Esercizi proposti 10
soluzioni

Serie di Fourier

10.1

Sviluppare in serie di Fourier i segnali $x_2(t)$, $x_4(t)$ e $x_5(t)$ definiti qui sotto,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 1 + \sin 3t - 4\cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_4(t) &= \sin(\pi/4)\,\cos 2t + \sin^2(3t), \\ x_5(t) &= 2\pi - 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right) - e^{j\frac{\pi}{4}t+2}. \end{aligned}$$

Soluzione

(a.) Il segnale x_2 è periodico di periodo $T = 2\pi$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = 1$. Lo riscriviamo, usando le formule di Eulero, nella forma

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 1 + \frac{1}{2j}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\omega_0 t} - \left[\frac{4}{2}e^{j\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{4}{2}e^{j\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{3}\right)}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2j}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\omega_0 t} - 2\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{j5\omega_0 t} - 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-j5\omega_0 t} \\ &= -(1 + j\sqrt{3})e^{-j5\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}je^{-j3\omega_0 t} + 1 - \tfrac{1}{2}je^{j3\omega_0 t} - (1 - j\sqrt{3})e^{j5\omega_0 t} \end{aligned} \tag{1}$$

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier si desumono per ispezione,

$$a_{-5} = -1 - j\sqrt{3}, \quad a_{-3} = \tfrac{1}{2}j, \quad a_0 = 1, \quad a_3 = -\tfrac{1}{2}j, \quad a_5 = -1 + j\sqrt{3},$$

$a_k = 0$ per ogni altro $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $x(t)$ è reale la sequenza a_k è hermitiana.

(b.) Il segnale x_4 ha periodo $T = \pi$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = 2$. Utilizzando le formule di Eulero si ha

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} + \left(\frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j2t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j2t} - \frac{1}{4}e^{j6t} - \frac{1}{4}e^{-j6t} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}e^{-j3\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4}e^{j3\omega_0 t} \end{aligned}$$

I coefficienti della serie di Fourier sono $a_{-3} = a_3 = -\frac{1}{4}$, $a_{-1} = a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $a_0 = \frac{1}{2}$, e $a_k = 0$ per ogni altro $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $x(t)$ è reale e pari la sequenza a_k è reale e pari.

(c.) Il segnale x_5 ha periodo $T = 40$, pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{\pi}{20}$, e si può rappresentare come

$$\begin{aligned} x_5(t) &= 2\pi - 3 - \sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{3}\right) - e^2 e^{j\frac{\pi}{4}t} \\ &= 2\pi - 3 - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j4\omega_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j4\omega_0 t} - e^2 e^{j5\omega_0 t} \end{aligned}$$

I coefficienti di Fourier non nulli sono: $a_{-4} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{2j}$, $a_0 = 2\pi - 3$, $a_4 = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2j}$, $a_5 = -e^2$.

10.2

Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$x(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale $y(t) := \frac{dx}{dt}(t-1)$.

Soluzione

I coefficienti $\{a_k\}$ del segnale $x(t)$, di pulsazione $\omega_0 = \pi$ e periodo fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$, rispetto alla famiglia $\{e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$ sono, per ispezione,

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{per } k = 0, \\ 0, & \text{per } k \neq 0 \text{ e pari}, \\ -\dfrac{2}{k^2\pi^2}, & \text{per } k \text{ dispari}. \end{cases}$$

Applicando la proprietà di derivazione, i coefficienti $\{b_k\}$ di $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ sono

$$b_k = jk\pi a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari}, \\ \dfrac{2}{jk\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Infine, applicando la proprietà di traslazione, i coefficienti $\{c_k\}$ di $x'(t-1) = \frac{dx}{dt}(t-1)$ sono

$$c_k = e^{-jk\pi} b_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari}, \\ -\dfrac{2}{jk\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Allo stesso risultato si arriva valutando la serie nel punto $t-1$ e derivando termine a termine. Infatti, da

$$x(t-1) = \frac{1}{2} - \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{k^2\pi^2} e^{jk\pi(t-1)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

derivando termine a termine la serie si ottiene

$$y(t) = x'(t-1) = \frac{dx}{dt}(t-1) = \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\pi(t-1)}$$

da cui, per ispezione, si ricavano i coefficienti di Fourier $\{c_k\}$ come sopra.

