Trasformata di Fourier a Tempo discreto (TFtd)

La TFtd permette di rappresentare segnali a tempo discreto e aperiodici tramite esponenziali immaginari puri, similmente alla TF.

Definizione Sia $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, si consideri, per un certo $\omega \in \mathbb{R}$, la seguente serie: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

Se la serie converge (in senso proprio o generalizzato) definiamo il segnale $X : \omega \in \mathbb{R} \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ (1)

$X(\omega)$ è detto essere la TFtd di x. La (1) è la formula di sintesi

Condizione sufficiente di esistenza

Se $x \in \ell^1$, la sua TFtd esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, inoltre è limitata e continua

Periodicità Dato x, se $X(\omega)$ esiste, essa è una funzione periodica di periodo 2π

Infatti è la somma di funzioni periodiche

Inversione (formula di sintesi)

Sia $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $x \in l^1$, quindi $X(\omega)$ è continua e limitata $\Rightarrow$ è $L^2(-\pi,\pi)$ e anche $L^1(-\pi,\pi)$

Il segnale $X(\omega)$ è periodico con periodo 2π e quindi altrettanto vale per il segnale $Y(\omega) = X(-\omega)$

Scriviamo allora la serie di Fourier per Y (possiamo applicare Dirichlet)

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 \omega} \qquad \text{ma} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega}$$

Ma abbiamo anche che $Y(\omega) = X(-\omega)$. Applicando la formula di analisi della TFtd abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega} = Y(\omega) = X(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\omega n}$$

Ne segue che il segnale $x(n)$ coincide con i coeff. della serie di Fourier di Y. Abbiamo allora

$$x(n) = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{-j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(-\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

posto $\vartheta = -\omega$, si ha $d\omega = -d\vartheta$ e $\int_{-\pi}^{\pi} X(-\omega) e^{-j\omega n} d\omega = \int_{\pi}^{-\pi} X(\vartheta) e^{j\vartheta n} (-d\vartheta)$

in conclusione, chiamando ϑ di nuovo ω, si ha:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \qquad (2)$$

Formula di Sintesi

Infine, si può provare che la formula di sintesi vale anche se $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, purché $X(\omega)$ esista

TFtd e risposta in frequenza

Confrontando le definizioni di TFtd e di risposta in frequenza di un sistema BIBO-stabile, si conclude che $\hat{h}(\omega)$ è la TFtd di $h(n)$, risp. impulsiva del sistema

Proprietà della TFtd

Useremo $\mathcal{F}(x)(\omega) = X(\omega)$ per indicare la TFtd del segnale x

1) Linearità

Se $X = \mathcal{F}(x)$ e $Y = \mathcal{F}(y)$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha X + \beta Y$

2) Simmetrie

2.1 $\mathcal{F}(\bar{x}) = \overline{R(X)}$

2.2 $\mathcal{F}(R(x)) = R(X)$

2.3 x pari $\Rightarrow$ X pari

2.4 x dispari $\Rightarrow$ X dispari

2.5 x reale $\Rightarrow$ X hermitiana

2.6 x reale pari $\Rightarrow$ X reale pari

2.7 x reale dispari $\Rightarrow$ X immaginaria dispari

Le dim. sono immediate e seguono lo stesso principio del caso TFtc

4) Traslazione $\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = e^{-j\omega m} X(\omega)$

DIM. $\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) e^{-j\omega n}$ posto $k = n-m$ e $n = k+m$,

$\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega(k+m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \cdot e^{-j\omega m} = X(\omega) e^{-j\omega m}$

cvd

5) Modulazione $\mathcal{F}(e^{j\omega_0 n} x(n))(\omega) = X(\omega-\omega_0)$

DIM. $\mathcal{F}(e^{j\omega_0 n} x(n))(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(\omega-\omega_0)$

6) Prodotto di convoluzione

Se $v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $z = v * w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $Z(\omega) = V(\omega) \cdot W(\omega)$

cioè $\mathcal{F}(v * w) = \mathcal{F}(v)\, \mathcal{F}(w)$

Infatti $Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m) w(n-m) e^{-j\omega(n-m+m)}$

$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n-m) e^{-j\omega(n-m)} \right) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m) W(\omega) e^{-j\omega m}$

$= V(\omega) W(\omega)$ Infatti $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n-m) e^{-j\omega(n-m)} = W(\omega)$

indipendentemente da m

7) Moltiplicazione.

Se $X = \mathcal{F}(x)$ e $Y = \mathcal{F}(y)$ e se $\mathcal{F}(xy)$ esiste,

$\mathcal{F}(x \cdot y) = X *_{2\pi} Y$ dove $*_{2\pi}$ indica la convoluzione periodica di periodo 2π. SENZA DIM.

