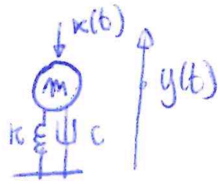
Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti (EDOLCC)

Numerosi problemi fisici sono descritti da EDOLCC

Esempio: sistema massa-molla-smorzatore:



la posizione della massa rispetto al riposo è $y(t)$

la forza applicata è $x(t)$, e si ha $my'' + cy' + ky = x$

Esempio Circuito RLC

la corrente che attraversa il circuito è $y(t)$, la tensione applicata è $x(t)$; si ha $y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC}y = x'$

La forma più generale di un'EDOLCC è

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)} \quad (1)$$

In questa formulazione, x è un segnale noto (a T.c.) o "ingresso" e y è un segnale da determinare, o "uscita".

$x^{(k)}$ è la derivata k-esima di x

$y^{(k)}$ è la derivata k-esima di y

Possiamo sempre considerare a_n e b_m non nulli.
In altre parole, n è il più grande valore di k per cui $a_k \neq 0$
Similmente per m.
Siccome $a_n \neq 0$, possiamo dividere ambo i membri della (1) per a_n

ottenendo una nuova equazione in cui il coeff. di $y^{(n)}$ è uguale a 1.
Per semplicità quindi, d'ora in poi considereremo sempre $a_n = 1$

Si noti che i coefficienti a_k e b_k sono, $\forall k$, indipendenti dalla variabile da cui dipendono x e y. Per questo si parla di "coefficienti costanti"

Risolvere l'EDOLCC significa trovare tutte le coppie di segnali x e y per le quali la (1) è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$

Polinomi $a(s)$ e $b(s)$

È utile introdurre due polinomi di variabile complessa s:

$$a(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \qquad \text{e} \qquad b(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k$$

Scrittura formale

Sia D l'operatore di derivata: $x' = D(x)$

Formalmente, scriveremo $D^k x$ per indicare la derivata k^{ma} di x

Allora possiamo usare i polinomi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ per scrivere l'EDOLCC:

$$a(D)(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}$$

$$b(D)(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k x = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}$$

la (1) si può riscrivere: $a(D)(y) = b(D)(y)$

Un'EDOLCC può ammettere, in generale, infinite uscite y che la soddisfano insieme allo stesso ingresso x.

Quindi, senza altre condizioni, un'EDOLCC non è un sistema secondo la nostra definizione, perché ad uno stesso ingresso possono corrispondere più uscite.

Tuttavia, se si fissano opportuni vincoli, si ripristina la corrispondenza "uno-a-uno" tra ingresso e uscita. In particolare, vale il seguente Teorema

<u>Teorema di esistenza e unicità della soluzione di un'EDOLCC con condizioni iniziali</u>

- Siano $a(s)$ e $b(s)$ due polinomi di grado n e m rispettivamente
- Sia x un segnale per il quale è possibile esprimere $x^{(m)}$ (derivata m-esima) come una funzione o come una funzione generalizzata
- Sia $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$ un vettore di n numeri reali: $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Si definisce allora "Problema di Cauchy" una EDOLCC con condizioni iniziali:

$$\boxed{\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0^-) = y_0, \quad y'(0^-) = y_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (2)}$$

Il Teorema di esistenza e unicità afferma che la soluzione di tale P.d.C. <u>esiste ed è unica</u> [SENZA DIM.]

<u>Nota 1</u> La scelta di porre le condizioni iniziali all'istante 0 è arbitraria e si potrebbe riformulare il Teorema con le condizioni: $y(t_0^-) = y_0$, $y'(t_0^-) = y_1$, ... $y^{(n-1)}(t_0^-) = y_{n-1}$ qualunque sia $t_0 \in \mathbb{R}$. La scelta $t_0 = 0$ semplifica la notazione

<u>Nota 2</u> Le condizioni iniziali sono espresse come limiti sinistri della soluzione, in modo da includere soluzioni con discontinuità in zero.

<u>Esempio</u> Consideriamo l'EDOLCC $y' = x$

Posto $x = \delta$, è chiaro che, senza condizioni iniziali avremmo $y(t) = u(t) + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Scrivendo la condizione iniziale $y(0^-) = 0$ si ottiene $c = 0$ e $y(t) = u(t)$, senza doverci preoccupare della discontinuità in $t = 0$

Nota 3 Il P.d.C (2) definisce un sistema secondo la nostra definizione, perché ad ogni ingresso x corrisponde una ed una sola uscita y

Nota 4 In generale, tale sistema non è lineare, in quanto ad un ingresso nullo può corrispondere un uscita non nulla.
In effetti questo dipende dalle condizioni iniziali: si può mostrare che un'EDOLCC con condizioni iniziali nulle (cioè $\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$) definisce un sistema LTI

Tuttavia noi saremo interessati al caso più generale

Equazione omogenea associata

Data un'EDOLCC $a(D)(y) = b(D)(x)$, si definisce "omogenea associata" a tale equazione, una nuova EDOLCC:

$$a(D)(y) = 0$$

cioè l'omogenea associata (OA) di $a(D)(y) = b(D)(x)$ si ottiene imponendo $x = 0$

