ è una possibile coppia ingresso-uscita per il sistema?

Soluzione

(a.) Per un sistema LTI causale $y(t) = h(t) * x(t)$ che si trasforma secondo Laplace in $Y(s) = H(s)X(s)$. In questo caso sono noti $x(t)$ ed $y(t)$ e quindi $X(s)$ ed $Y(s)$. Si ottiene dunque

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{12}{(s+2)^4}}{\frac{2}{(s+2)^3}} = \frac{6}{s+2}$$

la cui antotrasformata causale è

$$h(t) = 6e^{-2t} u(t).$$

(b.) Per rispondere a questa domanda è sufficiente verificare se la $h(t)$ appena calcolata è anche la risposta impulsiva del sistema LTI che genera la coppia ingresso-uscita $x_1(t), y_1(t)$. Ciò è impossibile: basta osservare che $h(t)$ è assolutamente integrabile e quindi risposta impulsiva di un sistema LTI BIBO stabile che, se sollecitato dall'ingresso limitato $x_1(t)$, non può produrre l'uscita illimitata $y_1(t)$. Sarebbe stato possibile rispondere anche ricalcolando, per la coppia $x_1(t), y_1(t)$, una risposta impulsiva $h_1(t)$ da confrontarsi con $h(t)$.

16.4

L'equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t y(\tau) \cos[3(t-\tau)]\, d\tau + x(t), \quad t > 0,$$

rappresenta la relazione ingresso-uscita di un sistema LTI causale, dove $x(t) = 0$ per $t < 0$.

(a.) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

(b.) A quale equazione differenziale è associabile questo sistema?

Soluzione

(a.) L'integrale a secondo membro è la convoluzione tra $y(t)$ e $\cos 3t$, l'equazione integrale si può dunque riscrivere come

$$y(t) = y(t) * \cos 3t + x(t)$$

e, trasformando secondo Laplace,

$$Y(s) = Y(s)\frac{s}{s^2+9} + X(s)$$

da cui si ricava

$$(1 - \frac{s}{s^2+9})Y(s) = X(s)$$

ovvero

$$H(s) = \frac{s^2+9}{s^2-s+9}.$$

(b.) Per ispezione della $H(s)$ si ottiene

$$y''(t) - y'(t) + 9y(t) = x''(t) + 9x(t).$$

16.5

Un sistema LTI a tempo continuo ha risposta impulsiva

$$h(t) = \sin t \; u(t) + 2\,\delta(t)$$

(a.) discutere la stabilità BIBO analizzando la funzione di trasferimento del sistema;

(b.) calcolare la risposta al gradino del sistema.

Soluzione

(a.) La trasformata di Laplace (unilatera) del segnale causale $h(t)$ si calcola, direttamente o dalle tabelle, come

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2 = \frac{2s^2+3}{s^2+1}$$

con regione di convergenza il semipiano aperto a destra dei due poli immaginari $p_{1,2} = \pm j$. Poiché $H(s)$ è propria, ma non ha i poli a parte reale strettamente negativa, il corrispondente sistema LTI causale non è BIBO-stabile.

Nota. Nel dominio del tempo si arriva alla stessa conclusione, osservando che $h(t)$ ha una componente impulsiva $2\,\delta(t)$, compatibile con la stabilità BIBO, ma che la componente (non generalizzata) $\sin t\, u(t)$ non è assolutamente integrabile. Perciò, il sistema non è BIBO-stabile.

(b.) Per calcolare la risposta al gradino, basta antitrasformare la funzione razionale

$$H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2s^2+3}{s(s^2+1)} = \frac{3}{s} - \frac{s}{s^2+1}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0$$

che ha antitrasformata causale

$$h_{-1}(t) = (3 - \cos t)\, u(t).$$

Alternativamente, la risposta al gradino si può calcolare nel dominio del tempo come l'integrale della risposta impulsiva:

$$h_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau = \left[\int_0^t \Big(\sin \tau + 2\,\delta(\tau) \Big)\, d\tau \right] u(t) = (3 - \cos t)\, u(t)$$

16.6

Si calcoli la risposta al gradino di un sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0, \\ \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Soluzione

