Esercitazione

1.1) Calcolare la convoluzione tra due gradini unitari

1.2) Mostrare per induzione che il risultato di n convoluzioni tra gradini unitari è $V_n(t) = \frac{t^n}{n!} u(t)$

Svolgimento

1.1) Usando la notazione introdotta, dobbiamo calcolare

$$V_1(t) = u * u\ (t)$$

Se risulta $V_1(t) = t\,u(t)$, avremo anche dimostrato la base dell'induzione per la domanda 1.2.

Calcolo diretto di $V_1(t)$

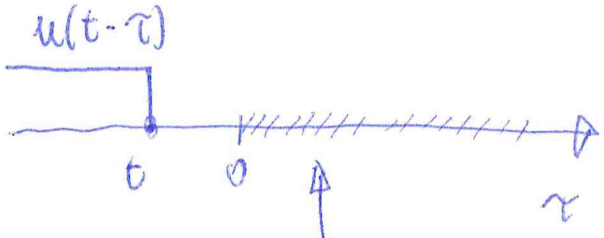
$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{+\infty} u(t-\tau)\, d\tau$$

Abbiamo usato il trucco della funzione indicatrice: $u(\tau)$ è indicatrice di $\tau \in (0, +\infty)$ quindi possiamo integrare solo su tale intervallo.

Perché allora non possiamo subito usare il trucco anche per la seconda u? avremmo semplicemente $\tau \in (-\infty, t)$. RISPOSTA perché dobbiamo prima assicurarci che esistono τ che soddisfano entrambe le condizioni (cioè $\tau \in (-\infty, t) \cap (0, +\infty)$) ciò è possibile se e solo se $t > 0$

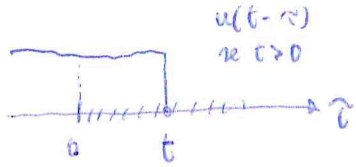
$\boxed{\text{se } t<0,\ u(t-\tau) \text{ è nullo } \forall \tau>0}$

Graficamente, se $t<0$, il secondo gradino (quello ribaltato, $u(t-\tau)$) non "entra" nell'intervallo d'integrazione $(0,+\infty)$



Intervallo d'integrazione $(0,+\infty)$

In conclusione $$V_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \int_0^t dt = t & \text{se } t>0 \end{cases}$$



Quindi $V_1(t) = t \cdot u(t)$

1.2 Abbiamo mostrato la base dell'induzione. Adesso

Mostriamo che, se $V_{n-1}(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$,

allora $V_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}u(t)$

$$V_n(t) = V_{n-1} * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} u(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} u(t-\tau)\,d\tau$$

Come sopra, se $t<0$, l'integrando è nullo $\forall \tau>0$

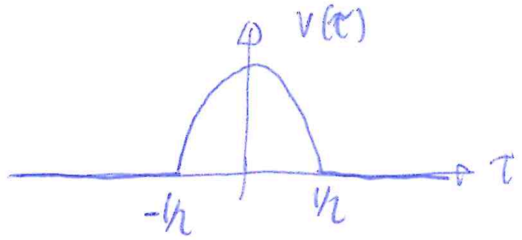
quindi $V_n(t) = 0 \quad \forall t<0$.

Se $t>0$ si ha:

$$V_n(t) = \int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau = \left[\frac{\tau^n}{n!}\right]_0^t = \frac{t^n}{n!}$$

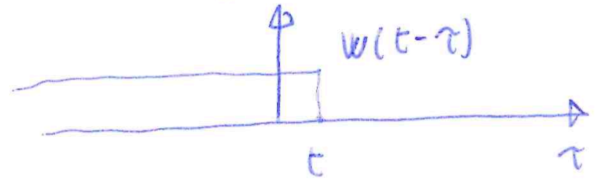
In sintesi, $V_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}u(t)$

2) Calcolare la convoluzione tra $v(t) = \cos(\pi t) \cdot rect(t)$ e $w(t) = u(t)$



Svolgimento:

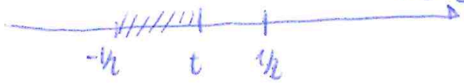
$$v * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\pi\tau)\, rect(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$



Trucco della funzione indicatrice

$rect(\tau)$: indicatrice di $\tau \in (-1/2, 1/2)$

Intersezione tra $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\infty, t)$ nel caso $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



$$v * w(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi\tau \;\; u(t-\tau)\, d\tau$$

Ora dobbiamo capire quando l'intersezione tra il supporto di $w(t-\tau)$ (che è $(-\infty, t)$) e l'intervallo d'integrazione (che è $(-1/2, 1/2)$) è non vuoto.

