TRASFORMATA DI LAPLACE (TL)

La TL è utile per gestire facilmente alcuni problemi in cui la TFtc non è sufficiente, come, per esempio, lo studio di EDOLCC il cui sistema causale associato <u>non è</u> stabile. Infatti in questo caso non si può usare la TF per il calcolo di h_+

<u>DEFINIZIONE</u> Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Si dice che tale segnale <u>ammette trasformata di Laplace</u> se $\exists\, s_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{-s_0 t} x(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

In tal caso si definisce Trasformata di Laplace di x la funzione

$$X : s \in R \subseteq \mathbb{C} \to \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

dove R è l'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ per i quali $x(t) e^{-st} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

R è detto <u>regione di convergenza</u> (ROC) ed è non vuoto se x ammette TL, in quanto $s_0 \in R$

La TL di x sarà indicata con $X(s)$ o $\mathcal{L}(x(t))(s)$

Attenzione a non confondere il simbolo R (ROC) con il simbolo $\mathbb{R}$ (numeri reali)

<u>Struttura della ROC</u>

Se x ammette TL e $s_0 \in R$, ovviamente $X(s_0)$ converge perché $|X(s_0)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-s_0 t}| dt$ e per ipotesi $x(t) e^{-s_0 t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Sia ora $\sigma_0 = \mathrm{Re}(s_0)$ e $\omega_0 = \mathrm{Im}(s_0)$, cioè $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

È facile mostrare che, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, posto $s = \sigma_0 + j\omega$, $s \in R$

Infatti $|x(t) e^{-s_0 t}| = |x(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega_0 t}| = |x(t) e^{-\sigma_0 t}|$ e

$$|x(t)e^{-st}| = |x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-j\omega t}| = |x(t)e^{-\sigma_0 t}| = |x(t)e^{-s_0 t}|$$

quindi anche $x(t)e^{-st} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e quindi anche $X(s)$ converge

Questo vuol dire che tutta la retta individuata dall'equazione $Re(s) = \sigma_0$ appartiene alla ROC R

Quindi una ROC è <u>sempre</u> l'unione di "rette verticali nel piano di Gauss"

<u>Caso della funzione gradino</u>

Il segnale $u(t)$ ammette TL. Infatti, $\forall s : Re(s) > 0$,

$|u(t) \cdot e^{st}| = u(t) e^{-\sigma t}$ che è integrabile su $\mathbb{R}$ perché $\sigma = Re(s) > 0$

Invece, per $\sigma \leq 0$, $u(t)e^{-\sigma t} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La ROC è quindi data dal semipiano dei numeri complessi a parte reale positiva. In formule, $R = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$, a volte abbreviato in $R = Re(s) > 0$, con abuso di notazione

Tale ROC è in effetti l'unione d'infinite "rette verticali" nel piano di Gauss

<u>Caso della funzione $u(-t)$</u>

Anche $x(t) = u(-t)$ ammette TL. Infatti, $\forall s : Re(s) < 0$,

$|u(-t)e^{-st}| = u(-t)e^{-\sigma_0 t} = u(-t)e^{|\sigma_0| t}$

dove $\sigma_0 < 0$ è la parte reale di s e $|\sigma_0| = -\sigma_0$

Ma $\int_{-\infty}^{+\infty} u(-t) e^{|\sigma_0| t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{|\sigma_0| t} dt < +\infty$

Quindi $x(t)e^{-st} \in L^1(\mathbb{R})$ qualunque sia s con parte reale negativa, mentre è altrettanto facile riconoscere che, $\forall s: Re(s) \geq 0$,

$$x(t)\,e^{-st} = u(-t)\,e^{-st} \notin L^1(\mathbb{R})$$

Quindi la ROC di $u(-t)$ è $R = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) < 0\}$

o, in breve, $Re(s) < 0$

Primi esempi di calcolo di TL

Calcoliamo la TL di $u(t)$ per $Re(s) > 0$. Si ha:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

$\left[\text{perché } Re(s) > 0 \Rightarrow e^{-st} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0\right.$

Calcoliamo ora la TL del segnale $-u(-t)$, la cui ROC è ovviamente sempre $Re(s) > 0$. Con tale condizione su s otteniamo:

$$\mathcal{L}(-u(-t))(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -u(-t)\,e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s}$$

Come si vede, i segnali $u(t)$ e $-u(-t)$ hanno la stessa forma di TL. La differenza sta nella ROC che è

$Re(s) > 0$ nel primo caso e $Re(s) < 0$ nel secondo

Ecco perché bisogna sempre sapere qual è la ROC per poter individuare il segnale di cui una certa $X(s)$ è la TL

ROC di segnali causali e anticausali

Già sappiamo che le ROC sono sempre "unioni di rette".

