Esercizi proposti 14
soluzioni

Trasformata di Fourier

14.1

Calcolare le trasformate di Fourier di

$$x_1(t) = t\,\delta(t), \qquad x_2(t) = \cos(t)\,\delta(t),$$

sia direttamente che usando le proprietà della TdF.

Soluzione

Calcolo diretto. Ricordando che $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, si ha $x_1(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$ ed $x_2(t) = 1 \cdot \delta(t) = \delta(t)$. Le TdF di ${}_1(t)$ e $x_2(t)$ sono allora banalmente

$$X_1(j\omega) = 0, \qquad X_2(j\omega) = 1, \qquad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R}.$$

Usando le proprietà della TdF. Denotando con $\Delta(j\omega)$ la TdF dell'impulso, si ha

$$\Delta(j\omega) := \mathcal{F}(\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = 1, \qquad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R},$$

ovvero $\Delta(j\omega)$ è costante in ω. Applicando la regola di derivazione $tx(t) \longrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$, al segnale $x_1(t) = t\delta(t)$ si ottiene

$$X_1(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\Delta(j\omega) \equiv 0.$$

Analogamente, ricordando che $\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$ e applicando la regola di modulazione $e^{j\omega_0 t}x(t) \longrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$ al segnale $x_2(t) = \left[\frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})\right]\delta(t)$, si ottiene

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2}\Big[\Delta(j(\omega - 1)) + \Delta(j(\omega + 1))\Big] = \frac{1}{2}\big[1 + 1\big] \equiv 1.$$

14.2

Il segnale

$$x(t) = \cos 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

è l'ingresso di un sistema LTI e BIBO-stabile, caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 2}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la corrispondente uscita $y(t)$ e si interpreti il risultato come applicazione del teorema della convoluzione.

Soluzione

Per le proprietà della risposta in frequenza

$$y(t) = \big|H(j2)\big| \cos\big(2t + \arg H(j2)\big) = \sqrt{2}\cos\left(2t - \tfrac{\pi}{4}\right)\,.$$

Peraltro poiché $y(t) = h(t) * x(t)$, per il teorema della convoluzione $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ dove

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(\cos(2t)) = \pi\big(\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\big).$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) &= \frac{4}{j\omega+2}\Big[\pi\delta(\omega-2) + \pi\delta(\omega+2)\Big] \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}2\pi\delta(\omega-2) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}2\pi\delta(\omega+2) \end{aligned}$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j2t} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j2t} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{j\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \sqrt{2}\cos\left(2t-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

Commento generale. Per calcolare l'uscita di un sistema LTI sollecitato da un segnale sinusoidale è sufficiente utilizzare la formula

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y(t) = A|H(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \arg H(j\omega),$$

ma se il segnale $x(t)$ non è sinusoidale i calcoli devono essere effettuati caso per caso. Vi sono due approcci, lavorare in t calcolando direttamente la convoluzione $y(t) = h(t) * x(t)$ oppure lavorare in ω, applicando il teorema della convoluzione. Se si segue questa strada si deve trasformare $x(t) \to X(j\omega)$, e $h(t) \to H(j\omega)$, calcolare il prodotto $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ ed infine antitrasformare $Y(j\omega) \to y(t)$.

14.3

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo

$$x(t) = e^{-2|t|}\cos t$$

Soluzione

Definito $x_1(t) := e^{-2|t|}$, usando la formula di Eulero scriviamo

$$x(t) = \frac{1}{2}\Big[x_1(t)e^{jt} + x_1(t)e^{-jt}\Big].$$

Da qui discende, per la proprietà di traslazione in frequenza, la relazione tra le trasformate:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\Big[X_1(j(\omega-1)) + X_1(j(\omega+1))\Big].$$

È noto che $X_1(j\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$, quindi

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{4+(\omega-1)^2} + \frac{4}{4+(\omega+1)^2}\right] = \frac{4\,(5+\omega^2)}{(5-2\omega+\omega^2)(5+2\omega+\omega^2)}$$

Si noti la simmetria reale e pari di cui godono sia il segnale che la trasformata.

