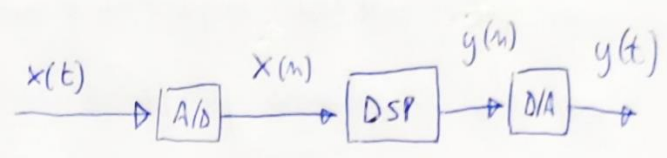


CAMPIONAMENTO



Il campionamento è l'operazione che permette di "estrarre" dei valori da un segnale a Tempo continuo, generando quindi un segnale a Tempo discreto:

$$\bar{x}(n) = x(t) \Big|_{t = nT_c}$$

Ciò i valori di $\bar{x}(n)$ sono quelli estratti da $x(t)$ e intervalli di durata T_c . Tale valore T_c è detto periodo di campionamento e il suo reciproco $f_c = 1/T_c$ è la frequenza di campionamento.

Il campionamento è importante perché è estremamente facile realizzare l'elaborazione dei segnali numerici (DSP, Digital Signal Processing), sia in software che in hardware.

Più in generale, si passa da un segnale t.c. x ad un segnale t.d. \bar{x} (\bar{x} è anche a valori discreti, cioè è quantizzato, ma non ci soffermeremo su questo aspetto perché spesso tale "quantizzazione" è talmente fine da non apportare distorsioni significative). Tale operazione è detta conversione analogica/digitale, A/D. L'operazione duale è la conversione digitale/analogica (D/A).

2]

È importante quindi chiedersi in che condizioni la conversione AD non ha "perdere informazioni". In altre parole, quando è possibile ricostruire perfettamente $x(t)$ a partire dai suoi campioni $x(nT_c)$? Come si ottiene la ricostruzione?

La risposta a queste domande si ottiene con la formula di Poisson e con il Teorema del campionamento di Shannon

Formula di Poisson: legame tra TFC e TFD

La formula di Poisson stabilisce il legame tra la TFC di un segnale t.c. x e la TFD dei suoi campioni, ponendo le basi del Teorema del campionamento.

In particolare si stabilisce che il campionamento nel Tempo implica una replica in frequenza, dualmente a quanto visto per la replica nel Tempo (che costituisce un campionamento in frequenza)

Sia ora $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e costruiamo il segnale t.d. \hat{x} :

$\hat{x}: n \in \mathbb{Z} \rightarrow x(n) \in \mathbb{C}$ sono i "campioni" di x presi con periodo unitario

Supponiamo ora che, detta $X(\omega)$ la TFC di x , si abbia

$X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; infine supponiamo anche che $\hat{x} \in \mathcal{L}^1$

In queste ipotesi, possiamo introdurre $\hat{X}(\omega)$, la TFD di \hat{x}

Potrà ora $Y(\omega) = \text{rep}_{2\pi} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2\pi n)$ si ha

$$1) Y \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$$

$$2) Y(\omega) = \hat{X}(\omega)$$

Quest'ultima, che si può scrivere: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-jk\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2\pi n)$ è la formula di Poisson

DIM 1) Per ipotesi, $X \in L^1(\mathbb{R})$ quindi:

$$\|X\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |X(\omega)| d\omega$$

One poniamo $\vartheta = \omega - 2k\pi \Leftrightarrow \omega = \vartheta + 2k\pi$ e $d\omega = d\vartheta$. Si ha:

$$\begin{aligned} \|X\|_1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\vartheta + 2k\pi)| d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(\vartheta + 2k\pi)| d\vartheta \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\vartheta + 2k\pi) \right| d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\vartheta)| d\vartheta = \|Y\|_1 \end{aligned}$$

norma
in $L^1(-\pi, \pi)$

Cioè $\|Y\|_1 \leq \|X\|_1 < +\infty \Rightarrow Y \in L^1(-\pi, \pi)$ C.V.D.

