Trasformata di Fourier Discreta (TFD)

Principi

La TFD è l'analogo a t.d. della serie di Fourier.

Consideriamo i segnali t.d. periodici di periodo N.

Essi sono caratterizzati dai loro valori in un periodo, per esempio per n che va da ϕ a $N-1$

Allora possiamo identificare un segnale t.d. periodico con N numeri complessi che rappresentano i valori assunti dal segnale in un periodo, proprio come abbiamo identificato i segnali periodici t.c. con la loro restrizione a $(-T/2, T/2)$

Al segnale $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ periodico di periodo N, associo il vettore $\underline{x} = [x(0) \; x(1) \dots \; x(N-1)]^T$:

$$f : (x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \text{ periodico } N) \longrightarrow [x(0) \dots x(N-1)]^T \in \mathbb{C}^N$$

L'applicazione $f : x \to \underline{x}$ è evidentemente invertibile e preserva le operazioni algebriche:

$\forall\, x, y$ periodici di periodo N e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$$

In termini algebrici, abbiamo istituito un isomorfismo tra i segnali periodici t.d. e $\mathbb{C}^N$
In particolare $\langle x, y \rangle$ si può definire come $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{y}^* \underline{x}$
Ricordiamo il principio della S.d.F.: Trovare una base per $L^2(-T/2, T/2)$ in modo da usarla per rappresentare i segnali periodici su $\mathbb{R}$.

Qui il principio è simile: individuiamo una base ortogonale per $\mathbb{C}^N$ usando gli esp. imm. in relazione armonica

<u>Esponenziali immaginari puri in relazione armonica a t.d.</u>

Fissiamo $N \in \mathbb{N}_0$, e consideriamo, per $k \in \mathbb{Z}$, il segnale t.d.

$$\varphi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \varphi_k(n) = e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$$

Tali segnali sono detti esp. imm. p in <u>relazione armonica</u>

Osserviamo che la pulsazione di φ_k è $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{N} = k \cdot \omega_1$

Sappiamo allora che φ_k è periodico; siccome $\frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{N}$

allora N è sicuramente un periodo di φ_k ed è
il periodo fondamentale se e solo se k e N sono co-primi

Notiamo invece che un <u>generico</u> exp. imm. p. $e^{j\omega n}$ non è necessariamente un segnale periodico

Proprietà degli esp. imm. p. in rel. armonica

1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, φ_k è periodico di N (non necessariamente periodo fondamentale)

2) Se $k' = k+N$, $\varphi_{k'} = \varphi_k$

3) Se φ_k è il vettore $f(\varphi_k) = [\varphi_k(0), \varphi_k(1), \dots \varphi_k(N-1)]^T$

allora $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = N\,\delta[(k-h) \bmod N]$

4) $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ è una base ortogonale di $\mathbb{C}^N$

DIM.

1) $\varphi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ quindi la pulsazione è $k\frac{2\pi}{N}$ quindi N è un perio

2) Se $k' = k+N$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\varphi_{k'}(n) = e^{jk'\frac{2\pi}{N}n} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} =$

$$= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \cdot e^{j2\pi n} = \varphi_k(n) \cdot 1 = \varphi_k(n) \quad \text{CV}$$

Allora basta considerare l'insieme $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$

perché tutti gli altri esp. imm. p. in rel. arm. hanno un equivalente in tale insieme

3) Verifichiamo con il calcolo diretto

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(n) \overline{\varphi_h(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \, e^{-jh\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}(k-h)}\right]^n = \sum_{n=0}^{N-1} z^n$$

avendo posto $z = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-h)}$

Per calcolare la somma $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + z^2 + \dots z^{N-1}$

osserviamo che, se $z = 1$, $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = N$

Invece, se $z \neq 1$, $(1 + z + \dots z^{N-1})(z-1) = z + z^2 + \dots + z^N - 1 - z - \dots - z^{N-1}$
$= z^N - 1$

Allora, se $z \neq 1$, $\frac{z^N - 1}{z - 1} = (1 + z + \dots z^{N-1})$

Ora, $z^N = \left[e^{j\frac{2\pi}{N}(k-h)}\right]^N = e^{j2\pi(k-h)} = 1$

Quindi $z \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1} = \emptyset$

Rimane da capire quando $z = 1$:

$z = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-h)} = 1 \iff \frac{k-h}{N}$ è intero $\iff k = h \mod N$