10.3

Si consideri $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ periodico di periodo $T = 2$, ad energia finita su $[0, T]$, con coefficienti di Fourier $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Si calcolino i coefficienti di Fourier $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ del segnale $y(t) := e^{j\pi t} \cdot x(t-4)$.

Soluzione

Per risolvere agevolmente l'esercizio si osservi che $x(t-4) = x(t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, poichè il segnale $x(t)$ ha periodo $T = 2$. L'esercizio si riduce dunque al calcolo dei coefficienti di Fourier b_k di $y(t) = e^{j\pi t} x(t)$. La pulsazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$, quindi $y(t) = e^{j\omega_0 t} x(t)$ e, dalla proprietà di traslazione in frequenza, risulta $b_k = a_{k-1}$.

10.4

Sia $x(t)$ un segnale periodico ad energia finita sul periodo T con coefficienti di Fourier:

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0. \end{cases}$$

(a.) $x(t)$ è reale? (b.) $x(t)$ è pari? (c.) $\frac{dx}{dt}(t)$ è pari?

Soluzione

(a.) $x(t)$ è reale se e solo se la sequenza dei coefficienti è hermitiana, ovvero $a_{-k} = a_k^*$. Per $k = 0$ questo comporta $a_0 \in \mathbb{R}$. Nel caso in esame $a_0 \in \mathbb{R}$, mentre, per $k \neq 0$, abbiamo $a_{-k} = j\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|} = j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} = a_k \neq a_k^* = -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$. Il segnale $x(t)$ non è reale.
NOTA: Poichè $a_{-k} = -a_k^* = a_k$ la sequenza dei coefficienti è antihermitiana e pari. Il segnale $x(t)$ è dunque immaginario puro e pari.

(b.) $x(t)$ è pari se e solo se la sequenza dei coefficienti è pari, ovvero $a_{-k} = a_k$. Nel caso in esame, come visto sopra, la condizione è soddisfatta. Il segnale $x(t)$ è pari.

(c.) Usando la regola per la derivata (vedi tabella) i coefficienti b_k di $\frac{dx}{dt}(t)$ sono

$$b_k = j\omega_0 k\, a_k = (j\omega_0 k)(j\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}) = -\omega_0 k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}$$

La sequenza dei coefficienti è dispari, $b_k = -b_{-k}$. Si conclude che il segnale $\frac{dx}{dt}(t)$ è dispari.
NOTA: Poichè la sequenza b_k è reale e dispari, il segnale $\frac{dx}{dt}(t)$ è immaginario puro e dispari.

10.5

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|+1} e^{j\pi k t}.$$

(a.) Il segnale $x(t)$: è reale? è immaginario? è pari? è dispari?

(b.) Si calcolino i coefficienti di Fourier per il segnale $y(t) = x(t-1) - 1$.

Soluzione

(a.) Indicando con a_k i coefficienti di Fourier di $x(t)$, poichè $a_k = \frac{1}{|k|+1} = a_{-k} \in \mathbb{R}$ si conclude che il segnale $x(t)$ è reale e pari.

(b.) Il segnale $y(t) = x(t-1) - 1$ si ottiene da $x(t)$ per traslazione e aggiunta di una costante: la pulsazione fondamentale ω_0 di $y(t)$ coincide dunque con quella di $x(t)$ e vale $\omega_0 = \pi$. Lo sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$ è del tipo

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, e^{j\pi k t}.$$

I coefficienti b_k si ottengono a partire dagli a_k applicando la proprietà di traslazione temporale, ed osservando che l'aggiunta della costante modifica solo il valore medio del segnale, ovvero il coefficiente b_0. Otteniamo $b_k = a_k\, e^{-jk\pi}$ per $k \neq 0$ e $b_0 = a_0 e^{-j0\pi} - 1$ ovvero

$$b_0 = 0, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{1+|k|}, \qquad k \neq 0$$

10.6

Si calcoli l'energia in un periodo dei segnali $x_2(t)$ e $x_5(t)$ dell'Esercizio (**??**).