14.4

Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali a tempo continuo:

(a.) $x_1(t) = e^{-3|t|}\sin 2t$

(b.) $x_2(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$ (richiede parecchi conti, ma non è difficile)

Soluzione

(a.) Il segnale "modulato" $x_1(t)$ si può scrivere come

$$x_1(t) = y_1(t)\,\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j}$$

dove $y_1(t) = e^{-3|t|}$ è il segnale "modulante", con trasformata

$$Y_1(j\omega) = \frac{6}{9+\omega^2}.$$

(A lezione è stata calcolata la trasformata del segnale $y(t) = e^{-a|t|}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$, di cui $y_1(t)$ è caso particolare, con $a = 3$). Ora, per la proprietà di traslazione in frequenza, risulta

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2j}\Big[Y_1[j(\omega-2)] - Y_1[j(\omega+2)]\Big] = \ldots = \frac{-j24\omega}{[9+(\omega-2)^2][9+(\omega+2)^2]}$$

Si noti che x_1 è un segnale reale dispari e X_1 è una funzione immaginaria dispari, rispettando le proprietà di simmetria della trasformata di Fourier.

(b.) Scriviamo il segnale x_2 come il prodotto $x_2(t) = y_2(t)\cdot y_3(t-1)$, con

$$y_2(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \qquad y_3(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

le cui trasformate (già considerate a lezione nel caso generale del segnale $y(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$) sono

$$Y_2(j\omega) = \mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi} = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad Y_3(j\omega) = \mathrm{rect}\frac{\omega}{4\pi} = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \le 2\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Applicando le proprietà di moltiplicazione e traslazione nel tempo, otteniamo allora la trasformata X_2 come convoluzione:

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[Y_2(j\omega) * e^{-j\omega} Y_3(j\omega)\Big]$$

cioè,

$$\begin{aligned}
X_2(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) e^{-j(\omega-\theta)}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega-\theta}{4\pi}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega-\theta}{4\pi}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\begin{cases} 0, & \text{se } \omega < -3\pi \\ \int_{-\pi}^{\omega+2\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = -j(1+e^{-j\omega}), & \text{se } -3\pi \le \omega < -\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = 0, & \text{se } -\pi \le \omega < \pi \\ \int_{\omega-2\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = j(1+e^{-j\omega}), & \text{se } \pi \le \omega < 3\pi \\ 0 & \text{se } 3\pi \le \omega \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{j}{\pi} e^{-j\frac{\omega}{2}} \mathrm{sign}\omega \cos\frac{\omega}{2}, & \text{se } \pi < |\omega| < 3\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

Notiamo che X_2 è una funzione a simmetria hermitiana, essendo x_2 un segnale reale.

14.5

Determinare i segnali a tempo continuo che corrispondono alle seguenti trasformate:

(a.) $X_1(j\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$

(b.) $X_2(j\omega) = 2\Big[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)\Big] + 3\Big[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)\Big]$

Soluzione

(a.) La trasformata X_1 appare come la traslata

$$X_1(j\omega) = Y_1[j(\omega - 2\pi)]$$

di $Y_1(j\omega) = \dfrac{2\sin 3\omega}{\omega}$ e questa è la trasformata di Fourier del segnale rettangolare $y_1(t) = \text{rect}\left(\dfrac{t}{6}\right)$ (verificatelo!). Perciò,

$$x_1(t) = e^{j2\pi t} y_1(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & \text{se } |t| \le 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo notare che alla trasformata X_1 reale corrisponde il segnale x_1 a simmetria hermitiana.

(b.) Direttamente calcoliamo

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\Big[2(e^{jt} - e^{-jt}) + 3(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[2j\sin t + 3\cos 2\pi t\Big] \end{aligned}$$

Anche qui, essendo la trasformata X_2 una funzione (generalizzata) reale, il corrispondente segnale x_2 risulta godere della simmetria hermitiana.

14.6

Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali a tempo continuo:

(a.) $x_1(t) = \cos 3t + \frac{1}{2}\left[\delta(t - 3) + \delta(t + 3)\right]$;

(b.) $x_2(t) = \text{rect}(\frac{t}{4}) * u(t - 2)$.

Soluzione

(a.) Dagli esempi svolti in classe, ricordando la formula di Eulero per il coseno, si ottiene direttamente

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= \tfrac{1}{2}\Big[2\pi\,\delta(\omega - 3) + 2\pi\,\delta(\omega + 3)\Big] + \tfrac{1}{2}\left[e^{-j3\omega} + e^{j3\omega}\right] \\ &= \pi\Big[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)\Big] + \cos 3\omega. \end{aligned}$$