In conclusione, $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = N \cdot \delta[(k-h) \bmod N]$

Nota: siccome non è rilevante prendere k e h al di fuori di $\{0, 1, \dots N-1\}$, possiamo concludere:

$$\forall h, k \text{ tra } 0 \text{ e } N-1, \quad \langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = N\, \delta(k-h)$$

Quindi effettivamente $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ è una base ortogonale dello spazio $\mathbb{C}^N$

Trasformata di Fourier Discreta (TFD)

Dato x t.d. periodico di periodo N, possiamo effettuare un cambio di base

Il passaggio da x a $\underline{x}$ equivale alla proiezione ortogonale nella base canonica $\{\delta(n-k)\}_{k=0}^{N-1}$

Se invece proiettiamo nella base $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ possiamo ricostruire x dalla base:

$$Pr(x \mid U_k(\delta))(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, U_k(\delta)\rangle}{\langle U_k(\delta), U_k(\delta)\rangle} \cdot \delta(n-k)$$

Infatti $\langle U_k(\delta), U_k(\delta)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-k)\cdot\delta(n-k) = 1$

Mentre $\langle x, U_k(\delta)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\delta(n-k) = x(k)$

Allora, la proiezione nella base canonica da:

$$\forall n \in \{0,..N-1\} \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\delta(n-k)$$

La TFD è la proiezione su $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, \varphi_k\rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k\rangle} \cdot \varphi_k(n) \qquad (1)$$

Ada

$$X(k) = \frac{\langle x, \varphi_k\rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k\rangle} = \boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (2)}$$

La (1) diventa:

$$\boxed{\forall n \in \{0,..N-1\} \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (3)}$$

Allora la formula (2):

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, \dots N-1\} \qquad X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

è detta formula di analisi della TDF;

mentre la formula 3:

$$\boxed{\forall n \in \{0, 1, \dots N-1\} \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

è detta formula di sintesi

Notiamo che la (2) ha senso anche per ogni $k \in \mathbb{Z}$

ma $$X(k+N) = \frac{\langle x, \varphi_{k+N}\rangle}{\langle \varphi_{k+N}, \varphi_{k+N}\rangle} = \frac{\langle x, \varphi_k\rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k\rangle} = X(k)$$

quindi possiamo anche considerare la (2) valida su $\mathbb{Z}$

In tal caso $X(k)$ è periodica di periodo N

Analogamente, la formula di sintesi è una somma di N segnali periodici di periodo N, quindi genera un segnale periodico rispetto alla variabile n

TFD in forma matriciale

Siccome la TFD è un cambiamento di base, può essere espressa tramite un prodotto matriciale.

Dato x periodico di periodo N sia

$\underline{x}$ la sua proiezione nella base canonica:

$$\underline{x} = [\, x(0),\ x(1) \dots x(N-1) \,]^T$$

e sia $\underline{X}$ il vettore della sua T

$$\underline{X} = [\, X(0),\ X(1) \dots X(N-1) \,]^T$$

Sia ora $\underline{\underline{M}}$ una matrice $N \times N$ il cui termine

in posizione $k+1,\ n+1$ $\quad (\underline{\underline{M}})_{k+1,n+1} = \frac{1}{N}\,\overline{\varphi_k}(n) = \frac{1}{N}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$(k, n \in \{0, \dots N-1\})$

cioè:

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che $(\underline{\underline{M}})_{l,n} = (\underline{\underline{M}})_{n,l}$: è una matrice simmetrica

Mostriamo che $\underline{X} = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}$

Basta osservare che la $(k+1)$esima riga di $\underline{\underline{M}}$ è $\underline{m}_{k+1}^T$:

$$\underline{m}^T_{k+1} = \frac{1}{N}\left[\, \bar{\varphi}_k(0) \;\dots\; \bar{\varphi}_k(N-1) \right] = \frac{1}{N}\bar{\varphi}_k$$

Quindi l'elemento in posizione $k+1$ di $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{x}$ è

$$\sum_{n=0}^{N} m_{k+1}(n)\, x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{\bar{\varphi}_k(n)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X(k$$

Allora $\underline{\underline{M}} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$ cioè $\underline{X} = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}$

formula di analisi

Mostriamo ora che $\underline{\underline{M}}$ è invertibile e determiniamo anche la formula di sintesi in forma matriciale.

