SERIE DI FOURIER

La serie di Fourier è uno strumento matematico che permette di rappresentare, sotto ipotesi abbastanza larghe, i segnali periodici come somme (eventualmente infinite) di esponenziali immaginari puri e anche come somme di sinusoidi in forma canonica.

Perché è interessante?

Perché è sempre utile disporre di più rappresentazioni di un segnale

- Per esempio, sarà facile determinare la risposta di un LTI ad un ingresso periodico generico nota la sua serie di Fourier
- Inoltre è interessante osservare che la SdF è a tutti gli effetti un segnale T. discreto: quindi un insieme discreto (numerabile di coefficienti permette di descrivere completamente un segnale t. c.

Principio di base della S.d.F.

L'idea è quella di considerare i segnali periodici come elementi di uno spazio di Hilbert (spazio Euclideo normato a dimensione infinita
Si trova quindi una base ortonormale per lo spazio.
Infine ogni elemento è rappresentato tramite la base o.n.

Richiami sugli spazi di funzioni

Per prima cosa, osserviamo che un segnale t.c. periodico di periodo T può essere identificato con la sua restrizione ad un qualsiasi intervallo di ampiezza T, in quanto noto l'uno è noto l'altro e viceversa.

Cominciamo allora a considerare i segnali definiti tra $-T/2$ e $T/2$. Al momento opportuno faremo il collegamento con i segnali periodici.

Gli spazi di interesse sono:

a) $L^\infty(-T/2, T/2) = \{ x : (-T/2, T/2) \to \mathbb{C}$ tali che $\exists M_x \in \mathbb{R}^+$ e $\forall t \in (-T/2, T/2)$, $|x(t)| < M_x \}$

È uno spazio vettoriale normato

Inoltre $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|\}_{t \in (-T/2, T/2)}$ è una norma in tale spazio

b) $L^2(-T/2, T/2) = \{ x : (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \to \mathbb{C}$ tali che $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty \}$

In tale spazio possiamo definire il prodotto scalare:

Se $x, y \in L^2(-T/2, T/2)$, $\quad \langle x, y \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$

E la norma $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

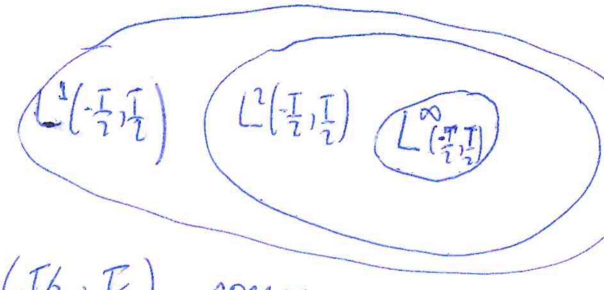
$L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ è uno spazio di Hilbert (euclideo, normato, di dim. infinita e completo)

c) $L^1(-T/2, T/2) = \{ x : (-T/2, T/2) \to \mathbb{C} \text{ tale che } \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\, dt < +\infty \}$

E' uno spazio vettoriale normato. Infatti

$\|x\|_1 = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\, dt$ è una norma per tale spazio

Relazione d'inclusione



1) Tutti i segnali limitati in $(-T/2, T/2)$ sono a energia finita in $(-T/2, T/2)$ $\iff$ $L^\infty(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \subset L^2(-T/2, T/2)$

2) Tutti i segnali a energia finita in $(-T/2, T/2)$ sono assolutamente integrabili in $(-T/2, T/2)$ $\iff$ $L^2(-T/2, T/2) \subset L^1(-T/2, T/2)$

Dim 1. $x \in L^\infty(-T/2, T/2) \Rightarrow \forall t \in (-T/2, T/2)\ |x(t)| < M_x$

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \leq \int_{-T/2}^{T/2} M_x^2\, dt = M_x^2 T < +\infty \Rightarrow x \in L^2(-T/2, T/2)$$