Inoltre $x \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow X$ ^{unif.} continua $\Rightarrow Y$ continua

In conclusione Y è periodica e soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet. Possiamo quindi calcolare i coeff. della serie di Fourier di Y , poi applicheremo la formula di sintesi puntuale. Per gli e_k , il periodo è 2π e quindi $\omega_0 = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\vartheta) e^{-jk\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\vartheta + 2n\pi) e^{-jk(\vartheta + 2n\pi)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(\vartheta + 2n\pi) e^{-jk(\vartheta + 2n\pi)} d\vartheta \end{aligned}$$

posto $\omega = \vartheta + 2n\pi$, si ottiene

$$e_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} X(\omega) e^{-jk\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega(-k)} d\omega = x(-k)$$

Inoltre per la TF di x possiamo applicare la conv. puntuale

Infine possiamo applicare Dirichlet alle SdF di Y :

(1/2)

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(-k) e^{jk\omega} \stackrel{(m=-k)}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-jm\omega}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(m) e^{-jm\omega} = \hat{X}(\omega) \quad \text{CVD}$$

In altre parole: se del segnale $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ conosciamo solo i campioni $\hat{x}(n) = x(nT_c)$ con $T_c = 1$

possiamo calcolare non $X(\omega)$ ma $\text{rep}_{2\pi}[X](\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2k\pi)$

In che condizioni è possibile recuperare $X(\omega)$ da $\text{rep}_{2\pi}[X](\omega)$?

Se $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$, allora $\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad X(\omega + 2k\pi) = 0 \quad \forall k \neq 0$
 e quindi $\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2k\pi) = X(\omega)$

Sia allora $Z(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \hat{X}(\omega)$

Per questo detto, se $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$, allora $Z(\omega) = X(\omega)$

e allora possiamo applicare il Teorema d'inversione a $Z(\omega)$

e, in fin dei conti, recuperare $x(t)$ dai suoi campioni $\hat{x}(n)$

Il Tipo di convergenza dipende dalle ipotesi che possiamo applicare a x

Il Teorema d'inversione dà questo regime:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \hat{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \boxed{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{X}(n) e^{-j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega(t-n)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \left[\frac{e^{j\omega(t-n)}}{j(t-n)} \right]_{\omega=-\pi}^{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \frac{e^{j\pi(t-n)} - e^{-j\pi(t-n)}}{2j\pi(t-n)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \text{sinc}(t-n) \quad (3)$$

Nelle ipotesi fatte, $x \in L^2$ e continua a tratti, la convergenza è puntuale. Se invece $x \in L^2$ non può dimostrarsi che la (3) vale quasi ovunque (cioè convergenza in L^2)

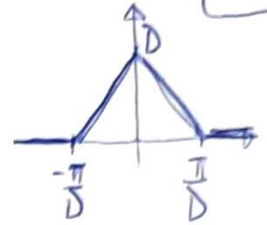
La formula (3) è detta formula d'interpolazione ideale o interpolazione di Shannon.

Si vede che, un segnale x^* a bande limitateⁿ, cioè tale che $Z(x)(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$ può essere ricostruito usando i suoi campioni $X(n)$ per modulare dei sinc traslati.

Nel seguito, generalizzeremo la (3) al caso in cui il periodo di campionamento non è uguale a 1. Otterremo in questo modo il Teorema del campionamento di Shannon.

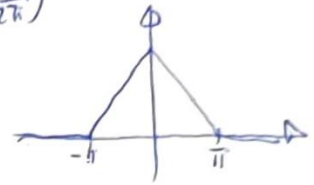
Vediamo però prima un esempio

Sia $x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{D}\right) \Rightarrow X(\omega) = D \Delta\left(\frac{D}{2\pi} \omega\right)$



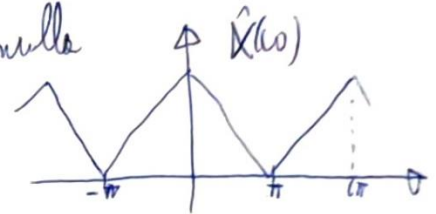
6

1) Sia $D = 1$, cioè $x(t) = \text{sinc}^2(t)$ e $X(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$



In questo caso, $\hat{X}(\omega) = \text{rep}_{2\pi} X(\omega)$

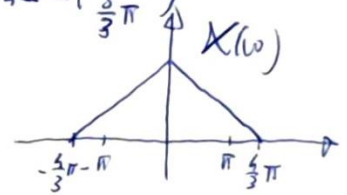
in ogni periodo c'è una sola replica non nulla