Soluzione

I segnali sono

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 1 + \sin 3t - 4\cos(5t - \frac{\pi}{3}) \\ x_5(t) &= 2\pi - 3 + \sin(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) - e^{j\frac{\pi}{4}t+2}\,. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'energia in un periodo utilizzando la formula di Parseval

$$E^x_{[T]} := \int_{[T]} |x(t)|^2\,dt = T\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Abbiamo già determinato i coefficienti di Fourier dei segnali x_2 e x_5, vedi Esercizio (10.1). Per il segnale x_2, di periodo $T = 2\pi$, i coefficienti di Fourier non nulli sono

$$a_{-5} = -1 - j\sqrt{3}, \quad a_{-3} = \tfrac{1}{2}j, \quad a_0 = 1, \quad a_3 = -\tfrac{1}{2}j, \quad a_5 = -1 + j\sqrt{3}\,,$$

e dunque

$$\begin{aligned} E^{x_2}_{[T]} &= 2\pi\Big[|a_{-5}|^2 + |a_{-3}|^2 + |a_0|^2 + |a_3|^2 + |a_5|^2\Big] \\ &= 2\pi\big[4 + \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{1}{4} + 4\big] = 19\pi\,. \end{aligned}$$

Per il segnale x_5, di periodo $T = 40$, i coefficienti di Fourier non nulli sono

$$a_{-4} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{2j}, \quad a_0 = 2\pi - 3, \quad a_4 = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2j}, \quad a_5 = -e^2\,,$$

e dunque

$$E^{x_5}_{[T]} = 40\Big[|a_{-4}|^2 + |a_0|^2 + |a_4|^2 + |a_5|^2\Big] = 40\left[\tfrac{1}{4} + (2\pi - 3)^2 + \tfrac{1}{4} + e^4\right]\,.$$

10.7

Sia $x(t)$ un segnale reale, periodico di periodo T, e ad energia finita nel periodo, $y(t) := \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ e $z(t) := x(t) + y(t)$. Detti a_k e b_k i coeficienti di Fourier di $x(t)$ e di $z(t)$ rispettivamente si dimostri che, se $x(t)$ è dispari, allora vale

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2. \tag{2}$$

Soluzione

A meno del fattore di scala T, il membro sinistro dell'equazione (2) è $E^z_{[T]}$. L'esercizio richiede quindi di mettere in relazione $E^z_{[T]}$ con $E^{x+y}_{[T]}$. Poiché $x(t)$ e $y(t)$ sono reali,

$$\begin{aligned} E^z_{[T]} &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(x(t) + y(t)\big)^2\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(x^2(t) + y^2(t) + 2x(t)y(t)\big)\,dt \\ &= E^x_{[T]} + E^y_{[T]}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

dove l'integrale

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t)\,dt = 0,$$

poiché la funzione integranda è dispari essendo il prodotto della funzione pari $y(t)$ e della funzione, dispari per ipotesi, $x(t)$. Per il calcolo di $E^y_{[T]}$ si può utilizzare la formula di Parseval osservando che i coefficienti di Fourier non nulli di $y(t)$ sono $a_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ (convincetevene!) e dunque $E^y_{[T]} = T\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{T}{2}$. Il calcolo di $E^y_{[T]}$ è banale anche per via diretta,

$$E^y_{[T]} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right)\right) dt = \frac{T}{2}.$$

Applicando ora l'identità di Parseval ad entrambi i membri dell'equazione $E^z_{[T]} = E^x_{[T]} + E^y_{[T]}$, dimostrata in (3), otteniamo l'identità desiderata