8) Derivata in ω $\qquad \mathcal{F}(n\,x(n)) = j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-jn)\, x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow j \frac{d}{d\omega} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,x(n)\, e^{-j\omega n} = \mathcal{F}(n\,x(n)) \qquad \text{CVD.}$$

9) Parseval $\quad$ Se $x \in \ell^2$, anche $X \in L^2(-\pi, \pi)$ e $\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|X\|_2^2$

Posto $Y(\omega) = X(-\omega)$ e a_k coeff. di Fourier di Y,

sappiamo che $a_k = x(k)$. Applicando Parseval a Y si ha:

$$\|X\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = 2\pi \|a_k\|_2^2 = 2\pi \|x\|_2^2 \qquad \text{CVD}$$

Esempi di calcolo della TFtd

1) Se $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } |n| \le N \\ 0 & \text{se } |n| > 0 \end{cases}$ $\qquad$ osserviamo che $x(n) = (2N+1)\, h(n)$

dove $h(n)$ è la R.I. del sistema che calcola la media mobile su $2N+1$ campioni.

Avevamo calcolato $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin \frac{\omega}{2}}$ $\quad \Rightarrow X(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin \frac{\omega}{2}}$

2) $x(n) = a^n u(n)$ con $|a| < 1$

$$X(\omega) = \sum_{n \ge 0} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{j\omega}}$$

È la RF di un sistema con $h(n) = a^n u(n)$, come avevamo già calcolato

Legame Tra TFD e TFtd

La TFtd è importante perché permette di rappresentare i sistemi LTI come un prodotto: se $y = L[x] = h * x$ allora $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$ dove L è un LTI di RI h e di RF H, mentre x e y sono ingresso e uscita del sistema mentre X e Y sono le rispettive TFtd

La TFtd però ha due problemi nell'applicazione pratica: 1) è una somma infinita

2) è una funzione di variabile continua

Possiamo però approssimarla con precisione arbitraria almeno nel caso di segnali a supporto finito, che poi è proprio il caso più rilevante (anzi, il solo caso rilevante) nella pratica

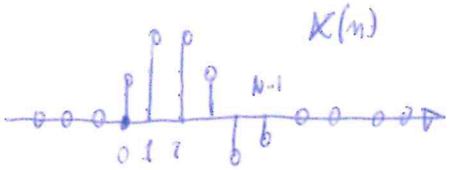
Sia allora $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un segnale a supporto finito. Visto l'arbitrarietà della variabile Temporale, possiamo considerare unicamente il caso in cui il supporto è $\{0, 1, \dots N-1\}$

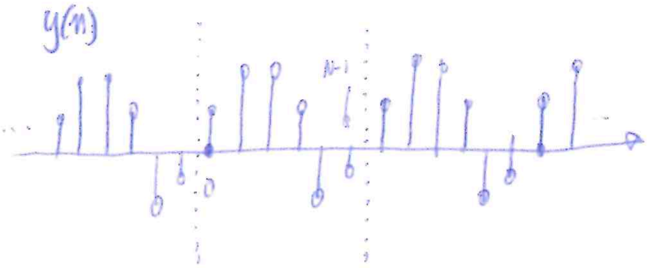
In altre parole, $x(n) = 0 \quad \forall n \notin \{0, 1, \dots N-1\}$

Sia ora $y(n) = x(n \bmod N)$

quindi y è la replica periodica di periodo N dei valori di x tra 0 e $N-1$; in altre parole

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{se } n \in \{0, \dots N-1\} \\ x(n-kN) & \text{se } n \in \{kN, kN+1, \dots kN+N-1\} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$





Allora calcoliamo la TFD del segnale periodico Y:

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

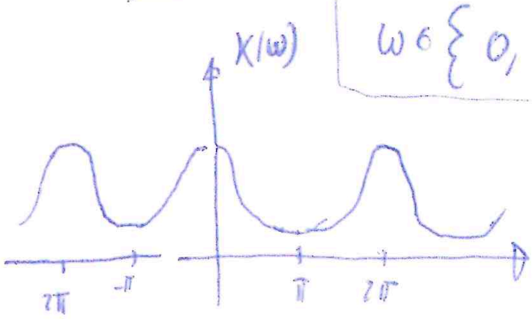
Posto $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, osserviamo che $Y(k) = X(k\omega_0)$

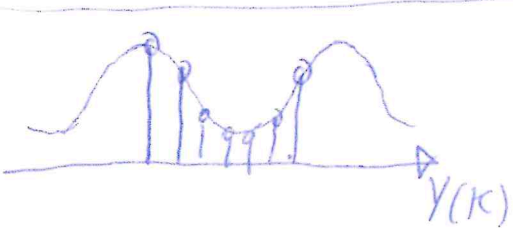
dove X è la TFtd di x

Sappiamo che $X(\omega)$ è periodica di periodo 2π.