È possibile allora ricostruire $x(t)$

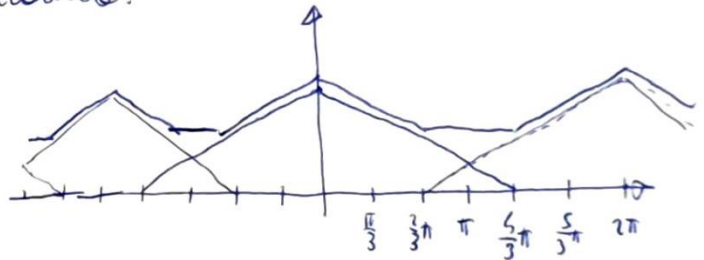
dai suoi campioni presi con passo unitario

2) Sia $D = 3/4$ cioè $x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{3/4}\right)$ $X(\omega) = \frac{3}{4} \Delta\left(\frac{1}{8/3\pi} \omega\right)$



Effettuando le repliche periodiche:

$\hat{X}(\omega) = \text{rep}_{2\pi} [X](\omega)$



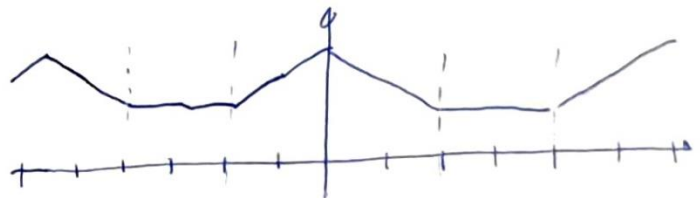
Nell'intervallo

$\left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$

ci sono 2 repliche

che contribuiscono:

è impossibile recuperare $X(\omega)$, fenomeno dell'aliasing



Generalizzazione del periodo di campionamento:

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO DI SHANNON

Sia ora $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $T_c \in \mathbb{R}_0^+$ $\hat{w}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

con $\hat{w}(n) = x(t)|_{t=nT_c}$

così \hat{w} è il campionamento di x con passo T_c

Supponiamo che:

$x \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{w} \in l^1(\mathbb{Z})$

Allora

1) Se $x \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{W}(\omega)$ è uguale a $\frac{1}{T_c} \text{rep}_{2\pi} \left[X\left(\frac{\omega}{T_c}\right) \right]$

2) Se X è a bande limitate cioè,

$\exists \omega_M: \forall |\omega| > \omega_M \quad X(\omega) = 0$

(il che implica, con $x \in L^1$, che $X \in L^1$)

Sic $T_c \leq \frac{\pi}{\omega_M} \Leftrightarrow f_c \geq 2 \frac{\omega_M}{2\pi} = 2f_M$ (condizione di Nyquist)

allora $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$ (5)

DIM 1) Sia $w(t) = x(t \cdot T_c) \Rightarrow W(\omega) = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

Allora, siccome $x \in L^1(\mathbb{R})$ anche $w \in L^1(\mathbb{R})$

Analogamente $X \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow W \in L^1(\mathbb{R})$

Visto poi che $\hat{w} \in l^1$ per ipotesi, possiamo applicare la formula di Poisson a w , ottenendo

$\hat{W}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(\omega + 2\pi k)$

Ma $\hat{W}(\omega)$ è uguale alla TFTd di $\hat{x}(n) = x(nT_c)$ (8)
 mentre $X(\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{-\infty}^{+\infty} [X](\omega)$ $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ è il coefficiente di scala

Abbiamo allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T_c}\right) \quad (5)$$

↙
↖

comprimenti nel Tempo
con passo T_c

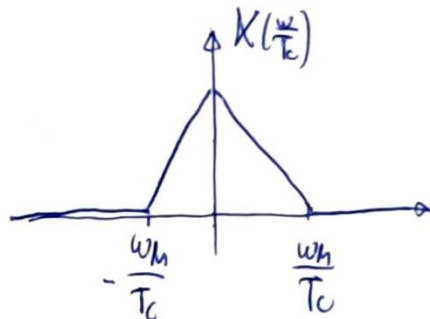
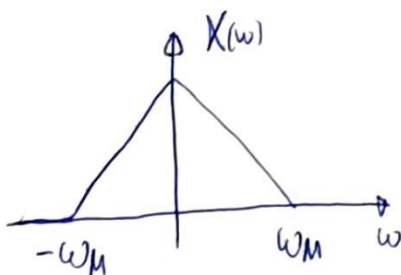
↕
cambio scala ($1/T_c$)
e replica periodica
di periodo 2π