Risolvere l'O.A. è particolarmente importante perché vale il seguente Teorema

<u>Teorema sulla struttura delle soluzioni di un'EDOLCC</u>

Sia y_p una qualsiasi soluzione della (1)

1) Qualunque sia y_0 soluzione della O.A., $y = y_p + y_0$ è ancora soluzione della (1)

2) Qualunque sia y soluzione della (1), $\exists \; y_0$ soluzione dell'OA tale che $y = y_p + y_0$

In altre parole, fissato y_p, l'insieme $y_p + y_0$ con y_0 soluzione dell'OA. descrive tutte e sole le soluzioni della (1)

<u>DIM</u> Cominciamo con il punto 1, cioè
y_p è una soluzione della (1) e y_0 della O.A.,
allora anche $y_p + y_0$ è una soluzione della (1).

Basta osservare che la prima ipotesi significa $a(D)(y_p) = b(D)(x)$ mentre la seconda significa $a(D)(y_0) = 0$

Allora abbiamo:

$$a(D)(y) = a(D)(y_p + y_0) \overset{(a)}{=} a(D)(y_p) + a(D)(y_0) = b(D)(x) + 0 = b(D)(x)$$

CVD.

Il passaggio (a) è giustificato dalla linearità dell'operatore D^*

2) Ora y è una soluzione della (1). Poniamo $y_0 = y - y_p$ e mostriamo che è una soluzione dell'O.A., cioè che $a(D)(y_0) = 0$.

$$a(D)(y_0) = a(D)(y - y_p) = (y) - a(D)(y_p) = b(D)(x) - b(D)(x) = 0$$ CVD

<u>In conclusione</u> l'insieme delle soluzioni della (1) <u>non è</u> uno spazio vettoriale (non è chiuso rispetto alla somma) ma è <u>affine</u> cioè generato da un vettore y_p più il sottospazio Y_0 (vd. pag. 9)

Problema di Cauchy causale (PCC)

Spesso è importante considerare una versione particolare del PdC (2), detto "Problema di Cauchy causale" (PCC).

Nel PCC si suppone che $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$ cioè il sistema "non è sollecitato" per $t < 0$.

Nell'istante $t = 0$ si assegnano le condizioni iniziali, dette anche stato del sistema.

Inoltre, a partire da $t = 0$, il sistema può essere sollecitato, cioè il segnale x è libero di assumere un andamento qualsiasi per $t \geq 0$ (purché x e tutte le sue m derivate siano esprimibile come segnali o come segnali generalizzati, cioè con delta o derivate della delta)

In tali condizioni, ci interessa l'andamento di y ma soltanto per $t > 0$

In altre parole: 1) conosciamo lo stato del sistema per $t \to 0^-$

2) conosciamo l'ingresso per $t \geq 0$

3) cerchiamo l'uscita per $t \geq 0$

questo tipo di problemi è molto comune in tanti ambiti della fisica e dell'ingegneria

Matematicamente, il PCC si scrive come segue:

$$\boxed{\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ x(t) = 0 \quad \forall t<0 \\ y(0^-) = y_0; \quad y'(0^-) = y_1, \dots \quad y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases} \quad (3)}$$

Vale allora il seguente <u>teorema della risposta libera e risposta forzata</u>

Il problema (3) ammette $\forall t>0$, una ed una sola soluzione $y(t)$, che si esprime come somma di due contributi:

$$\forall t>0, \qquad y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$y_\ell(t)$ è la "risposta libera" definita come unica soluzione del PDC seguente: $\begin{cases} a(D)(y_\ell) = 0 \\ y_\ell(0) = y_0 \quad y_\ell'(0) = y_1, \dots \quad y_\ell^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases}$ (4)

cioè y_ℓ è l'evoluzione libera (cioè, senza sollecitazione x) del sistema date le condizioni iniziali assegnate

$y_f(t)$ è la "risposta forzata" ed è esprimibile come

$$y_f = h_+ * x$$

dove, a sua volta, h_+ è la risposta del sistema ad ingresso impulsivo ma con stato iniziale a riposo. Cioè:

$$\begin{cases} a(D)(h_+) = b(D)(\delta) \qquad (5) \\ h_+(0^-) = 0, \quad h_+'(0^-) = 0, \dots \quad h_+^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases}$$

La risposta forzata è la risposta impulsiva del "sistema a riposo" (cioè con condizioni iniziali nulle) ed essendo una convoluzione può in effetti vedersi come uscita di un LTI causale (infatti $h_+(t)$ deve essere nulla per $t<0$)

Tale LTI è il cosiddetto LTI causale associato al PCC

Questo Teorema è senza dimostrazione

Struttura dello spazio Y_0 delle soluzioni dell'O.A.