Dim. 2 Sia $x \in L^2(-T/2, T/2)$

Sia $I = \{ t \in (-T/2, T/2) : |x(t)| < 1 \}$

e sia J il complemento a I in $(-T/2, T/2)$

contro esempio: $|x|^{-1/2} \in L^1$ ma $\notin L^2$

Allora $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\, dt = \int_I |x(t)|\, dt + \int_J |x(t)|\, dt$

Mostriamo che i due integrali sono finiti. Questo implica $x \in L^1(-\frac{T}{2},$

Ma $\int_I |x(t)|\, dt \leq \int_I dt = \text{Misura}(I) \leq T$

e, siccome $\forall t \in J\ |x(t)| \geq 1 \Rightarrow \forall t \in J\ |x(t)| \leq |x(t)|^2$ e quindi

$$\int_J |x(t)|\, dt \leq \int_J |x(t)|^2 dt \leq \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \|x\|_2^2 < +\infty$$

Esponenziali in relazione armonica

Nel seguito, consideriamo un $T \in \mathbb{R}^+_0$ fissato.

T sarà il periodo delle funzioni periodiche che considereremo

Sia inoltre $f_0 = \frac{1}{T}$ la frequenza

e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$ la pulsazione

Consideriamo adesso, $\forall k \in \mathbb{Z}$ il segnale, definito su $\mathbb{R}$,

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi f_0 k t} = e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Se $k \neq 0$, allora tale segnale è periodico di periodo fondamentale $\frac{T}{|k|}$.

Allora $\forall k \in \mathbb{Z}$, φ_k è periodico di periodo T: anche per $k=0$ perché $\varphi_0 = 1$

Inoltre $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_k(t)| = 1 \Rightarrow \varphi_k \in L^\infty(\mathbb{R})$

Osserviamo anche che $\varphi_k = \varphi_1{}^k$ (φ_1 elevato a k)

Se consideriamo la restrizione di $\varphi_k(t)$ a $(-T/2, T/2)$,

si tratta ovviamente di un segnale in $L^\infty(-T/2, T/2)$ e quindi anche $L^2(-T/2, T/2)$ e $L^1(-T/2, T/2)$

Nel seguito useremo la stessa notazione φ_k sia per indicare il segnale definito su $\mathbb{R}$ sia la sua restrizione a $(-T/2, T/2)$

Dal contesto si chiarirà a quale dei due segnali facciamo riferimento. Se non detto esplicitamente altrimenti, si farà riferimento ad entrambi i casi.

L'insieme $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è detto insieme degli <u>esponenziali in relazione armonica</u> (su $\mathbb{R}$ o su $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$)

Gli esp. in rel. arm. su $\mathbb{R}$ sono autofunzioni degli LTI ma hanno anche un'altra proprietà importantissima: la restrizione a $(-T/2, T/2)$ forma una base di $L^2(-T/2, T/2)$

Non dimostreremo questo risultato, ma almeno mostriamo che gli elementi di $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono ortogonali tra loro in $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

<u>LEMMA</u> In $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, $\forall k,h\in\mathbb{Z}$, $\langle\varphi_h,\varphi_k\rangle = T\,\delta(h-k)$

delta di Kronecker

cioè $\langle\varphi_h,\varphi_k\rangle = \begin{cases} T & \text{se } h=k \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

⚠ Stiamo considerando lo spazio euclideo $L^2(-T/2,T/2)$ con la corrispondente def. di pr. scalare

<u>DIM.</u> $\langle\varphi_h,\varphi_k\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_h(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt = \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} e^{jh\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t}\,dt$

$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(h-k)\omega_0 t}\,dt$ se $h=k$, questo integrale dà T

altrimenti $(h\neq k)$ abbiamo $\langle\varphi_h,\varphi_k\rangle = \left[\frac{e^{j(h-k)\omega_0 t}}{j(h-k)\omega_0}\right]_{-T/2}^{T/2}$