La (5) è detta formula di Poisson generalizzata

Osserviamo che nella (5), e dx si effettua prima
 un cambio scala: $\omega \leftarrow \frac{\omega}{T_c}$
 e poi un ritardo $\omega \leftarrow \omega + 2k\pi$

Dim 2 Se x è un segnale a bande limitate $(-\omega_M, \omega_M)$

Abbiamo che $X(\frac{\omega}{T_c})$ ha supporto $(-T_c \omega_M, T_c \omega_M)$



N.B. l'andamento di $X(\omega)$ è solo illustrativo, è ovvio che il Teorema non si limita all'impulso triangolare. L'importante è il supporto di $X(\omega)$

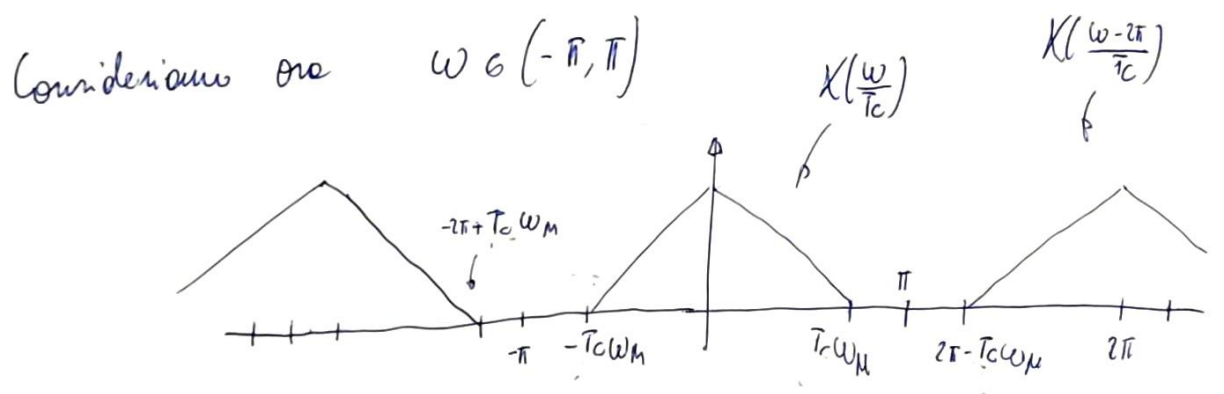
Ora, le ipotesi $x \in L^1(\mathbb{R})$ e X a supporto finito implicano $X \in L^1(\mathbb{R})$ (senza dim.)

Quindi possiamo applicare la formula di Poisson generalizzata e scrivere che
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T_c}\right)$$

Il termine $X\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T_c}\right)$ è una versione scalata e ritardata di X :

$X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$ ha supporto ~~da~~ per $\omega \in (-T_c \omega_M, T_c \omega_M)$

$X\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T_c}\right)$ ha supporto per $\omega \in (-T_c \omega_M - 2k\pi, T_c \omega_M - 2k\pi)$



La replica per $k=0$ contribuisce in $(-T_c \omega_M, T_c \omega_M)$

La replica per $k=-1$ ha supporto $(2\pi - T_c \omega_M, 2\pi + T_c \omega_M)$

Ora, se $T_c \omega_M \leq 2\pi - T_c \omega_M$ le due repliche non si sovrappongono

Questo è vero per ogni coppia di repliche consecutive ed a maggior ragione, per coppie di repliche con valori di k più distanti.

In conclusione, $x \quad T_c \omega_M \leq 2\pi - T_c \omega_M \quad (*)$

per ogni valore di ω c'è soltanto un contributo nella replica periodica degli $X(\frac{\omega}{T_c})$

In particolare quindi, la condizione (*) si scrive

$$T_c \leq \frac{\pi}{\omega_M} \Leftrightarrow T_c \leq \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{1}{2} T_M \Leftrightarrow f_c \geq 2 f_M$$

Tale condizione è detta condizione di Nyquist

Se la condizione di Nyquist è soddisfatta, allora

$$\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} X(\frac{\omega}{T_c})$$

Per estendere a $\omega \in \mathbb{R}$, osserviamo che il termine a dx è periodico di periodo 2π , mentre quello a dx ha supporto in $(-\pi, \pi)$.