È ovvio che $\forall t < -1/2$, $u(t-\tau) = 0 \;\; \forall \tau \in (-1/2, 1/2) \Rightarrow v*w(t) =$

Se invece $t \in (-1/2, 1/2)$, l'intersezione è $(-\frac{1}{2}, t)$. Si ha:

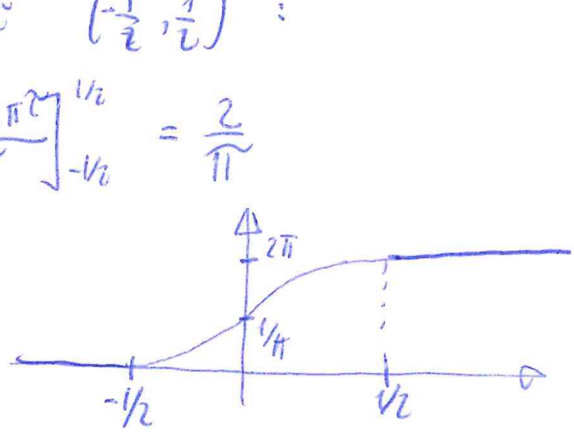
$$\forall t \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), \quad v * w(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} \cos \pi t \, d\tau = \left[\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi}\right]_{-1/2}^{t} = \frac{\sin \pi t + 1}{\pi}$$

Se infine $t > 1/2$, l'intersezione è $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\forall t > \tfrac{1}{2}, \quad v * w(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi\tau \, d\tau = \left[\frac{\sin \pi\tau}{\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{\pi}$$

Quindi

$$v * w(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < -1/2 \\ \frac{1 + \sin \pi t}{\pi} & \forall t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 2/\pi & \forall t > 1/2 \end{cases}$$



4

3) Calcolare la convoluzione tra $v(t) = e^{-at}u(t)$ e $w(t) = e^{-bt}u(t)$
con $a \geq 0$, $b \geq 0$, $b \neq a$

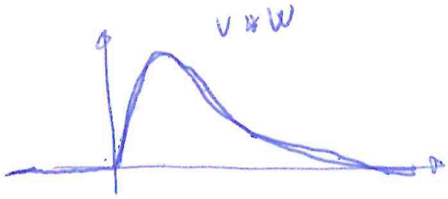
$$v * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau} u(\tau)\, e^{-b(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{-bt} \int_{0}^{+\infty} e^{(b-a)\tau} u(t-\tau)\, d\tau =$$

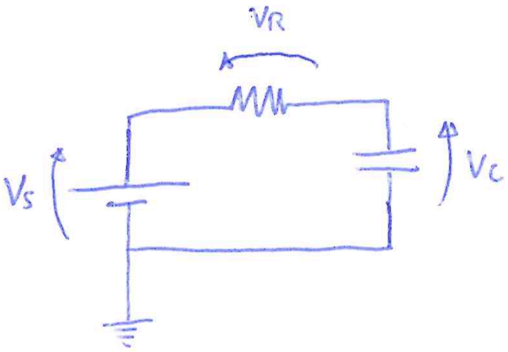
$$= \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-bt} \int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau = e^{-bt} \left[\dfrac{e^{(b-a)\tau}}{b-a} \right]_0^t & t>0 \end{cases}$$

$$= e^{-bt} \frac{e^{bt} \cdot e^{-at} - 1}{b-a} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

$$v * w(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} u(t)$$



Studio di un circuito RC



Vediamo come gli strumenti matematici usati finora ci permettono di studiare facilmente sistemi fisici

Cominciamo da un circuito RC, in cui la tensione del generatore (ideale) è considerata come segnale d'ingresso mentre la tensione ai capi del condensatore è considerata come uscita.

Per prima cosa, otteniamo l'equazione differenziale che regge il circuito.

Ricordiamo che: $V_S = V_R + V_C$ (Kirchhoff)

$V_R = Ri$

$i = C\dfrac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_R = RC\,V_C'$

Quindi $\boxed{V_S = RC\,V_C' + V_C}$

In termini ingresso/uscita, usiamo la notazione:

$x = V_S \qquad y = V_C \qquad$ e $\qquad \alpha = \dfrac{1}{RC} \qquad (\tau = RC)$

Moltiplicando ambo i membri dell'eq. diff. per α si ottiene

$$\boxed{y' + \alpha y = \alpha x} \quad (1)$$

Questa equazione "sembra" determinare un sistema.
In realtà, fissato x, esistono molti segnali y che soddisfano l'equazione.