$= \frac{1}{j(h-k)\omega_0}\left(e^{j(h-k)\omega_0\frac{T}{2}} - e^{-j(h-k)\omega_0\frac{T}{2}}\right) = \frac{2}{(h-k)\omega_0}\sin\left((h-k)\omega_0\frac{T}{2}\right)$

Ma $(h-k)\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{2} = (h-k)\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} = (h-k)\,\pi \Rightarrow \langle\varphi_h,\varphi_k\rangle = 0 \quad \forall h\neq k$

Quindi l'insieme $\{\varphi_k\}$ è un insieme infinito di vettori ortogonali in $L^2(-T/2, T/2)$.

Si può dimostrare che effettivamente è una base:

Teorema di Riesz-Fischer

- Sia $x \in L^2(-T/2, T/2)$ con $T > 0$ e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Definiamo la successione bilatera:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

(formula di analisi)

- Sia poi, per $M \in \mathbb{Z}^+$, $x_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\omega_0 t}$

Allora x_M converge a x in norma, cioè

$$\| x - x_M \| \xrightarrow[M \to \infty]{} 0$$

SENZA DIMOSTRAZIONE

Discussione: Il Teorema R.-F. definisce la serie di Fourier per i segnali periodici a energia finita.

La "formula di analisi" permette di calcolare il segnale $a: k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ che è un segnale t.d.

Si scrive anche $\boxed{x \Rightarrow a_k}$

Mostriamo che $\forall k \in \mathbb{Z}$, a_k esiste finito.

$$|a_k| = \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\, dt < +\infty$$

perché $x \in L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \Rightarrow x \in L^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

In effetti gli a_k sono i coeff. della proiezione ortogonale di x su $\{\varphi_k\}$:

I coeff si calcolano come $\boxed{\dfrac{\langle x, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}}$

Ma $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = T$

e $$\langle x, \varphi_k \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, \overline{\varphi_k(t)}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\omega_0 k t}\, dt$$

quindi effettivamente $a_k = \dfrac{\langle x, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$

Allora consideriamo il limite se $M \to +\infty$ di x_M:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$\boxed{\text{(formula di sintesi)}}$

Tale formula è detta serie di Fourier del segnale x o anche

formula di sintesi

Il Teorema R.-F. ci dice che la SdF converge a x "quasi-ovunque"

Infatti l'errore ha norma nulla. Però questo non assicura la

Riassumendo: se $x \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$,

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$ Formula di analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$ Formula di sintesi

dove l'uguale nella formula di sintesi è da intendersi "quasi ovunque" (cioè escluso al più un insieme di misura nulla)

Quindi $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è effettivamente una base per $L^2(-T/2, T/2)$ perché ogni suo segnale si scrive come combinazione lineare di elementi di $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (formula di sintesi)

Serie di Fourier per segnali periodici

Se x è periodico di periodo T e se $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$ allora possiamo calcolare i coeff. di Fourier con la formula di analisi.

Inoltre la formula di sintesi coincide con $x(t)$ se $t \in (-T/2, T/2)$, mentre tale formula ha senso anche per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infine la formula di sintesi produce un segnale periodico di periodo T, perché tutti i φ_k, visti su $\mathbb{R}$, sono periodici di periodo T

Quindi in conclusione, le formule di analisi e sintesi hanno senso e valgono come tali per qualsiasi segnale periodico con energia finita su di un periodo.

La convergenza però non è puntuale, ma "quasi ovunque"

Identità di Parseval

Se $x \in L^2(-T/2, T/2)$ e $X \Rightarrow a_k$ (cioè $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} d$

allora $a \in l^2(\mathbb{Z})$ e

$$\| a \|_2^2 = \frac{1}{T} \| x \|_2^2 \qquad \text{Identità di Parseval}$$

SENZA DIM.