Lo spazio Y_0 delle soluzioni di $a(D)(y)=0$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Infatti, se y_1 e $y_2 \in Y_0$, allora $a(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\, a(D)(y_1) + \beta\, a(D)(y_2) = 0$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in Y_0$

La dimensionalità dello spazio deriva dal seguente Teorema:

Teorema Base di Y_0

Data un'EDOLCC omogenea $a(D)(y)=0$, si considerino le radici del polinomio $a(s)$, detto polinomio caratteristico.

In particolare, sia r il numero di radici <u>distinte</u> del polinomio, indicate quindi con $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$

Ovviamente, $r \leq n$ e, detto n_i la molteplicità della radice λ_i, si ha che $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$

Allora, una base di Y_0 è formata dalle seguenti n funzioni:

$$e^{\lambda_1 t}, \quad t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad t^{n_1 - 1} \cdot e^{\lambda_1 t} \qquad (n_1 \text{ funzioni})$$

$$e^{\lambda_2 t}, \quad t e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad t^{n_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \qquad (n_2 \text{ funzioni})$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_r t}, \quad t e^{\lambda_r t}, \quad \dots, \quad t^{n_r - 1} e^{\lambda_r t} \qquad (n_r \text{ funzioni})$$

<u>DIM.</u> Limitiamoci a mostrare che $e^{\lambda_i t}$ è una soluzione dell'equazione $a(D)(y) = 0$

Infatti osserviamo che, posto $\tilde{y} = e^{\lambda t}$, $D^k(\tilde{y}) = \lambda^k e^{\lambda t} = \lambda^k \tilde{y}(t)$

Allora $a(D)(\tilde{y}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{y}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tilde{y}(t) = a(\lambda) \cdot \tilde{y}(t)$

Allora, se λ è una radice di a, è ovvio che $a(D)(\tilde{y}) = 0$

Con qualche calcolo, si può mostrare che, se $\tilde{y}(t) = t e^{\lambda t}$, allora $a(D)(\tilde{y}) = e^{\lambda t} \cdot \frac{d}{d\lambda} a(\lambda) + y(t) \cdot a(\lambda)$

Se $n_i \geq 2$, allora $a(\lambda_i) = 0$ e $a'(\lambda_i) = 0 \Rightarrow a(D)(t e^{\lambda_i t}) = 0$

<u>Concludendo</u> la generica soluzione dell'OA si scrive: $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i} c_{i,k} t^k e^{\lambda_i t}}$
dove $c_{i,k}$ sono coeff. arbitrari

Caso di EDOLCC a coefficienti reali

Nel caso generale, il Teorema sulla struttura di Y_0 dice che una base di tale spazio è $\{t^k e^{\lambda_i t}\}_{\substack{i=1,\dots,r \\ k=0,\dots,n_i-1}}$

Se il polinomio caratteristico ha coefficienti reali, si può ricavare un'altra base di Y_0

Infatti, se $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{0,\dots,n\}$ allora le radici del polinomio caratteristico sono o reali o a coppie complesse coniugate

In altre parole, o $\lambda_i = \sigma_i$, o $\lambda_{2i} = \sigma_i + j\omega_i$ e $\lambda_{2i+1} = \sigma_i - j\omega_i$

con σ_i e ω_i reali

Le radici reali del polinomio caratteristico danno luogo alle funzioni di base $t^k e^{\sigma_i t}$

Le coppie di radici complesse coniugate danno luogo a

$y(t) = t^k e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$ e $\hat{y}(t) = t^k e^{\sigma_i \omega t} e^{-j\omega t}$

Ora, il sottospazio generato da y e $\hat{y}$ è rappresentato dal generico elemento span $(y, \hat{y})$:

$$\alpha y(t) + \beta \hat{y}(t) = \alpha t^k e^{t(\sigma_i + j\omega_i)} + \beta t^k e^{t(\sigma_i - j\omega_i)}$$

$$\alpha t^k e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} + \beta t^k e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} =$$

$$= \alpha t^k e^{\sigma_i t} (\cos \omega_i t + j \sin \omega_i t) + \beta t^k e^{\sigma_i t} (\cos \omega_i t - j \sin \omega_i t)$$

$$= (\alpha + \beta) \cdot (t^k e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t) + j(\alpha - \beta)(t^k e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t)$$

che è il sottospazio generato da $\begin{cases} t^k e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t \text{ e} \\ t^k e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t \end{cases}$

In conclusione, per un EDOLCC a coeff. reali, lo spazio Y_0 delle soluzioni dell'omogenea associata è generato dalle funzioni:

$\{t^k e^{\sigma_i t}\}_{k=0,\dots n_i-1}$ per ogni radice reale $\lambda_i = \sigma_i$ del polinomio caratteristico di molt. n_i

$\{t^k e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t, \ t^k e^{\sigma_i} \sin \omega_i t\}_{k=0,\dots n_i-1}$

per ogni coppia di radici complesse coniugate

$\lambda_{2i, 2i+1} = \sigma_i \pm j\omega_i$

con molteplicità n_i

Soluzione di un'EDOLCC omogenea con condizioni iniziali

Il Teorema sulla base di Y_0 permette di affermare che quest'ultimo è uno spazio vettoriale di dim. n

Imponendo n condizioni iniziali riusciamo dunque a individuare l'unica soluzione di un PdC omogeneo.