(b.) Definiamo $x_3(t) = \text{rect}(\frac{t}{4})$, $x_4(t) = u(t - 2)$ e calcoliamo le trasformate $X_3(j\omega) = 2\,\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$, $X_4(j\omega) = e^{-j2\omega}\left[\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$, per la seconda delle quali abbiamo usato la proprietà di traslazione temporale. Ora, dal teorema di convoluzione e dalle proprietà della delta segue

$$\begin{aligned}
X_2(j\omega) &= X_3(j\omega)X_4(j\omega) = 2\,\frac{\sin 2\omega}{\omega}\,e^{-j2\omega}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right] \\
&= 2\,\frac{\sin 2\omega\cos 2\omega - j\sin^2 2\omega}{j\omega^2} + 4\pi\,\delta(\omega) \\
&= -8\,\mathrm{sinc}^2\tfrac{2\omega}{\pi} + 4\pi\,\delta(\omega) + \frac{4}{j\omega}\cdot\mathrm{sinc}\tfrac{4\omega}{\pi}.
\end{aligned}$$

14.7

Un sistema a tempo continuo LTI risponde all'ingresso

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

con l'uscita

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

(a.) Calcolare la risposta in frequenza del sistema.

(b.) Determinare la risposta impulsiva del sistema.

(c.) (da scrivere)

Soluzione

(a.) Poiché in un sistema LTI ingresso e uscita sono legate tra loro mediante convoluzione con la risposta impulsiva, cioè $y = h * x$, la corrispondente relazione tra le trasformate di Fourier (qualora esistano) è moltiplicativa:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Dunque, calcolando

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} = \frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

e

$$Y(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega} = \frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

otteniamo la risposta in frequenza $H(j\omega)$ del sistema come il quoziente:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

(b.) Per antitrasformare la funzione razionale $H(j\omega)$, la decomponiamo in frazioni parziali:

$$H(j\omega) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{4+j\omega}\right]$$

ricavando così la risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{3}{2}[e^{-2t} + e^{-4t}]u(t)$$

Notiamo che h è assolutamente integrabile, e dunque il sistema LTI è BIBO-stabile.

14.8

Determinare i segnali a tempo continuo che corrispondono alle seguenti trasformate:

(a.) $X_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \omega < 2, \\ -1, & \text{se } 2 < \omega < 4, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$

(b.) $X_2(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{4}\right)$.

Soluzione

(a.) Scrivendo $X_1(j\omega) = \mathrm{rect}\frac{\omega-1}{2} - \mathrm{rect}\frac{\omega-3}{2}$ e applicando la proprietà di traslazione in frequenza, otteniamo

$$x_1(t) = \left(e^{jt} - e^{j3t}\right) \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{rect}\tfrac{\omega}{2}\right](t) = -2je^{j2t}\sin t\,\frac{\sin t}{\pi t} = -2je^{j2t}\,\frac{\sin^2 t}{\pi t}.$$

(b.) Si riconosce in $X_2(j\omega)$ la trasformata di un segnale periodico di pulsazione $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 8$, con coefficienti di Fourier $\{a_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|},\, k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2$. Pertanto $x_2(t)$ è un segnale di potenza finita, rappresentabile (in media quadratica) mediante la serie di Fourier

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{4}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, il segnale $x_2(t)$, reale e pari come la sua trasformata, si può rappresentare anche con la serie reale di soli coseni

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(e^{jk\frac{\pi}{4}t} + e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\right)\right] = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cos k\tfrac{\pi}{4}t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si noti che la potenza $P(x_2)$ si può calcolare, grazie al teorema di Parseval, come

$$P(x_2) = \tfrac{1}{T}\int_T |x_2(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{4\pi^2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2|k|} = \tfrac{1}{4\pi^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^k - 1\right] = \tfrac{5}{12\pi^2}.$$

14.9

Senza calcolarne l'antitrasformata, determinare quale/quali delle seguenti funzioni:

$$X_1(j\omega) = \frac{2}{4+\omega^2}, \quad X_2(j\omega) = \frac{2\omega}{4+\omega^2}, \quad X_3(j\omega) = j\frac{2\omega}{4+\omega^2}$$

è la trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo reale e dispari?

Soluzione

DA SCRIVERE

14.10

Si consideri il segnale $z(t) = x(t) \cdot y(t)$, dove $x(t) = e^{-jt} \cos 3t$ e $y(t)$ ha trasformata di Fourier

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1 + \omega, & -1 < \omega \leq 0, \\ 1 - \omega, & 0 < \omega \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli la trasformata di Fourier $Z(j\omega)$ e se ne tracci il grafico.

Soluzione

DA SCRIVERE