Osservazione. L'identità di Parseval si può scrivere anche:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Teorema di Dirichlet

È l'estensione del Teorema di R.-F. al caso L^1

Se 1) $x \in L^1(-T/2, T/2)$

2) In $(-T/2, T/2)$ x ha un numero finito di max e min

3) Nell'intervallo $(-T/2, T/2)$ il segnale x è continuo tranne per un numero finito di punti dove ci sono discontinuità di salto (cioè no asintoti)

Allora Possiamo definire i coeff. di Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Si ha che $|a_k| < +\infty$ e inoltre la serie di Fourier converge puntualmente:

$$\forall t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{x(t^+) - x(t^-)}{2}$$

$x(t)$ dove è continuo

"media" nei punti di salto

Senza dimostrazione

Estensione ai segnali periodici

Il Teorema di Dirichlet si estende ai segnali periodici ass. integrabili su di un periodo.
L'estensione è formalmente identica al caso R.-F.
Quindi per tali segnali si può usare la formula di sintesi in senso puntuale

Esempio / Esercizio

Serie di Fourier dell'onda quadra

Sia $$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{rect}\left(\frac{t - kT}{T/2} \right)$$

a · Tracciarne il grafico e calcolare il v.m. in un periodo

b · Verificare che $x \in L^1 \cap L^2 \, (-T/2, T/2)$

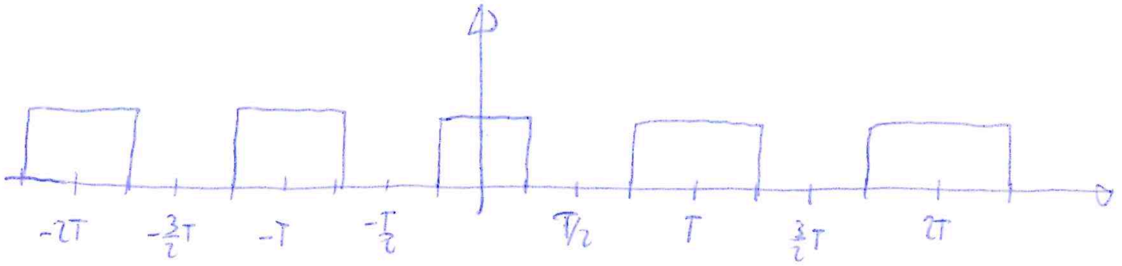
c · Calcolarne i coefficienti di Fourier

d · Discutere il tipo di convergenza

Soluzione

a) si tratta del segnale $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right)$ replicato con periodo T (infatti al posto di t c'è $t-kT$ e poi c'è la somma su k)

Tracciamo prima un rect di durata $T/2$ centrato in zero; poi facciamo repliche centrate in T, $-T$, $2T$, $-2T$ ecc



Onda quadra "attiva al 50% del tempo" $\Rightarrow$ $m_x\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] = 1/2$

b) È immediato, perchè x è limitato quindi appartiene a L^∞, L^1 e L^2.
Quindi la SdF converge q.o. (L^2) ma anche puntualmente in tutti i punti escluse le discontinuità, dove converge a $\frac{1}{2}$

c) Per calcolare i coeff. di Fourier basta usare la formula di analisi

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

Osserviamo che $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Inoltre, in $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ $x(t)$ si scrive semplicemente come $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right)$ cioè la funzione indicatrice di $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \, dt$$

Se $k=0$, $\quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} dt = \frac{1}{T} \frac{T}{2} = 1/2$

Se $k \neq 0$, $\quad a_k = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{-jk\frac{2\pi}{T}} \right]_{t=-\frac{T}{4}}^{t=\frac{T}{4}} = \frac{1}{k\pi} \frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j}$

$$= \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ vale $\emptyset$ se k è pari, ± 1 se k è dispari.