Proviamolo. Sia y_p un segnale che soddisfa l'equazione (1). Allora $y_p' + \alpha y_p = \alpha x$ (ricordiamo, x è fissato)

Sia adesso $y_0 = k e^{-\alpha t}$, con $k \in \mathbb{R}$ (matematicamente, potrebbe essere $k \in \mathbb{C}$)

Esistono infiniti segnali di tipo y_0, uno per ogni k

Mostriamo che, ognuno degli infiniti segnali $\tilde{y} = y_p + y_0$ è una soluzione della (1). Cioè mostriamo che $\tilde{y}' + \alpha\tilde{y} = \alpha x$

Infatti $\tilde{y}' + \alpha\tilde{y} = y_p' + y_0' + \alpha y_p + \alpha y_0 = (y_p' + \alpha y_p) + (y_0' + \alpha y_0)$

Ma $y_p' + \alpha y_p = \alpha x$ per ipotesi mentre

$y_0' + \alpha y_0 = -\alpha k e^{-\alpha t} + \alpha k e^{-\alpha t} = 0$

Quindi $\tilde{y}' + \alpha\tilde{y} = \alpha x$ C.V.D.

Allora la sola e.d. (1) non basta a definire un sistema, perché possono esserci infinite uscite associate allo stesso ingresso x
Ma questo potevamo aspettarcelo, perché la sola eq(1) non definisce le <u>condizioni iniziali del sistema</u>

Lo studio di un problema alle condizioni iniziali è rimandato alle prossime lezioni. Per ora osserviamo che, si può dimostrare che ~~...~~ il legame tra ingresso e uscita è sotto opportune precisazioni, di tipo LTI (essenzialmente, che "il condensatore sia scarico all'inizio")

In tal caso, il legame tra x e y diventa univoco e LTI. Quindi basterebbe calcolare la risposta impulsiva, ma dalla (1) non è facile.

È molto più facile calcolare la risposta in frequenza

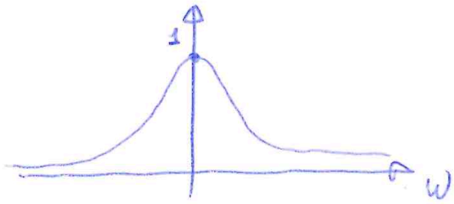
Infatti sappiamo che, se $x(t)=e^{j\omega t}$, allora $y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$

da cui $y'(t) = j\omega H(\omega) e^{j\omega t}$

Sostituendo nella (1) si ha: $j\omega H(\omega) e^{j\omega t} + \alpha H(\omega) e^{j\omega t} = \alpha e^{j\omega t}$

Siccome $e^{j\omega t} \neq 0 \; \forall t$, abbiamo $\boxed{H(\omega) = \dfrac{\alpha}{\alpha + j\omega}}$

Ma già abbiamo visto che tale R.F. corrisponde ad una R.I. $h(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t} u(t)$



Inoltre $|H(\omega)|^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$

È un sistema passa-basso

con $H(0) = 1$, $|H(\omega)| \xrightarrow[\omega\to\pm\infty]{} 0$ e $|H(\omega)|^2\Big|_{\omega=\alpha} = \frac{1}{2}$

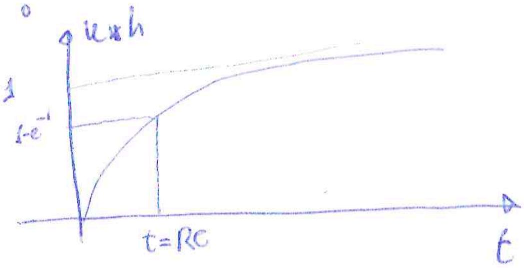
Quindi α è anche la pulsazione "a 3dB":

Se $x = e^{j\alpha t}$, $P_y = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |H(\alpha)|^2 \, |e^{j\alpha t}|^2 dt = \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{P_x}{2}$

$\Rightarrow 10 \log_{10} \frac{P_y}{P_x} = -3dB$

Osserviamo anche che la risposta ad un ingresso a gradino è

$$\forall t>0, \quad y(t) = u * h\,(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} a e^{-at}\,d\tau = 1 - e^{-at}$$