Possiamo scrivere allora:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$$

11

Indicando $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n}$ con $\hat{W}(\omega)$ si ha

$$\frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \hat{W}(\omega)$$

$$X(\omega) = T_c \cdot \text{rect}\left(\frac{T_c}{2\pi} \omega\right) \cdot \hat{W}\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$$

Inoltre, posto $w(t) = x(t \cdot T_c)$, possiamo applicare al segnale $w(t)$ la formula di ricostruzione (3), perché w soddisfa tutte le ipotesi della formula di Poisson per periodo di campionamento unitario. Si ha:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) \text{sinc}(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}(t-n)$$

$$x(t) = w\left(\frac{t}{T_c}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right)$$

Formula d'interpolazione ideale

Completamento di segnali a banda non limitata

12

Il Teorema del completamento di Shannon può essere interpretato in questo modo: posto $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Psi_n(t) = \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right), \quad \text{l'insieme } \{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

è una base ortogonale dell'ottospazio dei segnali a banda limitata in $(-\omega_M, \omega_M)$ con $\omega_M = \frac{\pi}{T_c}$ e ad energia finita (chiamiamo S_B tale ottospazio)

Ci poniamo la domanda: qual è la migliore rappresentazione (in questo stesso ottospazio) dei segnali a banda non limitata?

In altre parole, se x soddisfa le ipotesi di Parseval ma è a banda non limitata qual è il miglior modo di rappresentarla nella base $\{\Psi_n\}$? cioè Tronche dei sinc?

Matematicamente, il problema si formula così.

1/23

Sia $x \in L^2(\mathbb{R})$ e T_c da soddisfare per noi.

$$\text{Sia } y(t) = \sum_n s_n \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$$

Come scegliere s_n in modo da minimizzare l'errore di ricostruzione $\|x - y\|_2$?

$$\text{Sia } x_{LP} = x * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \Leftrightarrow X_{LP}(\omega) = X(\omega) T_c \text{rect}\left(\frac{T_c \omega}{2\pi}\right)$$

x_{LP} è a banda limitata e soddisfa le hp del T. di Shannon.

$$\text{Sia poi } x_{HP} = x - x_{LP} \quad \Leftrightarrow X = X_{LP} + X_{HP}$$

Qualunque sia y generata dai sinc (quindi $y \in S_B$),

$$\|x - y\|_2^2 \stackrel{(a)}{=} \|X - Y\|_2^2 = \|X_{HP} + (X_{LP} - Y)\|_2^2 \stackrel{(b)}{=} \|X_{HP}\|_2^2 + \|X_{LP} - Y\|_2^2$$

(a) identità di Parseval

$$(b) X_{HP} \perp X_{LP} - Y : \text{ infatti } \langle X_{HP}, X_{LP} - Y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{HP}(\omega) (X_{LP}(\omega) - Y(\omega)) d\omega$$

ma $X_{HP} = 0 \forall \omega \in (-\omega_M, \omega_M)$ mentre $X_{LP} - Y = 0 \forall \omega \notin (-\omega_M, \omega_M)$

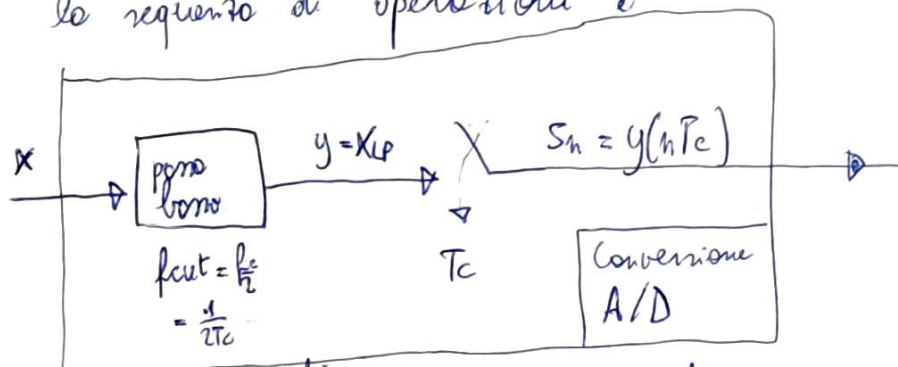
$$\text{quindi } \langle X_{HP}, X_{LP} - Y \rangle = 0$$