Nel caso di segnali causali e anticausali, le ROC sono un semipiano

Lemma Se $x(t)$ ammette TL e $x(t) = x(t)\cdot u(t)$ (segnale "causale")

allora $\exists\, \sigma_0 \in \mathbb{R} : \quad \forall s : Re(s) > \sigma_0 \,, \quad s \in R$

Cioè la ROC contiene il semipiano a destra della retta di equazione $Re(s) = \sigma_0$

DIM. Per ipotesi, $\exists\, s_0 : \quad x(t)e^{-s_0 t} \in \mathcal{L}^1$. Sia allora $\sigma_0 = Re(s_0)$

$$\forall s : Re(s) > \sigma_0 \,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-st}x(t)|dt \overset{(a)}{=} \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\cdot|x(t)|dt$$

$$\overset{(b)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t}\cdot|x(t)|\, dt \overset{(c)}{<} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t}|x(t)| \overset{(d)}{<} +\infty$$

(a): perché $x(t) = u(t)\cdot x(t)$

(b): abbiamo chiamato $\sigma = Re(s)$

(c): $\sigma > \sigma_0$ per ipotesi e quindi $e^{-\sigma t} < e^{-\sigma_0 t} \quad \forall t > 0$

(d): $e^{-\sigma_0 t}\cdot|x(t)| = |x(t)e^{-s_0 t}|$ ma $x(t)e^{-s_0 t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ per ipotesi

Quindi la ROC contiene il semipiano $Re(s) > \sigma_0$

In effetti, $\forall s \in R$, tutto il semipiano a destra di s deve appartenere alla ROC. Quindi la ROC di un segnale causale:

- o è vuota (cioè x non ammette TL)
- o è un semipiano destro
- o è tutto il piano $\mathbb{C}$.

In modo molto simile, è facile mostrare che se $x(t)$ è anticausale (cioè ha supporto per $t<0$ equivalente a dire che $x(t) = x(t) \cdot u(-t)$), la sua TL se esiste, converge in un semipiano sinistro (o in tutto $\mathbb{C}$)

<u>Esempi</u> In effetti la ROC di $u(t)$ è il semipiano $Re(s)>0$ e la ROC di $-u(-t)$ è il semipiano $Re(s)<0$

<u>Linearità della TL</u> Dalla definizione di TL e per linearità dell'integrale, se x_1 e x_2 sono dotate di TL con ROC rispettivamente R_1 e R_2, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ è necessariamente dotato di TL se $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ e la sua ROC contiene tale intersezione. Inoltre $X(s) = \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$

La DIM è immediata dalla definizione

<u>ROC di un segnale non causale</u>

Se il supporto di x comprende valori positivi e negativi di t, e se x ammette TL, la sua ROC è una "striscia" del piano di Gauss delimitato da due rette di equazioni $Re(s) = \sigma_1$ e $Re(s) = \sigma_2$, o, in breve $R = \sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$

<u>DIM</u> Possiamo scrivere $x(t) = x(t)\big(u(t) + u(-t)\big) = x(t)u(t) + x(t)u(-t)$

$$= x_1(t) + x_2(t)$$

dove $x_1(t) = x(t)\,u(t)$ causale $\Rightarrow R_1 = Re(s) > \sigma_1$

e $x_2(t) = x(t)\,u(-t)$ anticausale $\Rightarrow R_2 = Re(s) < \sigma_2$

Se $\sigma_1 < \sigma_2$ allora $R_1 \cap R_2 \neq 0$

Allora x ammette TL con ROC che contiene $\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$

Inoltre si può dimostrare che in questo caso la ROC è proprio $\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$

Infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} x_1(t) e^{-st} dt + \int_{0}^{+\infty} x_2(t) e^{-st} dt$

Se $Re(s) \leq \sigma_1$ il 1° integrale è finito e il secondo non converge quindi non sono nella ROC