"Risposta indiciale"

la "costante di tempo" $T = RC = \frac{1}{a}$

indica il tempo necessario per far salire la risposta al gradino al ≈ 60% del suo valore asintotico

Infatti $y(T) = 1 - e^{-aT} = 1 - e^{-a/a} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.6$

Possiamo calcolare l'uscita corrispondente ad ogni tipo d'ingresso con la convoluzione; e nel caso di ingresso esp. imm. puro o sinusoidale il calcolo di y è immediato

Osserviamo che, per $a \to 0$ cioè $T = RC \to \infty$, la banda a 3dB $\to 0$ cioè il filtro è sempre più "stretto" intorno a zero, ma anche sempre più "lento"

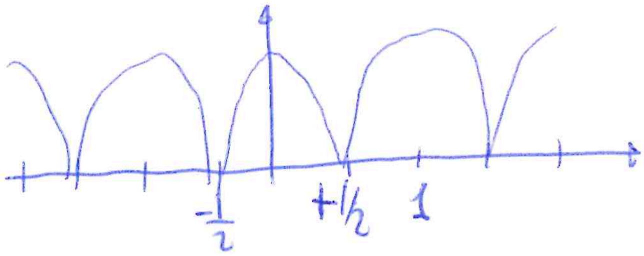
(Tempo di risalita della risp. indiciale sempre maggiore

Ex. esame febbraio 2023

Sia $x(t) = |\cos \pi t|$

1) Tracciare il grafico
2) Calcolare la potenza media
3) Calcolare i coeff. della SdF
4) Calcolare la puls. ω_c di un filtro LP ideale tale che $h * x$ = costante

1)



2) Il periodo fondamentale è $T = 1$

$$P_T[x] = \int_{-1/2}^{1/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{1/2} \cos^2 \pi t \, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1 + \cos 2\pi t}{2} dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} dt + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos 2\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}$$

3) $\boxed{\begin{matrix} T=1 \\ \omega_0 = 2\pi \end{matrix}}$

$$a_k = T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \cos \pi t \; e^{-jk2\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[e^{j\pi t} + e^{-j\pi t} \right] e^{-jk2\pi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi t (k - \frac{1}{2})}\, dt + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi t (k + \frac{1}{2})}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(k - \tfrac{1}{2}) + f(k + \tfrac{1}{2}) \right]$$

dove $f(\alpha) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi\alpha t}\, dt = \left[\frac{e^{-j2\pi\alpha t}}{-j2\pi\alpha} \right]_{-1/2}^{1/2}$

$$= \frac{e^{-j\pi\alpha} - e^{j\pi\alpha}}{(-2j) \cdot \pi\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \operatorname{sinc} \alpha$$

Allora $\quad a_k = \dfrac{\operatorname{sinc}(k - \frac{1}{2}) + \operatorname{sinc}(k - \frac{1}{2})}{2}$

4) Sappiamo che, se $y = h * x$, $\quad y(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0)\, a_k\, e^{jk\omega_0 t}$

Affinché $y(t)$ sia costante, deve essere $H(k\omega_0) = 0 \quad \forall k \neq 0$

quindi $H(\omega_0) = 0 \quad \omega_0 > \omega_c \iff \omega_c < \omega_0 \iff \boxed{\omega_c < 2\pi}$

Esercizio Consideriamo il sistema t.d. **A**

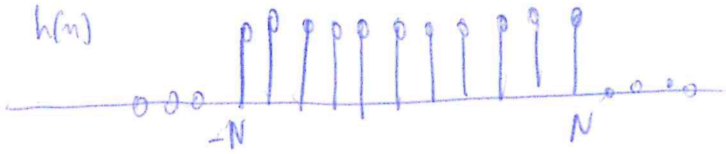
$$y(n) = m_{(n-N,\, n+N)}[x]$$

- Determinare risposta impulsiva e in frequenza e tracciare i grafici

Soluzione

$$y(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x(n-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\delta(n-k) = \begin{cases}\frac{1}{2N+1} & \text{se } |n|\le N\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



$$\hat h(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{-jk\omega} = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{-jk\omega} = \frac{1}{2N+1}\left(e^{jN\omega}+e^{j(N-1)\omega}+\dots e^{-j(N-1)\omega}+e^{-j\dots}\right.$$

$$= \frac{1}{2N+1}\left(e^{-jN\omega}\cdot\left[1+e^{j\omega}+e^{2j\omega}+\dots e^{j\omega(2N)}\right]\right)$$