$k = 2m+1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(m\pi) = (-1)^m$

In conclusione

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k \text{ pari diverso da zero} \\ \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{per } k=2m+1 \end{cases}$$

Quindi la serie è $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\frac{2\pi}{T}t}$

d) La convergenza è sia "di tipo L^2" cioè quasi ovunque sia di tipo puntuale, perché x è derivabile a tratti.
Nei punti di salto, cioè $t=\frac{T}{4}+k\frac{T}{2}$, la serie converge al valor medio tra limite sx e dx, cioè a 1/2

Proprietà dei coefficienti di Fourier

Nel seguito, ipotizziamo che il segnale x soddisfa le ipotesi di Riesz-Fisher o di Dirichlet
Scriveremo $x \Rightarrow a_k$ per indicare che gli a_k sono i coeff. di Fourier di x, cioè $a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$
Scriveremo $R(x)$ per indicare il segnale ribaltato: $R(x)(t)=x(-t)$
analogamente $R(a)$ è il ribaltato dei coeff.: $R(a)(k)=a_{-k}$

Per la maggior parte delle proprietà seguenti la dimostrazione si ottiene applicando la definizione di c.d.F (coeff. di Fourier)

1) Coniugato: $\bar{x} \Rightarrow \overline{R(a)}$

Cioè i c.d.F. di $\bar{x}$ si ottengono ribaltando e coniugando quelli di x

Allora, se x è reale, $x = \bar{x} \Rightarrow a = \overline{R(a)}$ (simmetria hermitiana)

2) $R(x) \Rightarrow R(a)$

Cioè se ribalto x, anche i c.d.F. risultano ribaltati

3) $S_\alpha(x) \Rightarrow a$

Cioè, cambiando scala i c.d.F. non cambiano

Attenzione però cambia (ovviamente) la formula di sintesi

$$S_\alpha(x)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_\alpha t}$$

$\omega_\alpha = \alpha \frac{2\pi}{T}$, perchè il periodo di $S_\alpha(x)$ è $\left(-\frac{T}{2\alpha}, \frac{T}{2\alpha}\right)$

4) Traslazione

$U_\beta[x] \Rightarrow e^{-jk\omega_0\beta} a_k$

Infatti

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t-\beta) e^{-jk\omega_0 t} dt \overset{\substack{s = t-\beta \\ t = s+\beta}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2-\beta}^{T/2-\beta} x(s) e^{-jk\omega_0 s} e^{jk\omega_0\beta} ds$$

$$= \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(s) e^{-jk\omega_0 s} ds\right) \cdot e^{jk\omega_0\beta} = a_k \cdot e^{-jk\omega_0\beta} \quad \text{CVD}$$

per periodicità, possiamo cambiare l'intervallo d'integrazione

5) Modulazione $\quad e^{jM\omega_0 t} \cdot x(t) \Rightarrow a_M(a)$

Cioè i coeff. b_k di $e^{jM\omega_0 t} x(t)$ sono $\quad b_k = a_{k-M}$

6) Derivazione (se x è derivabile)

$$x' \Rightarrow jk\omega_0 a_k$$

7) Simmetrie

x	$\Rightarrow$ a
reale	hermitiano
imm.	anti hermitiano
pari	pari
dispari	dispari
hermitiano	reale
anti herm.	immag
reale pari	reale pari

8) Linearità: $\quad \alpha x_1 + \beta x_2 \Rightarrow \alpha a_{1,k} + \beta a_{2,k}$

9) Valore in $\emptyset$ In caso di convergenza puntuale,

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$$

10) Valor medio

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{j\cdot 0\omega_0 t}\, dt = m_{(-T/2,T/2)}[x]$$

Forma Trigonometrica della Serie di Fourier

Usando le formule di Eulero, scriviamo la SdF in forma Trigonometrica

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\left[\cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)\right] + a_{-k}\left[\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)\right]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + a_{-k})\cos k\omega_0 t + j(a_k - a_{-k})\sin(k\omega_0 t)$$

$$= \boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(k\omega_0 t) + \beta_k \sin(k\omega_0 t)}$$