Questo esercizio illustra l'usoi della trasformata di Laplace per il calcolo di convoluzioni. In questo caso si deve calcolare

$$y(t) = h(t) * u(t)\,.$$

Per determinare $y(t)$ si ricorre al teorema della convoluzione per ricavare $Y(s) = H(s)X(s)$ quindi si procede all'antitrasformazione di $Y(s)$. Poichè $h(t)$ ha supporto $\mathbb{R}$ è necessario impiegare la trasformata *bilatera* di Laplace. Cominciamo con il calcolo di

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^t e^{-st}\,dt + \int_{0}^{\infty} \cos t e^{-st}\,dt\,,$$

il primo addendo fornisce

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-1)t}\,dt = \left.\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{s-1} \qquad \mathrm{ROC} = \{\mathrm{Re}(s) < 1\}\,,$$

mentre il secondo addendo fornisce (è una TdL notevole)

$$\int_{0}^{\infty} \cos t e^{-st}\,dt = \frac{s}{s^2+1}, \qquad \mathrm{ROC} = \{\mathrm{Re}(s) > 0\}\,.$$

In definitiva la TdL di $H(s)$ è

$$H(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1}, \qquad \mathrm{ROC} = \{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}\,,$$

e quindi, ricordando che $X(s) = \frac{1}{s}$,

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s^2+1}, \qquad \mathrm{ROC} = \{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}\,.$$

Decomponendo il primo addendo in fratti semplici si ottiene

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}, \qquad \mathrm{ROC} = \{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}\,,$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = u(t) + e^t u(-t) + \sin t\, u(t) = e^t u(-t) + \big(1 + \sin t\big)\, u(t)\,.$$

16.7

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 5\,y'(t) = 3\,x(t)$$

Determinare la soluzione $y(t)$, $t > 0$, corrispondente a $x(t) = \delta(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0-) = 0$, $y'(0-) = 2$.

Soluzione

Mediante trasformazione di Laplace unilatera, il "problema ai valori iniziali" si traduce nell'equazione

$$s^2Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 5\Big[sY(s) - y(0-)\Big] = 3\,X(s)$$

da cui, sostituendo i valori fissati per $y(0-)$, $y'(0-)$ e tenendo conto che $X(s) = 1$, si ottiene l'equazione algebrica

$$s^2 Y(s) - 2 + 5\, sY(s) = 3$$

La trasformata della soluzione $y(t)$ risulta pertanto

$$Y(s) = \frac{5}{s(s+5)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}$$

Quindi, per $t > 0$,

$$y(t) = 1 - e^{-5t}$$

16.8

Si consideri un sistema LTI causale e BIBO-stabile a tempo continuo, con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{6(s+4)}{s^2 + as + 9}$$

In risposta all'ingresso $x(t) = \cos 3t\; u(t)$, l'uscita presenta, a transitorio esaurito, un andamento oscillatorio compreso tra un valore massimo $y_M = 2$ e un valore minimo $y_m = -2$. In base a questo esperimento, quanto vale il parametro reale a?

Soluzione

Essendo il sistema BIBO-stabile, l'uscita assume per $t \to \infty$ (cioè "a transitorio esaurito") l'andamento della risposta di regime sinusoidale

$$y_{\text{perm}}(t) = |H(j3)| \cos\bigl(3t + \arg H(j3)\bigr)$$

come se l'ingresso fosse una sinusoide agente da sempre, cioè $\hat{x}(t) = \cos 3t,\ t \in \mathbb{R}$. Qui, $H(j3)$ rappresenta la risposta in frequenza del sistema alla pulsazione $\omega = 3$. In particolare, l'ampiezza dell'oscillazione determina il modulo $|H(j3)| = 2$. Ora, in virtù della stabilità, la risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva e questa coincide con la funzione di trasferimento valutata sull'asse immaginario. Perciò,

$$2 = |H(j3)| = \left| \frac{6(s+4)}{s^2 + as + 9} \right|_{s=j3} = \frac{10}{|a|}$$

Quindi, $|a| = 5$. Imponendo la stabilità, che vuole i due poli di $H(s)$ a parte reale negativa, si trova infine $a = 5$.

16.9

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 6y'(t) = x(t).$$

(a.) Si determini la soluzione $y(t),\ t > 0$, corrispondente ad $x(t) = u(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0-) = 1,\ y'(0-) = -6$.