Similmente se $Re(s) \geq \sigma_2$ è il primo integrale a divergere, mentre il secondo è finito

N.B. se $R_1 = \mathbb{C}$ o $R_2 = \mathbb{C}$ o entrambi, la ROC di x è un semipiano o sarà tutto $\mathbb{C}$

Conclusione sulla struttura delle ROC

Se un segnale x è dotato di TL, la ROC può essere:

1) Tutto il piano di Gauss
2) Un semipiano destro
3) Un semipiano sinistro
4) Una striscia

- Per segnali causali, la ROC è di Tipo 2 (o 1, che è un caso particolare di semipiano con $\sigma_0 \to -\infty$)
- Per segnali anticausali la ROC è di Tipo 3 (o 1, caso particolare con $\sigma_0 \to +\infty$)
- Per segnali casuali è di Tipo 4, che comprende gli altri Tipi come casi particolari

Trasformata di Laplace e TFtc

È facile verificare il seguente lemma:

Se x è dotato di TL e l'asse immaginario $\mathrm{Re}(s)=0$ appartiene alla ROC, allora

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(x(t))(s)\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}(x(t))(\omega) \qquad (\text{TFtc di } x(t) \text{ in } \omega)$$

Infatti, posto $s=j\omega$ nella definizione di TL si ottiene proprio la definizione di TFtc.

Similmente, se x ammette TL e $s=\sigma+j\omega \in R$, allora

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}(x(t)\, e^{-\sigma t})(\omega)$$

Siccome $x(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, possiamo sicuramente calcolarne la TFtc che inoltre è una funzione continua di ω

Questo risultato può essere usato per calcolare la TL inversa:

Preso s all'interno della ROC, siano $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ e $\omega = \mathrm{Im}(s) \Leftrightarrow s = \sigma + j\omega$.

$$x(t) = e^{\sigma t} \cdot e^{-\sigma t} x(t) = e^{\sigma t}\, \mathcal{F}^{-1}(X(\sigma+j\omega)) = e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right)$$

<u>Controesempio</u> $\mathrm{Re}(s)=0 \notin$ ROC di $u(t)$ e infatti

$$\mathcal{L}(u(t))(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} \neq \mathcal{F}(u(t))(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Si noti comunque che la TL permette di lavorare con la funzione $u(t)$ senza dover usare le distribuzioni (cioè la delta di Dirac)

Esempi di calcolo della TL

⚠ Bisogna sempre specificare la ROC

1) $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$, ROC: $Re(s) > 0$ (vd pag. 2)

2) $x(t) = u(-t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$, ROC: $Re(s) < 0$ (vd pag. 3)

3) $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a \in \mathbb{C}$:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^{+\infty}$$

converge se e solo se $Re(s) > -Re(a)$. In tal caso

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

4) $x(t) = -e^{-at} u(-t)$, $a \in \mathbb{C}$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}$$ $R = Re(s) > -Re(a)$

5) $x(t) = \delta(t-T)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) e^{-st} dt = e^{-sT}$$ $ROC = \mathbb{C}$

6) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}$

Scriviamo $x(t) = e^{-a|t|} \cdot (u(t) + u(-t)) = e^{-a|t|} u(t) + e^{-a|t|} u(-t)$

$= e^{-at} u(t) - (-e^{at} u(-t))$ Applichiamo il lemma di linearità:

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$ Con ROC $-a < Re(s) < a$

Quindi la ROC è ~~non~~ vuota se e solo se $a > 0$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2j}\frac{s+j\omega_0 - s+j\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

La ROC è l'intersezione delle ROC dei 2 addendi: ma entrambe le ROC sono $Re(s)>0$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad , ROC = Re(s)>0$$

(come per il caso preceden

Proprietà TL

Sia x un segnale che ammette TL con ROC R_x

Definiamo gli insiemi:

$$\forall s_0 \in \mathbb{C}, \qquad R_x + s_0 = \{ s \in \mathbb{C} : s - s_0 \in R_x \}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad a \cdot R_x = \{ s \in \mathbb{C} : \frac{s}{a} \in R_x \}$$

Calcoliamo ora la TL di segnali ottenuti applicando a x vari operatori. La ROC del segnale risultante è indicata con R

Le dimostrazioni delle proprietà seguenti sono semplici applicazioni della definizione di TL