SdF in forma trigonometrica

dove $\alpha_k = a_k + a_{-k}$ e $\beta_k = j(a_k - a_{-k})$

Caso di segnale reale

Se x è reale, $a_{-k} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \overline{\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$

$$= \overline{a_k}$$

Sempre per x reale,

Allora $\alpha_k = a_k + a_{-k} = a_k + \overline{a_k} = 2\,\mathrm{Re}(a_k) = 2|a_k|\cdot\cos\angle a_k$

e $\beta_k = j(a_k - a_{-k}) = j(a_k - \overline{a_k}) = j\cdot(2j\,\mathrm{Im}(a_k)) = -2\,\mathrm{Im}(a_k) = -2|a_k|\sin\angle a_k$

Allora la SdF in forma Trigonometrica diventa

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |a_k|\cos(\angle a_k)\cdot\cos(k\omega_0 t) +$$

$$- |a_k|\sin(\angle a_k)\sin(k\omega_0 t)$$

$$\boxed{= a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k)}$$

Questa è la SdF in forma Trigonometrica per segnali reali

Dall'espressione della SdF in forma Trigonometrica segue che gli spazi generati dai $\{\varphi_k\}_k$ e da $\{1, \cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t\}_k$ coincidono

Esercizio Scrivere la SdF dell'onda quadra in forma Trigonometrica

Sappiamo che per l'onda quadra

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k = 2m \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{se } k = 2m+1 \end{cases}$$

Allora

$$|a_k| = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=2m \\ \dfrac{1}{(2m+1)\pi} & \text{se } k=2m+1 \end{cases}$$

non c'è bisogno di usare $|\cdot|$ perché k (e quindi $2m+1$) sono strett. positivi

$\angle a_k = 0$ se $m = \frac{k-1}{2}$ pari; mentre $\angle a_k = \pi$ se $m = \frac{k-1}{2}$ è dispari / se m dispari

$\Rightarrow \cos(k\omega_0 t + \angle a_k) = \cos((2m+1)\omega_0 t)$ o $\cos((2m+1)\omega_0 t + \pi) = -\cos(2m+1)\omega_0 t$

Allora l'onda quadra è data da:

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)\omega_0 t}$$

→ demo Mathematica

Fenomeno di Gibbs. Il punto di errore max si avvicina a 1/2, ma la sua ampiezza tende a un valore non nullo

Ciò nonostante per tutti i punti l'errore [illegible]

Serie di Fourier del Treno d'impulsi

Si consideri il segnale $p(t) = rep_T[\delta](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

detto Treno d'impulsi (impulsi centrati su kT $\forall k \in \mathbb{Z}$)

Osserviamo che, dato un segnale x, se $x * p$ converge è posto:

$$x * p = x * \sum_k \mathcal{U}_{kT}[\delta] = \sum_k x * \mathcal{U}_{kT}[\delta]$$

$$= \sum_k \mathcal{U}_{kT}[x] = rep_T[x]$$

Vogliamo mostrare che anche p possiede uno sviluppo in SdF:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} \qquad (\text{cioè } a_k = 1)$$

Ma che senso ha questa identità?

Non puntuale, perché la serie a dx non è convergente

Come al solito, il senso è legato alla proprietà del campionamento

Partiamo dal calcolo della SdF di p

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, rect(t/T)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T} rect\left(\frac{0}{T}\right) e^{-jk\omega_0 \cdot 0} = \frac{1}{T}$$

Ora mostriamo che se $\left\{\begin{array}{l} v \text{ continua e} \\ v \in L^2(-T/2, T/2) \end{array}\right\}$ vale il campionamento:

$\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, v(t)\, dt = v(0)$ deve valere anche usando la SdF di $p(t)$

$$\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, v(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \delta(t-kT)\, v(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) v(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) v(t)\, dt = \mathrm{rect}\left(\frac{0}{T}\right) v(0) = v(0)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \sum_k e^{jk\omega_0 t}\, v(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)\, e^{jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{-k} = v(0)$$

per la propr. del valore in zero, che possiamo applicare perché v soddisfa le hp del Teorema di Dirichlet