In particolare, questa tecnica può essere usata per determinare l'evoluzione libera di un PCC.

Esempi

1) Determinare lo spazio delle soluzioni di $y'' + 3y' + 2y = 0$

- Polinomio caratteristico: $a(s) = s^2 + 3s + 2$
- Radici e molteplicità: $\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ → -2, -1

due radici reali con molt. 1

Base: $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ $\varphi_2(t) = e^{-t}$

La generica soluzione è:

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

2) Per la EDOLCC omogenea precedente, determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali:

$$y_e(0^-) = 1 \qquad y_e'(0^-) = -1$$

Siccome $y_e(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$, abbiamo:

$y_e(0^-) = c_1 + c_2 = 1$ e $y_e'(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$

$y_e'(0^-) = -2c_1 - c_1 = -1$

$\Rightarrow$ $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

$y_e(t) = e^{-t}$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$e(s) = s^2 - 6s + 9 = 0$ $\quad \lambda_1 = 3$ con molteplicità 2

$\varphi_1(t) = e^{3t} \qquad \varphi_2(t) = t e^{3t}$

$y_0(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

4) Nel problema precedente, imponiamo $y_e(0^-) = 0 \quad y_e'(0^-) = 1$

$y_e(0^-) = c_1 = 0$

$y_e'(t) = 3c_1 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t}$

$y'(0^-) = 3c_1 + c_2 = 1$

Quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = 1 \Rightarrow y_e(t) = t e^{3t}$

5) $y'' + 4y = 0$

$e(s) = s^2 + 4 \qquad \lambda_1 = j2 \qquad \lambda_2 = -j2$

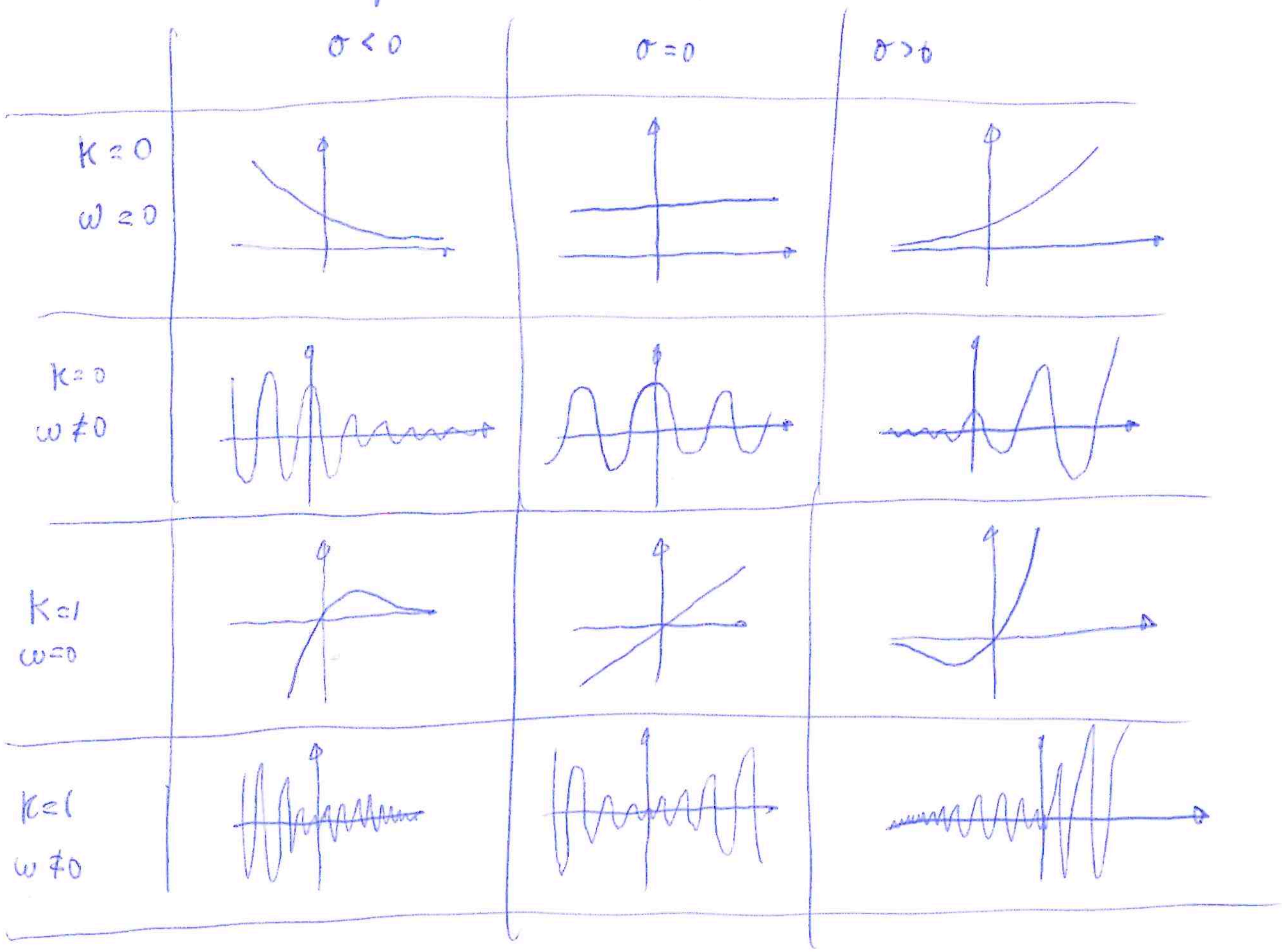
Base in forma complessa: $\varphi_1(t) = e^{j2t} \qquad \varphi_2(t) = e^{-j2t}$