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2\,.$$

10.8

Si consideri il segnale $x(t)$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

$$x(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

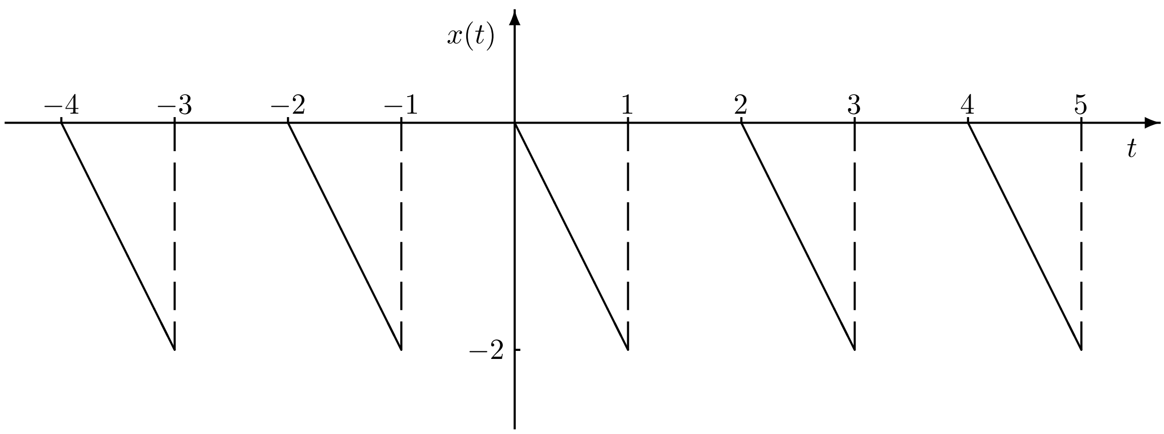
(a.) Tracciare il grafico di $x(t)$.

(b.) Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(c.) Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $y(t)$.

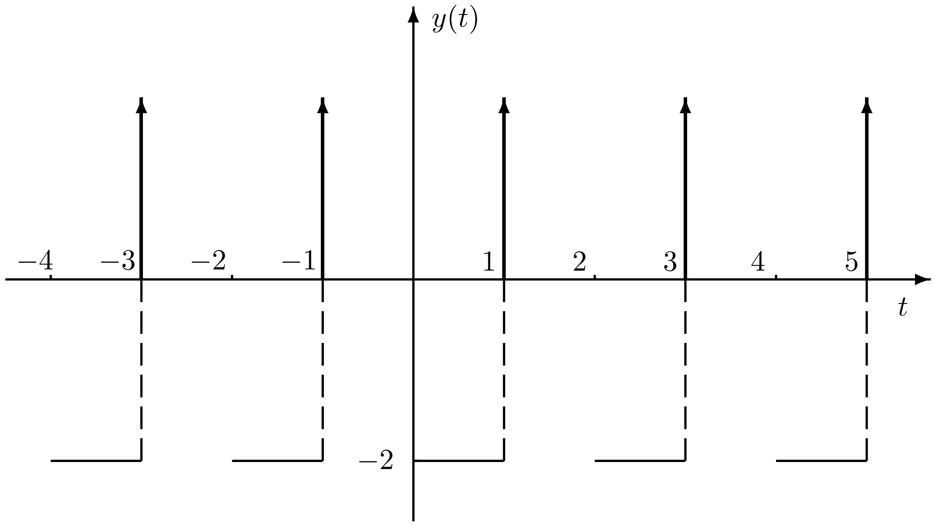
Soluzione

(a.)



(b.) Anche la derivata (generalizzata) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è un segnale periodico di periodo $T = 2$, rappresentabile come

$$y(t) = \mathrm{rep}_2\Big(-2\chi_{[0,1]}(t) + 2\,\delta(t-1)\Big)$$



(c.) Il segnale $y(t)$ ha periodo $T = 2$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = \pi$. Per il calcolo dei coefficienti di Fourier a_k svolgiamo il calcolo diretto. Per $k = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2)\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^2 2\delta(t-1)\,dt = -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

mentre, per $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2)e^{-jk\pi t}\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^2 2\delta(t-1)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= -\frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} + e^{-jk\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{jk\pi} + (-1)^k. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 1, & k \text{ pari, } k \neq 0, \\ -1 - \frac{2}{jk\pi}, & k \text{ dispari.} \end{cases}$$