Quindi usare $p(t)$ o usare $\sum_k \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$ è equivalente. In questo senso $p(t) = \sum_k \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$

Convoluzione periodica

Siano v, w periodici di periodo T e con energia finita in un periodo, cioè $v, w \in L^2(-T/2, T/2)$ (sarebbe più preciso dire che la restrizione di v e w è in $L^2(-T/2, T/2)$)

Introduciamo la convoluzione in $(-T/2, T/2)$ (o conv. periodica)

La convoluzione in $(-T/2, T/2)$ di v e w è un segnale z indicato come $z = v *_T w$ e tale che,

$$\forall t \in (-T/2, T/2) \qquad z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau$$

z è ovviamente periodico di periodo T:

$$z(t+T) = \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau)\, w(t+T-\tau)\, d\tau \underset{\text{per la periodicità di } w}{=} \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau) w(t-\tau) = z(t)$$

Relazione Tra convoluzione e SdF

Siano $x, y \in L^2(-T/2, T/2)$, siano $x \Rightarrow a_k$, $y \Rightarrow b_k$

Sia $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

Allora 1) $z \in L^1(-T/2, T/2)$

2) I suoi c.d.F esistono

3) Detti c_k tali CdF si ha $c = a * b$ cioè $c_k = \sum_m a_m b_{k-m}$

DIM 1) Applichiamo la dis. di Cauchy-Schwarz a $|x|, |y|$ che appartengono anch'essi a $L^2(-T/2, T/2)$

$$|\langle |x|, |y| \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

$$\overset{\|}{\left| \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\,|y(t)|\,dt \right|} = \left| \int_{-T/2}^{T/2} |z(t)|\,dt \right| = \int_{-T/2}^{T/2} |z(t)|\,dt \Rightarrow z \in L^1\left(-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}\right)$$

2) e 3) Senza DIM

Ora mostriamo che la convoluzione periodica corrisponde ad un prodotto dei coefficienti di Fourier.
Più precisamente, siano $x, y \in L^1(-T/2, T/2)$ e tali da soddisfare le hp del Teorema di Dirichlet.
Siano a_k e b_k i CdF di x e y rispettivamente.
Allora, detto $z = x *_T y$ e $z \Rightarrow c_k$, si ha

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = T \cdot a_k b_k$

o, in altre parole, $z(t) = T \sum_k a_k b_k e^{jk\omega_0 t}$

DIM. Partendo dalla def. di convoluzione periodica, arriviamo a scrivere z come serie di Fourier.

Innanzitutto si può mostrare che nelle ipotesi date, z è continua

Poi si ha

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{jn\omega_0 (t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k b_n e^{jn\omega_0 t} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k(\tau)\, \overline{\varphi}_n(\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k b_n e^{jn\omega_0 t}\, T\, \delta(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T a_k b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{CVD}$$

Sistema LTI in regime periodico

Già sappiamo che un LTI stabile risponde ad un exp imm. puro con lo stesso exp. moltiplicato per $\hat{h}(\omega)$

Se il sistema è reale, risponde ad una sinusoide con una sinusoide alla stessa frequenza

Se l'ingresso è periodico sappiamo già che l'uscita sarà periodica dello stesso periodo.

Adesso possiamo dire qualcosa in più:

Sia x periodico di periodo T e siano a_k i suoi CdF

Sia L un LTI BIBO-stabile di risposta impulsiva h

Sia $y = L(x)$ (già sappiamo che y è periodico)

In queste ipotesi si ha:

a) Se $x \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ allora y è continuo in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

b) Se x soddisfa le hp di Dirichlet allora i coeff di F. di y sono b_k:

$$\forall k \quad b_k = H\left(k\frac{2\pi}{T}\right) a_k = H(k\omega_0)\, a_k$$

Inoltre la convergenza della SdF è puntuale

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

c) Se $x \in L^2(-T/2, T/2)$, $y \in L^2(-T/2, T/2)$ e

$$E_{(-T/2, T/2)}[y] = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(jk\omega_0)|^2 |a_k|^2$$

$$E_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[y, x] = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_0) |a_k|^2$$

DIM

a) È possibile dimostrare che, se $x, h \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ allora $x * h \in C^{(0)}(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

SENZA DIM.

b) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$L[x](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k L[e^{jk\omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad \text{CVD}$$

c) Senza DIM.