I valori di $Y(k)$ corrispondono ai campioni di $X(\omega)$ presi per $\omega \in \{0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots (N-1)\omega_0\}$ cioè

$$\omega \in \left\{0, \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\frac{2\pi}{N}, \dots (N-1)\frac{2\pi}{N}\right\}$$





Per la periodicità di X (e anche di Y se si considera $k \in \mathbb{Z}$), $Y(N-1) = X\left((N-1)\frac{2\pi}{N}\right) = X\left(2\pi - \frac{2\pi}{N}\right) = X\left(-\frac{2\pi}{N}\right) = X(-\omega$

$$Y(N-2) = X\left((N-2)\frac{2\pi}{N}\right) = X(-2\omega_0)$$

$$Y(N-3) = X\left((N-3)\frac{2\pi}{N}\right) = X(-3\omega_0)$$

Allora per la visualizzazione, spesso si riordinano i coefficienti di Y in modo da avere $Y(0)$ al centro. Questa operazione è chiamata <u>fftshift</u> in molti linguaggi, tra cui Matlab

Esempio per N dispari

Notiamo che $Y\left(\frac{N+1}{2}\right) = X\left(\frac{N+1}{2}\frac{2\pi}{N}\right) = X\left(-\pi + \frac{1}{2}\omega_0\right)$

$\underline{Y}$							
	$Y(0)$	$Y(1)$	$Y(2)$ ...	$Y\left(\frac{N-1}{2}\right)$	$Y\left(\frac{N+1}{2}\right)$	...	$Y(N-1)$

$\frac{N-1}{2}$ valori $\qquad$ $\frac{N-1}{2}$ valori

fftshift(Y)								
	$Y\left(\frac{N+1}{2}\right)$	$Y\left(\frac{N+1}{2}+1\right)$ ...	$Y(N-1)$	$Y(0)$	$Y(1)$	$Y(2)$	...	$Y\left(\frac{N-1}{2}\right)$
$=$	$X\left(-\pi+\frac{1}{2}\omega_0\right)$	$X\left(-\pi+\frac{3}{2}\omega_0\right)$ ...	$X\left(-\pi+(N-1)\omega_0\right) = X(-\omega_0)$	$X(0)$	$X(\omega_0)$	$X(2\omega_0)$	...	$X\left(\pi - \frac{\omega_0}{2}\right)$

Possiamo ottenere un campionamento più fitto di $X(\omega)$?

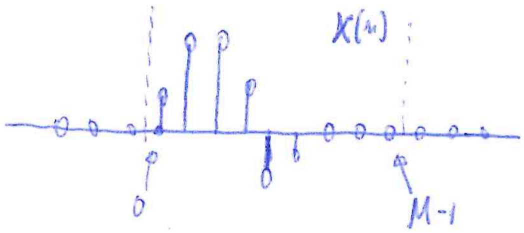
Il passo ω_0 è "sufficiente" per determinare x (basta applicare la formula di sintesi della TFD al vettore $\underline{Y}$) ma può non bastare per applicazioni in cui si vuole maggiore risoluzione nella rappresentazione di $X(\omega)$ (vedere Lab 5 per un esempio)

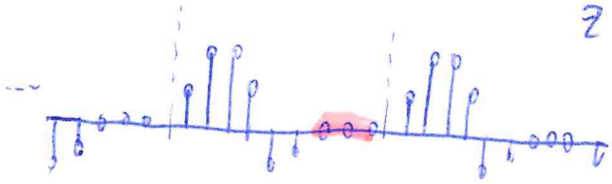
Allora introduciamo $z(n) = x(n \bmod M)$ dove

$M > N$

z è la replica periodica di x di periodo M

Ma i valori di x tra $N-1$ e $M-1$ sono nulli





Vengono quindi "aggiunti" degli zeri nel periodo di z
(zero-padding)

Calcoliamo la TFD di z:

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{M-1} (n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} \qquad \text{ma } z(n) = \begin{cases} x(n) & \text{se } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{se } n \in \{N, \dots, M-1\} \end{cases}$$

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} = X\left(k \cdot \frac{2\pi}{M}\right) = X(k\omega_1)$$