(b.) Si discuta la stabilità BIBO del sistema LTI causale associato all'equazione differenziale.

Soluzione

(a.) Poiché cerchiamo la soluzione dell'equazione differenziale per $t > 0$ applichiamo la trasformata unilatera di Laplace ai due membri ottenendo

$$s^2 Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 6sY(s) - 6y(0-) = \frac{1}{s}$$

ovvero, sostituendo le condizioni iniziali assegnate,

$$(s^2 + 6s)Y(s) = (s \cdot 1 - 6 + 6) + \frac{1}{s}$$

che si riduce a

$$Y(s) = \frac{1}{s+6} + \frac{1}{s^2(s+6)}.$$

Abbiamo mantenuto la separazione tra la parte che dipende dalle sole condizioni iniziali (che per antirasformazione fornisce la risposta libera) e quella che dipende dal solo ingresso (che fornisce la risposta forzata). La risposta libera è

$$y_l(t) = e^{-6t} u(t).$$

Per antitrasformare il secondo addendo procediamo alla decomposizione in frazioni parziali

$$\frac{1}{s^2(s+6)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+6}$$

I coefficienti sono dati da

$$A = \left.\frac{1}{s+6}\right|_{s=0} = \frac{1}{6}, \quad B = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+6}\right)\right|_{s=0} = -\frac{1}{36}, \quad C = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-6} = \frac{1}{36}.$$

la risposta forzata è

$$y_f(t) = \frac{1}{6}\,tu(t) - \frac{1}{36}\,u(t) + \frac{1}{36}\,e^{-6t}u(t).$$

La soluzione richiesta è

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = \frac{1}{6}\,tu(t) - \frac{1}{36}\,u(t) + \frac{37}{36}\,e^{-6t}u(t).$$

(b.) Il sistema LTI associato all'equazione differenziale (ovvero la mappa $x(t) \mapsto y_f(t)$) ha funzione di trasferimento $H(s)$ che si desume immediatamente dall'equazione ponendo $x(t) = \delta(t)$ ed $y(0-) = y'(0-) = 0$. Poiché

$$H(s) = \frac{1}{s^2+6s} = \frac{1}{s(s+6)}$$

si conclude che il sistema non è BIBO stabile per la presenza di un polo nell'origine. Il polo di $H(s)$ nell'origine produce, per antitrasformazione, un addendo a gradino in $h(t)$ che non è dunque assolutamente integrabile. (Nel gergo dell'automatica si dice che il sistema contiene un integratore).

16.10

Per l'equazione differenziale

$$y'(t) + 3\,y(t) = x(t),$$

con $x(t) = 30\sin t\; u(t)$ e condizione iniziale $y(0-) = 2$, calcolare la soluzione $y(t),\ t > 0$, determinando separatamente le componenti di risposta *libera* e di risposta *forzata*.

Soluzione

Trasformando secondo Laplace *unilatera* i due membri dell'equazione differenziale, otteniamo l'equazione *algebrica*

$$sY(s) - y(0-) + 3Y(s) = X(s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{y(0-)}{s+3} + \frac{1}{s+3}\,X(s), \qquad \operatorname{Re} s > \max(-3, \sigma_{0x}),$$

essendo σ_{0x} l'ascissa di convergenza di $x(t)$. Il primo addendo $Y_\ell(s) = \dfrac{y(0-)}{s+3}$ è la trasformata della componente di risposta libera, che dipende solo dalla condizione iniziale e coincide con la risposta totale qualora $x(t) \equiv 0$. Antitrasformando e sostituendo il valore della condizione iniziale, per $t \geq 0$ si ottiene

$$y_\ell(t) = 2\,e^{-3t}.$$

Il secondo addendo $Y_f(s) = H(s)X(s)$, dove $H(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $\operatorname{Re} s > -3$, è la *funzione di trasferimento* dell'unico sistema LTI *causale* associato all'equazione differenziale, è la trasformata della componente di risposta forzata: questa dipende solo dall'ingresso e coincide con la risposta totale quando $y(0-) = 0$. Calcolando $X(s)$ e decomponendo,

$$Y_f(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{30}{s^2+1} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1},$$

dove i coefficienti A, B e C si trovano come

$$A = \lim_{s \to -3} (s+3) Y_f(s) = 3,$$

$$Bs + C = (s^2+1) \left[Y_f(s) - \frac{A}{s+3} \right] = (s^2+1) \frac{30 - 3(s^2+1)}{(s+3)(s^2+1)} = -3 \frac{s^2-9}{s+3} = -3(s-3).$$