Base in forma reale: $\varphi_1(t) = \cos 2t \qquad \varphi_2(t) = \sin 2t$

$y_0(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t = d_1 e^{j2t} + d_2 e^{-j2t}$

Le funzioni di base di una EDOLCC omogenea sono anche dette <u>modi</u>

Si tratta di funzioni del tipo $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t + \vartheta)$ $\quad \vartheta = 0$ o $\pi/2$



L'evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi. I modi da utilizzare sono determinati dalle radici del polinomio caratteristico e dalla loro molteplicità.

I coefficienti della combinazione lineare sono determinati imponendo le condizioni iniziali

Determinazione della risposta forzata

Ricordiamo che $y_f = h_+ * x$, quindi il problema consiste nel trovare h_+, che è l'unica soluzione del PdC.

$$\begin{cases} a(D)(h_+) = b(D)(\delta) & (S) \\ h_+(0^-) = h_+'(0^-) = \dots = h_+^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases}$$

La causalità del problema è un vincolo che è legato alla natura fisica del problema

Affinché la relazione tra y_f e x sia causale, sappiamo che $h_+(t)$ deve essere nulla $\forall t < 0$

Inoltre, per $t > 0$ la (S) dà $a(D)(h) = 0$

Quindi anche h_+ è una combinazione lineare di modi

Tuttavia, affinché la (S) valga anche in 0, bisogna eventualmente "bilanciare gli impulsi"

Ci sono 3 casi

a) Se $m < n$ $\qquad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \cdot u(t)$

b) Se $m = 0$ $\qquad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \cdot u(t) + d \cdot \delta(t)$

c) Se $m > n$ $\qquad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \cdot u(t) + \sum_{k=0}^{m-n} q_k \delta^{(k)}(t)$

Nei primi due casi il sistema LTI causale associato può essere stabile se e solo se $\forall \lambda_i$, $Re(\lambda_i) < 0$

Vediamo con qualche esempio come funziona la Tecnica di bilanciamento degli impulsi

1) Data l'EDOLCC $y'' + y = x'$, calcolare la risposta impulsiva dell'LTI causale associato

1.1 Cominciamo dal calcolare la base di Y_0

$a(s) = s^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +j \quad \lambda_2 = -j \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \omega_1 = 1 \end{cases}$

$\varphi_1(t) = e^{\sigma_1 t} \cos \omega_1 t = \cos t$

$\varphi_2(t) = e^{\sigma_1 t} \sin \omega_1 t = \sin t$

1.2 Siccome $m = 1$ e $n = 2$, $m < n$ e quindi la struttura di $h_+(t)$ è $h_+(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, u(t)$

1.3 le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo $a(D)(h_+) = b(D)(\delta)$

$$h_+'(t) = (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\, u(t) + (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, \delta(t)$$

$$= (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\, u(t) + (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0)\, \delta(t)$$

$$= (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\, u(t) + c_1 \delta(t)$$

$$h''(t) = (-c_1 \cos t - c_2 \sin t)\, u(t) + c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t) \quad (*)$$

<u>Nota</u> che significa $\delta'(t)$? assume significato nell'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) \underset{\text{per parti}}{=} \left[f(t) \delta(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \delta(t)\, dt = -f'(0)$$

Analogamente, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(t) f(t)\, dt = f''(0)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(t) f(t)\, dt = (-1)^m x^{(m)}(0)$

Usiamo l'espressione di $h_+(t)$ nell'EDOLCC:

$$h_+'' + h_+ = \delta'$$

$$(-c_1 \cos t - c_2 \sin t)u(t) + c_2\delta(t) + c_1\delta'(t) + (c_1 \cos(t) + c_2 \cos t)u(t) = \delta'(t)$$

$$c_1\delta'(t) + c_2\delta(t) = \delta'(t)$$

"Bilanciamo" gli impulsi: $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ $\Rightarrow$ $h_+(t) = \cos(t) \cdot u(t)$

Osserviamo che l'LTI causale associato al sistema <u>non è</u> stabile infatti $h_+ \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