Se $X_{HP} \perp X_{LP} - Y$ allora basta applicare il Teorema di Pitagora per avere l'identità (b)

Allora per minimizzare $\|x-y\|_2$ bisogna prendere $y = X_{LP} \in S_B$

(16)

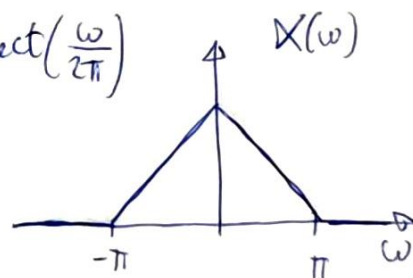
Quindi la sequenza di operazioni è



Ecco perché, prima di ogni operazione di campionamento a frequenza $f_c = 1/T_c$, è necessario un filtro passa-basso (filtro anti-aliasing) con frequenza di taglio $f_{cut} = f_c/2$ cioè la metà della freq. di campionamento

Esercizio Sia x un segnale a bande limitate:

$$X(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right) \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



Calcolare lo TFFT di $x(nT_c)$ in tre casi:

- a) $T_c = 1$ b) $T_c = 1/2$ c) $T_c = 3/2$

Discutere nella possibilità di ricostruire x dai suoi campioni nei 3 casi.

Soluzione

15

Sappiamo che $\mathcal{F}(\text{sinc}^2(t))(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Per cui $\mathcal{F}\left(\text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2\Lambda\left(\frac{2\omega}{2\pi}\right) = 2X(\omega)$

Allora $x(t) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si può anche mostrare che $x(nT_c) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (senza dim.)

Quindi possiamo applicare la formula di Poisson e quindi posto $\hat{W}(n) = x(nT_c)$, la TFD da calcolare è

$$\hat{W}(\omega) = \frac{1}{T_c} \text{rep}_{2\pi} \left[S_{\frac{1}{T_c}}(X) \right](\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T_c}\right)$$

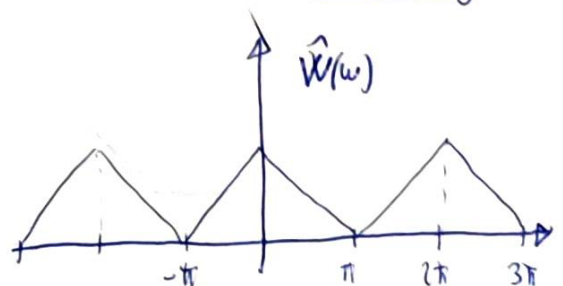
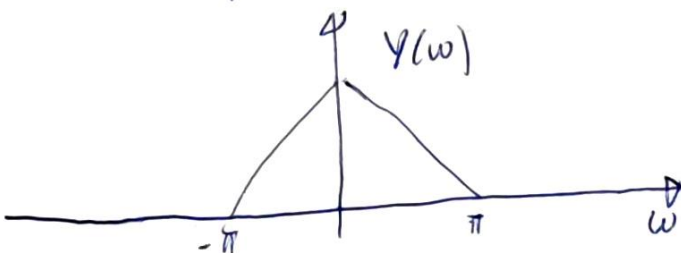
Faremo questo calcolo in due passaggi:

1) Calcoliamo $Y(\omega) = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

2) Calcoliamo $\hat{W}(\omega) = \text{rep}_{2\pi}(Y)(\omega)$

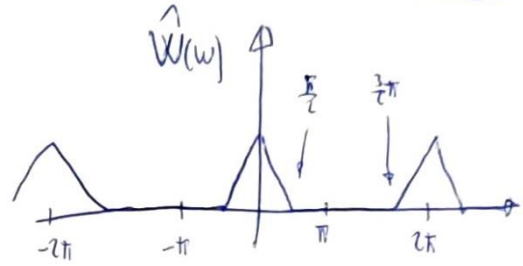
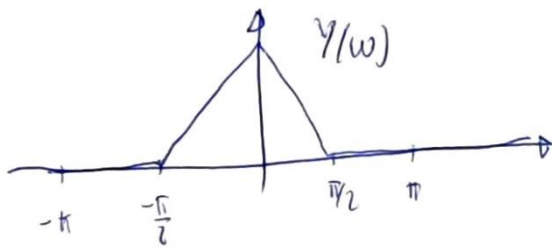
a) $T_c = 1 \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)$