Usiamo la notazione $\underline{\underline{M}}^* = \bar{\underline{\underline{M}}}^T = \bar{\underline{\underline{M}}}$ perché $\underline{\underline{M}}$ è simmetrica

Calcoliamo ora l'elemento in posizione $(k+1, n+1)$ della matrice $\underline{\underline{M}} \cdot \bar{\underline{\underline{M}}}$

Tale elemento è il prodotto della $(k+1)$ esima riga di $\underline{\underline{M}}$ e della $(n+1)$ esima colonna di $\bar{\underline{\underline{M}}}$

$(k+1)$ esima riga di $\underline{\underline{M}}$ è $\frac{1}{N}\bar{\varphi}_k$

perché $\underline{\underline{M}}$ e quindi $\bar{\underline{\underline{M}}}$ è simmetrica

$(n+1)$ colonna di $\bar{\underline{\underline{M}}}$ è la $(n+1)$ riga di $\bar{\underline{\underline{M}}}$ quindi è $\frac{1}{N}\varphi_n$

Allora $$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \bar{\underline{\underline{M}}}\right)_{k+1,n+1} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \varphi_n(m)\, \bar{\varphi}_k(m) = \frac{1}{N^2} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{N}\delta(n-$$

Cioè $\quad \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\bar{M}}} = \frac{1}{N}\,\underline{\underline{I}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{M}} \cdot (N \cdot \underline{\underline{\bar{M}}}) = \underline{\underline{I}}$

Quindi $\quad \boxed{\underline{\underline{M}}^{-1} = N \cdot \underline{\underline{\bar{M}}} = \left\{ \exp\left[-j\frac{2\pi}{N} nk\right]\right\}_{k+1,\, n+1}}$

Allora $\quad \underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1}\,\underline{X} = N\,\underline{\underline{\bar{M}}}\,\underline{X}$

$$\boxed{\underline{X} = \underline{\underline{M}}\,\underline{x} \qquad\qquad \underline{x} = N\,\underline{\underline{\bar{M}}}\cdot\underline{X}}$$

La TFD e la TFD inversa sono dei prodotti matriciali

Useremo nel seguito la notazione $x \Rightarrow X$ per indicare che $X(k)$ è la TFD di x

<u>Proprietà della TFD</u>

Siano $X(k)$ i coeff. della serie di Fourier di $x(n)$ periodica di periodo N.

Introduciamo anche la <u>convoluzione periodica di periodo N</u> (o convoluzione circolare)

Se x e y sono periodici di periodo N si ha:

$$x \ast_N y\,(n) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,y(n-k)$$

In termini di vettori di $\mathbb{C}^N$, la conv. circolare si può scrivere in questo modo: se $z = x *_N y$ 11

$$\underline{z}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x}(k)\, \underline{y}((n-k) \bmod N)$$

Ricordiamo inoltre che $R[x](n) = x(-n)$

Le proprietà si dimostrano facilmente usando le definizioni:

1. $\bar{x} \Rightarrow \overline{R(X)}$

Dim. Applico la (2) a $\bar{x}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \overline{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = \overline{R(X)}$$

Quindi se x è reale, $X = \bar{X}$ e $X = \overline{R(X)}$ simmetria hermitiana

2. $R(x) \Rightarrow R(X)$

Dim. Applico la (2) a $R(x)$: $R(x) \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(-n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

(opzionale)

$$= \frac{1}{N}x(0)\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N-1} x(N-n)\, e^{-j\frac{k}{N}2\pi(n-N)} = \frac{x(0)}{N} + \frac{1}{N}\sum_{m=N-1}^{1} x(m)\, e^{-j\frac{(-k)}{2\pi}2\pi m} = R(X)$$

per periodicità

$m = N-n$

Allora se $x = R(x)$ (se pari), anche $X = R(X)$

3. $U_m[x] \Rightarrow X \cdot \varphi_{-m}$

Dim $U_m[x] \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-m)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{l=-m}^{N-m-1} x(l)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}l}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$

$n = l+m$

$\boxed{l = n-m}$

ora $e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \varphi_{-m}(k)$ può essere portato fuori dalla somma, mentre $x(l)e^{-jk\frac{2\pi}{N}l}$ è periodico di periodo N, per cui la somma si può calcolare da 0 e $N-1$ e si ottiene $X(k)\cdot\varphi_{-m}(k)$