2) Trovare h_+ per l'EDOLCC $y'' + y' - 2y = 2x' + x$

$Q(s) = s^2 + s - 2$ $\qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$ $\qquad \varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = e^{-2t}$

Siccome $m < n$ la struttura di h_+ è

$$h_+(t) = [c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)]u(t) = [c_1 e^t + c_2 e^{-2t}]u(t)$$

Bilanciamento degli impulsi

$$h_+'(t) = [c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}]u(t) + \delta(t) \cdot [c_1 + c_2]$$

$$h_+''(t) = [c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t}]u(t) + \delta(t) \cdot [c_1 - 2c_2] + \delta'(t)[c_1 + c_2]$$

$$h_+''(t) + h_+'(t) - 2h_+(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

$$((c_1 + c_1 - 2c_1)e^t + [4c_2 - 2c_2 - 2c_2]e^{-2t})u(t) + \delta(t)[c_1 + c_2 + c_1 - 2c_2] + \delta'(t)[c_1 + c_2] = 2\delta' + \delta$$

$$(2c_1 - c_2)\delta(t) + (c_1 + c_2)\delta'(t) = \delta(t) + 2\delta'(t)$$

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad h_+(t) = [e^t + e^{-2t}]u(t)$$

Esempio : Risonanza

È il fenomeno per il quale, applicando ad un LTI un ingresso sinusoidale a frequenza opportuna, l'uscita è una sinusoide moltiplicata per un polinomio $\Rightarrow$ l'ampiezza diventa indefinitamente grande

Ciò si può avere in un sistema massa-molla senza smorzatore

$$my'' + cy' + ky = x \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}x$$

Per prima cosa studiamo i modi del sistema

$$a(s) = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

- Se $c > 2\sqrt{mk}$ λ_1 e λ_2 sono reali, distinte, e negative perché l'argomento della radice $\sqrt{c^2 - 4mk}$ è strettamente minore di c^2 e quindi $\varphi_1(t) = e^{\sigma_1 t}$ $\quad \varphi_2(t) = e^{\sigma_2 t}$ $\quad \sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$

$$h_+(t) = \left(c_1 e^{-|\sigma_1| t} + c_2 e^{-|\sigma_2| t}\right) u(t)$$

Sistema stabile

- Se $c = 2\sqrt{mk}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\frac{2\sqrt{mk}}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -|\sigma|$

Allora $\varphi_1(t) = e^{-|\sigma|t}$ $\quad \varphi_2(t) = t\,e^{-|\sigma|t}$

$$h_+(t) = \left(c_1 e^{-|\sigma|t} + c_2 t e^{-|\sigma|t}\right) u(t)$$

stabile

- Se $0 < c < 2\sqrt{mk}$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sigma \pm j\omega$

$\boxed{\text{con } \sigma < 0}$

Allora $\varphi_1(t) = e^{-|\sigma|t}\cos\omega t$ $\quad \varphi_2(t) = e^{-|\sigma|t}\sin\omega t$

$$h_+(t) = u(t)\, e^{-|\sigma|t}\left(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right)$$

Stabile

Infine, se $c=0$ (assenza dello smorzatore)

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm j\omega_0 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Le radici del polin. caratt. hanno parte reale nulla, mentre nei casi precedenti la parte reale era positiva

Adesso $h_+(t) = (c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t)\, u(t)$ <u>instabile</u>

In effetti, se i polinomi a e b sono co-primi, e se $n \geq m$, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che tutte le radici di $a(s)$ sono a <u>parte reale negativa</u>

<u>Bilanciamo gli impulsi</u> nel caso $c=0$

$$h_+'(t) = (-\omega_0 c_1 \sin\omega_0 t + \omega_0 c_2 \cos\omega_0 t)\, u(t) + \delta(t)\, c_1$$

$$h_+''(t) = (-\omega_0^2 c_1 \cos\omega_0 t - \omega_0^2 c_2 \sin\omega_0 t)\, u(t) + \delta(t)\cdot \omega_0 c_2 + \delta'(t)\, c_1$$

$$= -\omega_0^2 h_+(t) + \omega_0 c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t)$$

$$m h_+''(t) + k h_+(t) = -m\omega_0^2 h_+(t) + m\omega_0 c_2 \delta(t) + m c_1 \delta'(t) + k h_+(t) =$$

$(m \cdot \omega_0^2 = K)$ $$= m\omega_0 c_2 \delta(t) + m c_1 \delta'(t) \quad \cancel{\neq \delta(t)}$$

Per bilanciare gli impulsi, tale quantità deve essere pari a $\delta(t)$, quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{m\omega_0}$

$$\Rightarrow \boxed{h_+(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin\omega_0 t\, u(t)}$$

Adesso sfruttiamo questi risultati per risolvere il PCC:

$x(t) = F\cos\omega_0 t\ u(t)$, $y(0^-)=0$, $y'(0^-)=0$

cioè applichiamo una forza con andamento sinusoidale a pulsazione "di risonanza" ω_0 (o pulsazione propria) a partire da $t=0$ al sistema "a riposo" (cioè condizioni iniziali nulle)

