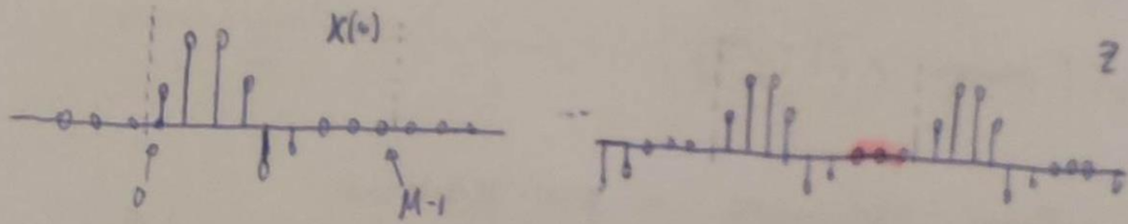
Possiamo ottenere un campionamento più fitto di $X(\omega)$? 9

Il passo ω_0 è "sufficiente" per determinare x (basta applicare la formula di sintesi della TFD al vettore $\underline{Y}$) ma può non bastare per applicazioni in cui si vuole maggiore risoluzione nella rappresentazione di $X(\omega)$ (vedere Lab 5 per un esempio)

Allora introduciamo $z(n) = x(n \bmod M)$ dove $M > N$

z è la replica periodica di x di periodo M

Ma i valori di x tra N-1 e M-1 sono nulli



Vengono quindi "aggiunti" degli zeri nel periodo di z (zero-padding)

Calcoliamo la TFD di z:

$$Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} z(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} \qquad \text{ma } z(n) = \begin{cases} x(n) & \text{se } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{se } n \in \{N, \dots, M-1\} \end{cases}$$

$$Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} = \frac{1}{M} X\left(k \cdot \frac{2\pi}{M}\right) = \frac{1}{M} X(k\omega_1)$$

Quindi aumentando M si può raffinare arbitrariamente la risoluzione in frequenza di X

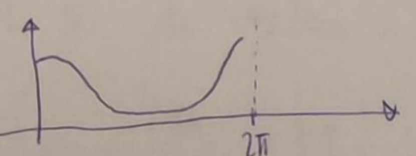
In pratica vedremo nel laboratorio che, usando il comando <u>fft</u>, si realizzano contemporaneamente:

- lo zero padding
- il calcolo della TFD
- la moltiplicazione per M

Se si usa il comando XFFT = fft(x, M) avremo che il vettore XFFT contiene i valori $X\left(k\frac{2\pi}{M}\right)$ per k da 0 a $M-1$

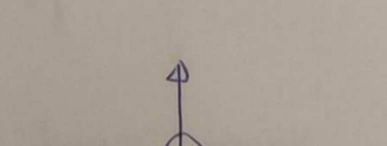
Per visualizzare l'andamento di X si dovrà allora eseguire:

omega = (0:M-1) * $\frac{2\pi}{M}$;
plot(omega, abs(XFFT))



Per centrare la curva si può scrivere

omega = ((0:M-1) * $\frac{2\pi}{M}$) - π;
plot(omega, fftshift(abs(XFFT)))



TFtd di segnali periodici

Ricordiamo la serie di Fourier del Treno d'impulsi di periodo $T = 2\pi$ nella variabile ω. Siccome $\frac{2\pi}{T} = 1$, abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k2\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega} \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

$$\iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\omega} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(-\omega - 2k\omega)}_{(a)} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi)}_{(b)}$$

L'ultima uguaglianza è verificata perché k percorre tutti gli interi, sia positivi che negativi: in (a) gli impulsi sono centrati in tutti i $-2k\pi$, in (b) in tutti i $+2k\pi$: ma i due insiemi coincidono

L'equazione $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\omega} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$

si può restringere a $\omega \in (-\pi, \pi)$ e si ha:

$$\forall \omega \in (-\pi, \pi), \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\omega} = 2\pi\, \delta(\omega)$$

Cioè la TFtd del segnale $x(n) = 1$ è $2\pi\,\delta(\omega)$ in $(-\pi, \pi)$, mentre se la considero su $\mathbb{R}$ è il Treno d'impulsi

Applicando la proprietà di modulazione,

$$TFtd\left(e^{j\omega_0 n}\right)(\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0) \qquad \forall \omega_0 \in (-\pi, \pi)$$

Quindi $TFtd(\cos(\omega_0 n))(\omega) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$

Infine, il segnale periodico $x(n)$ si può scrivere usando la sua TFD X come:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$$

Allora la TFtd di x, valutata per $\omega \in (-\pi, \pi)$ è

$$\mathrm{TFtd}(x)(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$