4) $x\cdot\varphi_m \Rightarrow \mathcal{U}_m[X]$

Dim. $x\cdot\varphi_m \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\varphi_m(n)\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$

$= X(k-m)$ (ricordiamo la periodicità di X)

CVD

5) $x\cdot y \Rightarrow X *_N Y$

Dim. Sia $z(n) = x(n)\cdot y(n)$, anch'esso è quindi periodico di periodo N.

$$Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,y(n)\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

usando $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} Y(m)\,e^{jm\frac{2\pi}{N}n}$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sum_{m=0}^{N-1} Y(m)\,e^{jm\frac{2\pi}{N}n}\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} Y(m)\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-j(k-m)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{m=0}^{N-1} Y(m)\,X(k-m)$$

$$= X *_N Y(k)$$ CVD

6) $x *_N y \Rightarrow N\cdot X\cdot Y$

Dim. se $z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,y(n-m)$ allora

$$Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,y(n-m)\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-m+m)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m)\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-m)}$$

Ma, per periodicità, $\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

Allora $$Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \cdot N \cdot \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = N\, X(k)\cdot Y(k)$$

C.V.D.

7.1) $\|\underline{x}\|^2 = N\|\underline{X}\|^2$ (Parseval)

7.2) $\underline{x}^T\overline{\underline{y}} = N\,\underline{X}^T\cdot\overline{\underline{Y}}$

Dimostriamo 7.2). La 7.1) è un caso particolare ($\underline{y}=\underline{x}$)

Ricordiamo che $N\cdot \underline{\underline{M}}\,\overline{\underline{\underline{M}}} = \underline{I} \iff N\,\overline{\underline{\underline{M}}\cdot\overline{\underline{\underline{M}}}} = \underline{I} \iff N\cdot\overline{\underline{\underline{M}}}\cdot\underline{\underline{M}} = \underline{I}$

Inoltre $\underline{x} = N\,\overline{\underline{\underline{M}}}\,\underline{X}$ e $\underline{y} = N\,\overline{\underline{\underline{M}}}\cdot\underline{Y}$

Allora $\underline{x}^T = N\cdot\underline{X}^T\,\overline{\underline{\underline{M}}}$ e $\overline{\underline{y}} = N\,\underline{\underline{M}}\cdot\overline{\underline{Y}}$

Finalmente, $$\underline{x}^T\cdot\overline{\underline{y}} = N\cdot\underline{X}^T\cdot\overline{\underline{\underline{M}}}\cdot N\cdot\underline{\underline{M}}\,\overline{\underline{Y}}$$ ma $\overline{\underline{\underline{M}}}\cdot N\cdot\underline{\underline{M}} = N\overline{\underline{\underline{M}}}\underline{\underline{M}} = \underline{I}$

$$= N\,\underline{X}^T\,\underline{I}\,\overline{\underline{Y}} = N\,\underline{X}^T\cdot\overline{\underline{Y}} \quad \text{C.V.D.}$$

8) Applicando la TFD a $X(k)$ (che è periodico), si ottiene $\frac{R[x]}{N}$:

$\underline{X} \Rightarrow \frac{1}{N}R[x]$

Dim. Applichiamo la formula di sintesi al segnale periodico $\frac{1}{N}R[$

$$\frac{1}{N}R[x](n) = \frac{1}{N}x(-n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

ma questo è proprio la TFD applicata a $\underline{X}$

Alternativamente, basta mostrare che $\underline{\underline{M}}\cdot\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \vdots & & & \end{matrix} \end{bmatrix}$

C.V.D.

9) Sistema LTI in regime periodico

Se x è periodico T.d. di periodo N e

L è un LTI stabile, detto $y = L(x)$

sappiamo che y è periodico. Abbiamo allora che

$Y(k) = \hat{h}\left(2\pi \frac{k}{N}\right) X(k)$ dove $\hat{h}(\omega)$ è la RF di L

DIM. $x = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi_k$ (rappr. di x nella base φ_k)

Allora $y = h * x = h * \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi_k = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, h*\varphi_k$

Ma $h*\varphi_k(n) = L\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right] \doteq \hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}\cdot k\right)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

Qui: $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \boxed{X(k)\cdot \hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}\cdot k\right)} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \iff Y(k) = X(k)\,\hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$

c.v.d.