1) Coniugio: $\mathcal{L}(\bar{x})(s) = \bar{X}(\bar{s})$ $R = R_x$

2) Traslazione: $\mathcal{L}(U_\beta[x])(s) = e^{-\beta s} X(s)$ $R = R_x$

3) Modulazione $\mathcal{L}(e^{s_0 t}[x])(s) = X(s - s_0)$ $R = R_x + Re(s_0)$

4) Cambio scala $\mathcal{L}(x(at))(s) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ $R = a R_x$

5) Derivata in s $\mathcal{L}(t x(t))(s) = -\frac{d}{ds} X(s)$ $R = R_x$

$\mathcal{L}(t^n x(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$ $R = R_x$

6) Convoluzione $\mathcal{L}(v * w)(s) = V(s) \cdot W(s)$ $R \supset (R_V \cap R_W)$

7) Integrale $\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} X(s)$ $R \supset (R_x \cap \{Re(s) > 0\})$

8) Derivata $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} x(t)\right) = s X(s)$ $R \supset R_x$

$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} x(t)\right) = s^n X(s)$ $R \supset R_x$

Funzione di Trasferimento

Dato un SLI, se $h(t)$ ammette TL, $H(s)$ è detta funzione di Trasferimento del sistema.

Notare che la funzione di Trasferimento esiste anche per sistemi non stabili, purchè la ROC di h non sia vuota

Inoltre, se $y = h * x$, allora $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

Tabella Trasformat. di Laplace Vd. libro

Ricordiamo $\mathcal{L}(t^k x(t))(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} X(s)$ (Roc: $Re(s)>0$)

Quindi $\mathcal{L}(t^k u(t))(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = (-1)^k \cdot (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$

Applicando la modulazione con $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}(t^k e^{\lambda t} u(t))(s) = \frac{k!}{(s-\lambda)^{k+1}} \qquad Re(s) > .(\lambda)$$

equivalente a $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right)(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} u(t)}$ $Re(s)>Re(\lambda)$

È la TL inversa di un fratto semplice (R1)

Invece, se $Re(s) < Re(\lambda)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right) = -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} u(-t)$

La TLI di un fratto semplice permette di invertire una frazione propria di polinomi

Ma bisogna fare attenzione alla ROC

Sia $W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ con: ∂b (grado di $b(s)$) $= m$
$\partial a = n$

e con $n > m$

$\Leftarrow$ significa frazione propria

Siano $\lambda_1, \dots \lambda_r$ le radici distinte di $Q(s)$

ognuno con molteplicità n_i

La decomposizione in fratti semplici di W è

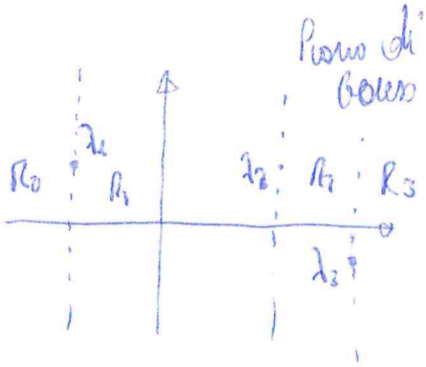
$$\boxed{W(s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{A_{i,k}}{(s-\lambda_i)^{k+1}}}$$

Per trovare la TLI di W bisogna

1) Calcolare le singole TLI di $\frac{1}{(s-\lambda_i)^{k+1}}$

2) Determinare i coefficienti $A_{i,k}$

Per 1) bisogna fissare la ROC
e ciò dipende dal problema.



Per esempio, se cerchiamo una soluzione
causale la ROC è $Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Se cerchiamo una soluzione stabile, la ROC deve includere $Re(s)=0$

Una volta fissata la ROC, la TLI di $\frac{1}{(s-\lambda_i)^{k+1}}$ è $\pm \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} u(\pm t)$

con il segno + se λ_i è a sx della ROC, e il segno − se λ_i è a destra

Per 2) vediamo qualche esempio

1) $W(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$

Passo 1: Trovare le radici: $(s^2 - s - 2) = (s+1)(s-2)$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2$ e $\boxed{W(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-2)} = \dfrac{A_1}{s+1} + \dfrac{A_2}{s-2}}$