Sia $z=e^{j\omega}$. Allora, se $z=1$ (cioè $\omega=0$), $\hat h(0)=\frac{2N+1}{2N+1}=1$

Altrimenti, per $\omega\neq 0$

$$(2N+1)\hat h(\omega) = z^{-N}\cdot\left[1+z+z^2+\dots+z^{2N}\right] = z^{-N}\cdot\frac{z^{2N+1}-1}{z-1}$$

$$= \cancel{z^{-N}}\cdot\frac{z^{\frac{2N+1}{2}}\left(z^{\frac{2N+1}{2}}-z^{-\frac{2N+1}{2}}\right)}{\cancel{z^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-1/2}\right)} = \frac{e^{j\frac{2N+1}{2}\omega}-e^{-j\frac{2N+1}{2}\omega}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}\cdot\frac{2j}{2j}$$

$$\hat h(\omega) = \frac{1}{2N+1}\,\frac{\sin\left[\frac{2N+1}{2}\omega\right]}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Tracciamo $|\hat{h}(\omega)|$ 	B

Osserviamo che $\hat{h}(\omega) \xrightarrow[\omega\to 0]{} \frac{2N+1}{2N+1} = 1$ quindi la funz. è continua

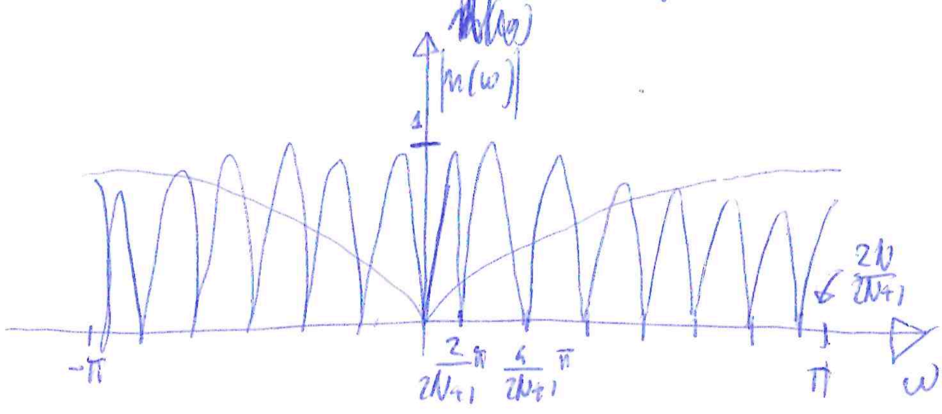
Tracciamo numeratore e denominatore (o meglio, il loro modulo)

$n(\omega) = \sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)$

Si annulla

per $\frac{2N+1}{2}\omega = k\pi$

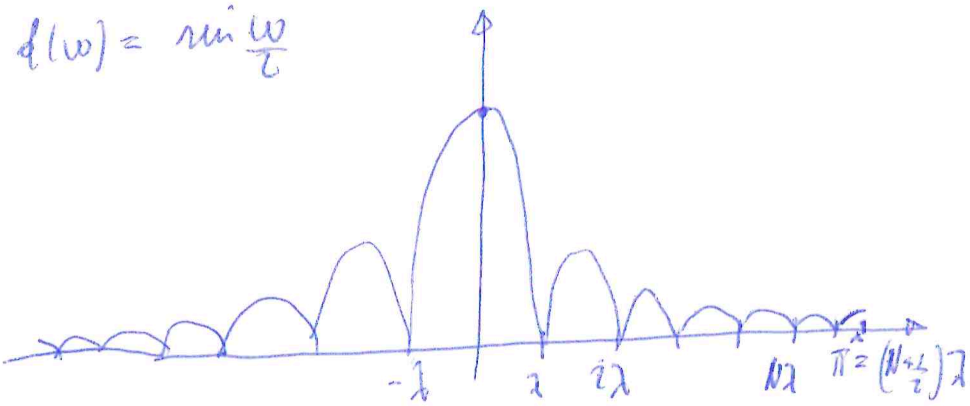
cioè $\omega = \frac{2k}{2N+1}\pi$



denominatore $d(\omega) = \sin\frac{\omega}{2}$

Il rapporto

$\lambda = \frac{2\pi}{2N+1}$



Sistema passabasso

1 lobo principale

2N-2 lobi secondari

2 mezzi lobi

Sistema passa basso

con 2N zeri