Siccome le condizioni iniziali sono nulle, l'uscita del sistema è la risposta forzata:

$$y(t) = y_f(t) = h_+(t) * x(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_+(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m\omega_0}\sin[\omega_0(t-\tau)]\,u(t-\tau)\,F\cos\omega_0\tau\ u(\tau)\,d\tau$$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin($ (formula di Werner)

$$= \int_0^t \frac{F}{m\omega_0}\sin[\omega_0(t-\tau)]\cos\omega_0\tau\,d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{F}{m\omega_0}\frac{1}{2}[\sin(\omega_0 t + \sin(\omega_0(t-2\tau)]\,d\tau = \frac{F}{m\omega_0}\frac{1}{2}\sin\omega_0 t\int_0^t d\tau +$$

$$+ \frac{F}{m\omega_0}\frac{1}{2}\int_0^t \sin[\omega_0(t-2\tau)]\,d\tau = \frac{F}{m\omega_0}\frac{t}{2}\cdot\sin\omega_0 t +$$

$$+ \frac{F}{2m\omega_0}\left.\frac{\cos[\omega_0 t - 2\omega_0\tau]}{2\omega_0}\right|_{\tau=0}^{\tau=t} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{F}{m\omega_0}\,t\cdot\sin\omega_0 t}$$

"sinusoide con ampiezza crescente": fenomeno della risonanza

Applicazione della TdF alla soluzione di un'EDOLCC

Per le EDOLCC associate a LTI stabili, esiste un modo semplice per determinare $h_+(t)$.

La stabilità del sistema associato è legata alla seguente condizione necessaria e sufficiente
1) $m \leq n$ e radici di $a(s)$ a parte reale strett. negativa

Infatti in questo caso tutte le funzioni di base di Y_0 hanno un fattore $e^{-|a|t}$ che è assolutamente integrabile in $(0,+\infty)$. Consideriamo solo $(0,+\infty)$ perché $h_+(t)$ ha sempre un fattore $u(t)$

Se abbiamo stabilità, $h_+ \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e possiamo calcolarne la TFtC $H_+(\omega)$. Dall'equazione $a(D)(h_+) = b(D)(\delta)$ si ha:

$$\mathcal{F}(D^k h_+) = (j\omega)^k H_+(\omega) \qquad (\text{vero se } h, h', \dots h^{k-1} \in \mathcal{L}^1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(a(D)(h^+)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k H_+(\omega) = a(j\omega) H_+(\omega)$$

Analogamente, $\mathcal{F}(b(D)(\delta)) = \sum b_k (j\omega)^k \mathcal{F}(\delta) = b(j\omega)$

Uguagliando i due termini, e osservando che se il sistema è stabile $a(j\omega) \neq 0$ (nessuna radice a parte reale nulla),

$$H_+(\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

Per calcolare $h_+(t)$ conviene usare la decomposizione in fratti semplici

Se invece qualche radice di a non ha parte reale strettamente negativa, h_+ non si può trovare con la TF, perché quest'ultima è valida solo nel caso di $h_+ \in \mathcal{L}^1$

Applicando la TF, si trova comunque una delle infinite soluzioni di $a(D)(h) = b(D)(\delta)$, ma non quella causale, bensì una soluzione $\mathcal{L}^1$ ma non causale

<u>Esempio</u> Studio dell'EDOLCC $y'' + 4y' + 3y = x$

Cominciamo dal polinomio caratteristico: $a(s) = s^2 + 4s + 3$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$ reali, distinte, strett. negative

Una base di Y_0 è $\varphi_1(t) = e^{-3t}$ $\quad \varphi_2(t) = e^{-t}$

Calcolo dell'<u>evoluzione libera</u>. Le condizioni iniziali sono $y_e(0^-) = y_0$, $y_e'(0^-) = y_1$

$$y_e(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \Rightarrow y_e(0^-) = c_1 + c_2 = y_0$$

$$y_e'(t) = -3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{-t} \Rightarrow y_e'(0^-) = -3c_1 - c_2 = y_1$$

Risolvendo il sistema lineare si trova $c_1 = -\frac{y_0 + y_1}{2}$

$c_2 = \frac{3y_0 + y_1}{2}$

$$\boxed{y_e(t) = -\frac{y_0+y_1}{2} e^{-3t} + \frac{3y_0+y_1}{2} e^{-t}}$$

Sistema causale associato: calcolo di h_+

Calcoliamo h_+ con il bilanciamento degli impulsi.