Antitrasformando termine a termine, per $t > 0$ si ottiene

$$y_f(t) = 3\,e^{-3t} - 3\,[\cos t - 3 \sin t] = 3\,e^{-3t} + 3\sqrt{10} \sin \left(t - \operatorname{atan} \frac{1}{3} \right).$$

Infine,

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = 5\,e^{-3t} + 3\sqrt{10} \sin \left(t - \operatorname{atan} \frac{1}{3} \right), \qquad t > 0.$$

16.11

Scrivere un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, cui sia associato il sistema LTI causale definito dalla risposta impulsiva

$$h(t) = [1 + e^t + 2e^{-2t}]\, u(t).$$

Soluzione

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} = \frac{-3s+2}{s^3 - 3s^2 + 2s}$$

e quindi, per ispezione della $H(s)$, una posibile EDO è la seguente

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 2y^{(1)} = -3x^{(1)} + 2x.$$

16.12

I segnali $x(t)$ ed $y(t)$ sono identicamente nulli per $t < 0$. Sappiamo inoltre che i due segnali soddisfano per $-\infty < t < \infty$ le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3y(t) + \delta(t), \\ y'(t) &= 3x(t). \end{aligned}$$

(a.) Determinare le trasformate di Laplace $X(s)$ ed $Y(s)$.

(b.) Calcolare $x(t)$ ed $y(t)$.

Soluzione

(a.) Trasformando secondo Laplace le due equazioni differenziali,

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0-) &= 3Y(s) + 1, \\ sY(s) - y(0-) &= 3X(s) \end{aligned}$$

ed imponendo le condizioni $x(0-) = y(0-) = 0$,

$$\begin{aligned} sX(s) &= 3Y(s) + 1, \\ sY(s) &= 3X(s) \end{aligned}$$

Da cui, risolvendo per $X(s)$ ed $Y(s)$, si ricava

$$X(s) = \frac{s}{s^2-9} = \frac{s}{(s-3)(s+3)},$$
$$Y(s) = \frac{3}{s^2-9} = \frac{3}{(s-3)(s+3)}.$$

Le possibili regioni di convergenza, sia per $X(s)$ che per $Y(s)$, sono il semipiano $\mathrm{Re}(s) < -3$, la striscia di piano $-3 < \mathrm{Re}(s) < 3$ ed il semipiano $\mathrm{Re}(s) > 3$. Poichè per ipotesi sia $x(t)$ che $y(t)$ sono nulli per $t < 0$ si conclude che la regione di convergenza comune ad $X(s)$ ed $Y(s)$ è il semipiano destro $\mathrm{Re}(s) > 3$.

(b.) Per il calcolo di $x(t)$ ed $y(t)$ si decomponga in fratti semplici sia $X(s)$ che $Y(s)$:

$$X(s) = \frac{s}{(s-3)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-3} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3},$$
$$Y(s) = \frac{3}{(s-3)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-3} - \frac{\frac{1}{2}}{s+3},$$

e, considerando che la ROC è $\mathrm{Re}(s) > 3$, si ottengono le antitrasformate

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{-3t}\right) u(t),$$
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-3t}\right) u(t).$$

16.13

Si consideri la connessione in serie di due sistemi LTI continui, entrambi non BIBO stabili. Il sistema risultante è necessariamente non BIBO stabile? (Si dimostri l'asserto oppure si fornisca un controesempio).

Soluzione

Connettendo in serie due sistemi LTI entrambi non BIBO stabili, non si ottiene necessariamente un sistema non BIBO stabile. Ad esempio, le funzioni di trasferimento $H_1(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$, ed $H_2(s) = \frac{s}{s-1}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$, descrivono due sistemi LTI causali non BIBO stabili. Ma la loro connessione in serie ha funzione di trasferimento

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \mathrm{Re}\, s > -1,$$

che è un sistema LTI causale e BIBO stabile.

16.14

hidden text below