Le ROC possibili sono: $Re(s) < -1$

$-1 < Re(s) < 2$ ⇒ soluzione stabile perché $Re(s) = 0 \subset ROC$

$Re(s) > 2$ ⇒ soluzione causale perché tutte le radici sono a sx

La trasformata inversa è quindi

$$\pm A_1 e^{-t} u(\pm t) \pm A_2 e^{2t} u(\pm t)$$

La soluzione causale si ha per ROC: $Re(s) > 2$ ⇒

$$w(t) = A_1 e^{-t} u(t) + A_2 e^{2t} u(t)$$

La soluzione stabile si ha per ROC $-1 < Re(s) < 2$

$$\Rightarrow \quad w(t) = A_1 e^{-t} u(t) - A_2 e^{2t} u(-t)$$

qui ci sono i segni meno perché siamo a sx della radice 2

Importante confrontare questo risultato con quanto ottenuto nella ricerca della soluzione di: $y'' - y' - 2y = x$

2) Calcolo di A_1 e A_2

Partiamo da $W(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s-2}$

Si ha: $A_1 = (s+1)W(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$

$$A_2 = (s-2)W(s)\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

Quindi $A_1 = -1/3$, $A_2 = 1/3$

soluzione causale: $w(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

soluzione L^1 (cioè "stabile") $w(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u_{-}(t)$

Nel seguito ci interesserà cercare quasi sempre la soluzione causale

Essa sarà anche L^1 se e solo se tutte le λ_i hanno parte reale strettamente negativa

Caso con coefficienti reali e radici complesse coniugate

Se ci sono 2 radici c.c.: $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ e $\lambda_2 = \sigma - j\omega$

invece di considerare i fratti semplici: $\frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2}$ $(*)$

possiamo usare direttamente il fratto $\frac{B(s-\sigma)+C\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$ $(**)$

la cui TL1 (causale) è $u(t)e^{\sigma t}(B\cos\omega t + C\sin\omega t)$
(vedere Tabelle TL)

DIM. (opzionale) Mostriamo che $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti

$$\frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2} = \frac{A_1}{s-\sigma-j\omega} + \frac{A_2}{s-\sigma+j\omega} = \frac{A_1 s - A_1\sigma + jA_1\omega + A_2 s - A_2\sigma - A_2 j\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)(s-\sigma) + j(A_1-A_2)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \frac{B(s-\sigma)+C\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$B = A_1 + A_2$ e $C = j(A_1 - A_2)$

Se $a(s)$ è a coeff. reali, si mostra che $A_2 = \bar{A}_1 \Rightarrow B, C \in \mathbb{R}$

Esempio

$$W(s) = \frac{5s^2+10s+5}{s^3+2s^2+5s}$$

$$Q(s) = s(s^2+2s+5) \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j \qquad \begin{cases} \sigma = -1 \\ \omega = 2 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$W(s) = \frac{5s^2+10s+5}{s(s+1-2j)(s+1+2j)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1) - 2C}{(s+1)^2 + 4}$$

la TLI causale è $\quad w(t) = A\,u(t) + e^{-t}u(t)\left(B\cos 2t + C \operatorname{sen} 2t\right)$

Ora troviamo A, B e C

$$A = sW(s)\Big|_{s=0} = \frac{5}{(1+2j)(1-2j)} = \frac{5}{5} = 1$$

Due modi per trovare B e C

1) Trovare $\quad W(s) = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2} + \frac{A_3}{s-\lambda_3}$ e poi $B = A_1 + A_2$

$C = j(A_1 - A_2)$

$$A_1 = (s+1-2j)W(s)\Big|_{s=-1+2j} = \frac{5s^2+10s+5}{s(s+1+2j)}\Big|_{s=-1+2j} = \frac{5(-1+2j)^2+10(-1+2j)+5}{(-1+2j)(-1+2j+1+2j)}$$

$$= \frac{5(1-4-4j)-10+20j+5}{-4j-8} = \frac{-15-20j-5+20j}{-4(2+j)} = \frac{5}{2+j} = \frac{5(2-j)}{4+1} = 2-j$$

$$A_2 = (s-1-2j)W(s)\Big|_{s=-1-2j} = \dots = 2+j$$

$\Rightarrow \quad B = 4 \quad$ e $\quad C = -2j \cdot j = 2$

Oppure, siccome $W(s) = \frac{1}{s} + \frac{B(s+1)+2C}{(s+1)^2+4}$

calcoliamo $W(1)$ e $W(-1)$

$$W(1) = \frac{5\cdot 1+10+5}{1+2+5} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \qquad \text{(dalla def di } W)$$