Y ha supporto $(-\pi, \pi)$ quindi le repliche non hanno supporto in comune: si dice che non c'è aliasing



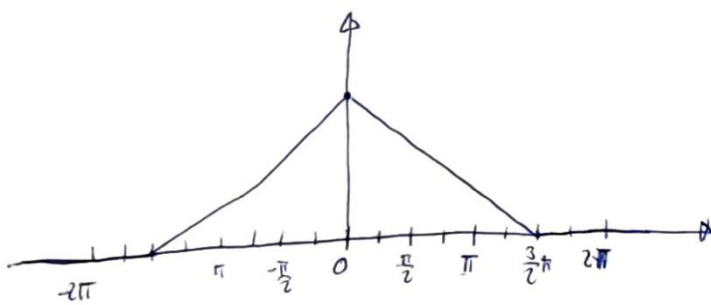
b) $Y(\omega) = 2X(2\omega) = 2\Lambda\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right)$

16



Anche in questo caso le repliche di Y sono non sovrapposte.
Non c'è aliasing e x può essere recuperato dai suoi campioni con la formula dell'interpolazione ideale

c) $Y(\omega) = \frac{2}{3}X\left(\frac{2}{3}\omega\right) = \frac{2}{3}\Lambda\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right)$ con supporto $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

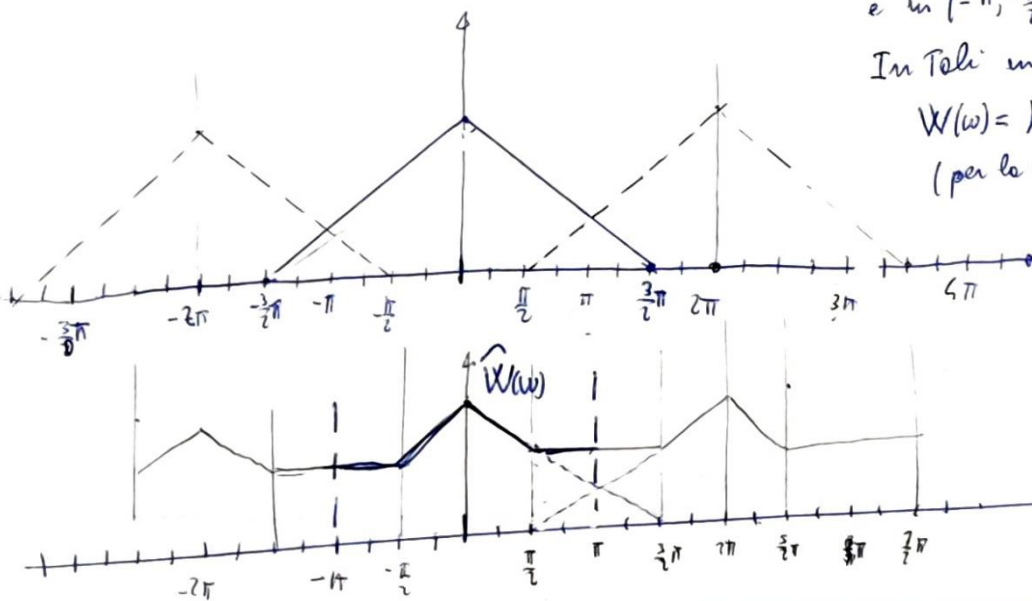


In questo caso, la replica centrata in zero si sovrappone in parte con le due repliche adiacenti in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e in $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

In tali intervalli,

$$W(\omega) = X(\omega) + X(\pi - \omega)$$

(per la simmetria di X)



La sovrapposizione delle pulsazioni ω con $\pi - \omega$ è detta **ALIASING** e impedisce di ricostruire x dai suoi campioni