Siccome $m < n$, $h_+(t) = (d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t))u(t) = (d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t})u(t)$

$$h_+'(t) = [-3d_1 e^{-3t} - d_2 e^{-t}]u(t) + \delta(t)[d_1 + d_2]$$

$$h_+''(t) = [9d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t}]u(t) + \delta(t)[-3d_1 - d_2] + \delta'(t)[d_1 + d_2]$$

Bilanciamo gli impulsi:

$$h_+''(t) + 4h_+'(t) + 3h_+(t) = \delta(t)$$

$$[9d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t} - 12 d_1 e^{-3t} - 4d_2 e^{-t} + 3d_1 e^{-3t} + 3d_2 e^{-t}]u(t)$$
$$+ \delta(t)[-3d_1 - d_2 + 4d_1 + 4d_2] + \delta'(t)[d_1 + d_2] = \delta(t)$$

$$(d_1 + 3d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta'(t) = \delta(t)$$

$$\begin{cases} d_1 + 3d_2 = 1 \\ d_1 + d_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = -1/2 \\ d_2 = 1/2 \end{cases} \qquad h_+(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

Calcolo di h_+ con le TFtc.

Siccome $a(s)$ ha radici a parte reale negativa, il sistema è stabile e h_+ può essere calcolato con la TF

$$H_+(\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

Usiamo la decomposizione in fratti semplici.
Le radici di $a(\cdot)$ sono -1 e -3 quindi possiamo scrivere

$$H_+(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{3+j\omega} = A \cdot \mathfrak{F}(e^{-t}u(t)) + B\,\mathfrak{F}(e^{-3t}u(t))$$

Calcolo di A: $\quad A = (1+j\omega)\cdot H_+(\omega)\Big|_{\omega=+j} = \frac{1}{3+j\omega}\Big|_{\omega=+j} = \frac{1}{2}$

Calcolo di B: $\quad B = (3+j\omega)\, H_+(\omega)\Big|_{\omega=+3j} = \frac{1}{1+j\omega}\Big|_{\omega=3j} = -\frac{1}{2}$

$$h_+(t) = \frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$$

Il metodo TF è veloce ma si può applicare solo se il sist. è stabile
La risposta forzata è $\quad y_f(t) = h_+ * x\ (t)$

Che succede se proviamo ad applicare il metodo TFtc ad un' EDOLCC il cui sistema LTI causale associato <u>non è</u> stabile?

Con il metodo TF, la funzione $h(t)$ costruita sarà ancora una soluzione di $a(D)(h) = b(D)(\delta)$ ma non <u>può</u> essere causale, perché sappiamo che quella causale è instabile

Quindi avremo una $h(t)$ stabile, non causale che però non permette di calcolare y_f, perché per quest'ultima ci vuole $h_+(t)$

In caso di non-stabilità (cioè, almeno una delle radici di $a(s)$ ha parte reale non negativa) $h_+(t)$ si può sempre ricavare dal bilanciamento degli impulsi. Inoltre ricordiamo che $h_+(t) - h(t) \in Y_0$ quindi possiamo (potremmo) cercare un elemento di Y_0 che, sommato a $h(t)$, determini una funzione causale

<u>Esempio</u> Consideriamo l'EDOLCC $y'' - y' - 2y = x$

Si ha: $a(s) = s^2 - s - 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 - j\omega - 2} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{-2+j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)(-2+j\omega)}$$

$$A = (1+j\omega)H(j\omega)\Big|_{\omega=j} = \frac{1}{-2+j\omega}\Big|_{\omega=j} = -\frac{1}{3} \qquad B = (-2+j\omega)H(j\omega)\Big|_{\omega=-2j} = \frac{1}{1+j\omega}\Big|_{\omega=-2j} = \frac{1}{3}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{-2+j\omega} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+j\omega}$$

Dalle Tabelle dell TF, ricaviamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{-2+j\omega}\right)(t) = -e^{2t}u(-t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)(t) = e^{-t}u(t)$$

Effettivamente h è $\mathcal{L}^1$ ma non è causale essendo non nulla in $t<0$

In questo caso, trovare h_+ è facile; basta osservare che per "eliminare" il contributo non causale, basta sommare a $h(t)$ un'opportuna funzione di Y_0 e cioè $\frac{1}{3}e^{2t}$

Si ha: $h(t) + y_0(t) = \frac{1}{3}e^{2t}\left(-u(-t)+1\right) - \frac{1}{3}u(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

che è evidentemente causale e non $\mathcal{L}^1$

Verifichiamo con il bilanciamento degli impulsi che è proprio h_+.

$$h_+(t) = \left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}\right)u(t)$$

$$h_+'(t) = \left(2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t}\right)u(t) + (c_1+c_2)\delta(t)$$

$$h_+''(t) = \left(4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}\right)u(t) + (2c_1 - c_2)\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t)$$

$$h_+''(t) - h_+'(t) - 2h_+(t) = \delta(t)$$

$$\left[(4c_1 - 2c_1 - 2c_1)e^{2t} + (c_2 + c_2 - 2c_2)e^{-t}\right]u(t) + (2c_1 - c_2)\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t) - 2(c_1+c_2)\delta(t) = \delta(t)$$

$$-3c_2\,\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t) = \delta(t)$$

$c_2 = -1/3 \qquad c_1 = 1/3$ ritroviamo la funzione individuata prima, che è $h_+(t)$

Vedremo che con la TL si può trovare h_+ senza bilanciamento degli impulsi