$$W(1) = 1 + \frac{B\cdot 2+2C}{4+4} = \frac{B+C}{4}+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B+C}{4}+1 = \frac{5}{2}$$

$$W(-1) = \frac{5-10+5}{-1+2+5} = 0$$

$$\Rightarrow +\tfrac{1}{2}C - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$W(-1) = -1 + \frac{+2C}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{B+2}{4}+1 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

Caso $W(s) = q(s) + \frac{b_0(s)}{a(s)} = \sum_{k=0}^{m-n} q_k s^k + \frac{b_0(s)}{a(s)}$

In tal caso il contributo di $q(s)$ è $q(t) = \sum_{k=0}^{m-n} q_k \delta^{(k)}(t)$ (RoC: $\mathbb{C}$

mentre la frazione propria $\frac{b_0(s)}{a(s)}$ si inverte come visto prima

Trasformata di Laplace monolatera (TL+)

La TL+ di un segnale x(t) è definita come

$$X_+(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

la ROC è sempre un semipiano destro perché la TL+ è la TL di un opportuno segnale causale

Note : 1) L'estremo 0^- serve a includere nell'integrale un eventuale $\delta(t)$

2) Se $\forall t > 0$ $x_1(t) = x_2(t)$, allora $X_{1+}(s) = X_{2+}(s)$

ma non necessariamente $X_1(s) = X_2(s)$

3) Se $x(t) = 0$ $\forall t < 0$ (cioè x(t) è causale)

allora $X_+(s) = X(s)$

quindi la Tabella delle TL causali vale anche per la TL+

4) Le proprietà della TL+ sono le stesse della TL con due eccezioni :

4.1) La Traslazione si può applicare se x è causale e $t_0 > 0$. In tal caso

$$\mathcal{L}_+(x(t-t_0))(s) = X_+(s) \cdot e^{-t_0 s}$$

4.2) Regola della derivata $\mathcal{L}_+\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)(s) = s X_+(s) - x(0^-)$

e $$\mathcal{L}^+\left(\frac{d^k}{dt^k} x(t)\right) = s^k X_+(s) - \sum_{n=0}^{k-1} s^n \, x^{(k-1-n)}(0^-)$$

Applicazione al problema di Cauchy causale

Il PCC era definito da:
$$\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ x(t) = 0 \quad \forall t<0 \\ y(0^-)=y_0, \; y'(0^-)=y_1, \dots \; y^{(n-1)}(0^-)=y_{n-1} \end{cases}$$

Applichiamo la TL+ all'EDOLCC:

$$\mathcal{L}^+\big(a(D)(y)\big) = \mathcal{L}^+\big(b(D)(x)\big)$$

perché $x^{(k)}$ è causale e quindi $\mathcal{L}_+(x^{(k)}) = \mathcal{L}(x^{(k)})$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}_+(y^{(k)}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{L}^+(x^{(k)}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{L}(x^{(k)})$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Big[s^k Y_+(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^l y_{k-l-1} \Big] = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k X(s)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \, Y_+(s) - \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} y_{k-l-1} \cdot s^l = b(s) X(s)$$

è $a(s)$

$$Y_+(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{l=0}^{k-1} y_{k-l-1} \cdot s^l}{a(s)} + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot X(s)$$

$$Y_+(s) = Y_e(s) + Y_f(s)$$

$Y_e(s)$ è una funzione razionale fratta

$Y_f(s) = H_+(s) \cdot X(s)$ e $H_+(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ ed è causale

Quindi è facile trovare la TL+ di Y:

è la somma di $Y_e(s)$ e $H_+(s) \cdot X(s)$

Come s'inverte la TL+?

con ROC semipiano destro per trovare la TLI causale

In pratica si inverte $Y_+(s)$ come se fosse una TL bilatera, ma il risultato trovato vale solo per $t>0$

cioè $\mathcal{L}^{-1}(Y_+(s))(t) = y(t) \cdot u(t)$

DIM sia $v(t) = y(t) \cdot u(t)$

Allora $V_+(s) = V(s)$ (perché V è causale)

e inoltre $V_+(s) = Y_+(s)$ (perché $v(t) = y(t) \; \forall t>0$)

Allora $\mathcal{L}^{-1}(Y_+(s)) = \mathcal{L}^{-1}(V_+(s)) = \mathcal{L}^{-1}(V(s)) = y(t)u(t)$

Quindi per risolvere il PCC basta trovare le TLI delle funzioni razionali $Y_e(s)$ e $H(s)$, e poi la convoluzione tra h_+ e x. Se possibile, si può anche direttamente invertire $H(s) \cdot X(s)$.