Filtri ideali

Un segnale periodico reale può scriversi come

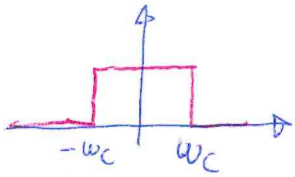
$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k)$$

Se x è in ingresso ad un LTI stabile reale, l'uscita è $y = L[x]$ e

$$y(t) = H(0) a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |H(k\omega_0)| |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k + \angle H(k\omega_0))$$

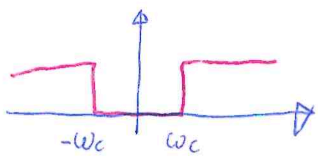
Allora l'andamento di $|H(\omega)|$ permette di capire come il sistema "tratta" le diverse frequenze

Si definisce filtro passa basso ideale un sistema con RF $H_{LP}(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

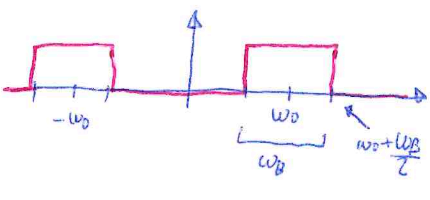


ω_c è detta pulsazione di taglio ("c" sta per "cut")

Filtro passa alto ideale: $H_{HP}(\omega) = 1 - rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

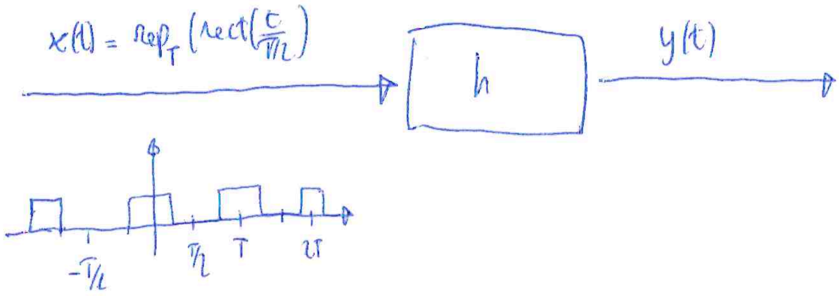


Filtro passabanda ideale: $H_{BP}(\omega) = rect\left(\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega_B}\right)$

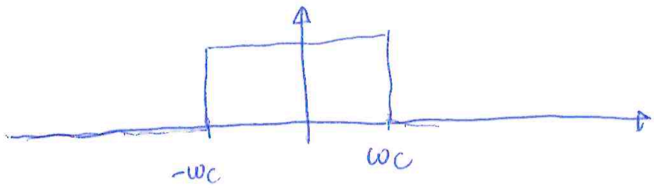


Filtro eliminabanda ideale: $H_{RB}(\omega) = 1 - rect\left(\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega_B}\right)$

Interpretazione grafica del filtraggio



Se $H(\omega) = H_{LP}(\omega)$



si noti che $\angle H(\omega) = 0$

Dopo il filtraggio resteranno solo le componenti corrispondenti a $|k\omega_0| < \omega_c$ cioè solo $|k| < \frac{\omega_c}{\omega_0}$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k\geq 1 \\ k < \frac{\omega_c}{\omega_0}}} |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ 2m+1 < \frac{\omega_c}{\omega_0}}} \frac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cos((2m+1)\omega_0 t)$$