Ecco perché è così importante studiare l'inversione della TL nel caso di funzioni razionali

Sistema LTI causale associato a una EDOLCC

Ricordiamo che in un PCC con condizioni iniziali nulle, la relazione tra ingresso e uscita è $y = h_+ * x$

quindi è un LTI

Il problema è $\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ y(0^-) = 0, \dots \quad y^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases}$

Siccome tutti i segnali coinvolti sono causali, la TL e la TL+ coincidono.

Dalla EDOLCC si ha, applicando la TL: $a(s)Y(s) = b(s)X(s)$

Allora, nel semipiano destro, $Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} X(s)$
$Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Allora $H_+(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ ROC: $Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Effettuando la divisione tra polinomi:

$$H_+(s) = q(s) + \frac{b_0(s)}{a(s)} \qquad q(s) = 0 \text{ se } m < n$$

$$\Rightarrow h_+(t) = \sum_{k=0}^{m-n} q_k \delta^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{A_{i,k}}{k!} t^k e^{\lambda_i t} u(t)$$

Per la stabilità, non ci devono essere derivate di δ: quindi $\boxed{n \geq m}$

e la ROC deve comprendere $Re(s) = 0 \iff \boxed{\forall i, \ Re(\lambda_i) < 0}$

Sono le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità

Esempio

Sia $H(s) = \frac{1}{s^2-s}$ la funzione di Trasf. di un sistema causale

1) Scrivere l'eq. diff. associata
2) Dire se il sistema è stabile
3) Calcolare $h(t)$
4) Calcolare l'ingresso che genera l'uscita $y(t) = \sin(t)u(t)$

1) $y'' - y' = x$

2) No, perché $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ radici a parte reale non negativa

3) $H(s) = \frac{1}{s^2-s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)}$ ROC $Re(s) > 1$

$A_1 = sH(s)\big|_{s=0} = -1$

$A_2 = (s-1)H(s)\big|_{s=1} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow h(t) = u(t)(-1 + e^t)$

4) $Y(s) = \frac{1}{s^2+1} = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2-s}X(s)$ ROC semipiano destro

$X(s) = \frac{s^2-s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1-s}{s^2+1} = 1 - \frac{s+1}{s^2+1} = 1 - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$

Dalle Tabelle: $x(t) = \delta(t) - u(t)\cos t - u(t)\sin(t)$

Cenni sulla Trasformata Z

La Trasformata Z di un segnale t.d $x(n)$ è

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

le ROC sono corone circolari nel piano complesso

La TZ è l'analogo della TL a Tempo discreto

Vale $TZ(v * w) = V(z) \cdot W(z)$

quindi $y = h * x \iff Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

$H(z)$ è la funzione di Trasferimento del sistema

È importante il caso in cui $H(z) = \dfrac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$

$A(z^{-1})$ [e $B(z^{-1})$] è una somma di potenze (eventualmente positive e negative) di z^{-1}. Se ci sono solo potenze positive e nulle di z^{-1} è un polinomio

perché corrisponde a LTI facilmente implementabili con equazioni alle differenze (cioè con un numero finito di operazioni)

(cioè non ci sono potenze positive di z)

$\boxed{\text{Proprietà}}$: Se $A(z^{-1}) = 1$ e $B(z^{-1})$ è un polinomio in z^{-1}, allora il sistema ha risposta impulsiva finita ed è causale. In tal caso, $H(z)$ è un polinomio in z^{-1}. Se in $A(z^{-1})$ appaiono almeno due distinte potenze di z^{-1}, il sistema ha RI infinita. Per un sistema causale se i "poli" di $H(z)$ (cioè i valori per cui $A(z^{-1})=0$) sono tutti all'interno del cerchio unitario, il sistema è stabile