Considereremo quindi principalmente un periodo di $\hat{h}(\omega)$, 3

quello che va da $-\pi$ a π

Osserviamo che se x è esp. imm. puro, $L[x] = \hat{h}(\omega)\,x$

Quindi gli esp. imm. puri si possono vedere come autofunzioni

degli LTI

La "costante" (rispetto a n) di proporzionalità tra

x e $y = L[x]$ dipende dalla pulsazione ω

e quindi la consideriamo funzione di ω: $\hat{h}(\omega)$

È chiamata risposta in frequenza del sistema.

Siccome è somma di funzioni periodiche di periodo 2π,

è anch'essa periodica di periodo 2π e la considereremo

unicamente tra $-\pi$ e π

D'altra parte, anche l'esponenziale i.p. in forma canonica

ha pulsazione tra $-\pi$ e π

Se conosco $\hat{h}(\omega)$, posso facilmente trovare

l'uscita y corrispondente ad un ingresso imm. p.!

$$x = A e^{j(\omega n + \varphi)} = A e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega n}$$

$$y = L[x] \qquad y(n) = A e^{j\varphi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot e^{j\omega n}$$

$$y(n) = A \cdot |\hat{h}(\omega)| \cdot e^{j[\omega n + \varphi + \angle \hat{h}(\omega)]}$$

Cioè l'ampiezza è moltiplicata per $|\hat{h}(\omega)|$ e la fase è "traslata" di $\angle \hat{h}(\omega)$

Esempio Sia dato un LTI $y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k x(n-k)$ con a reale e $|a|<1$

1) Calcolare la R.I.

2) Calcolare la R.F. (risposta in frequenza)

3) Calcolare l'uscita quando l'ingresso è $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n}$
(non c'è bisogno di calcolare esplicitamente $\angle \hat{h}(\omega)$)

1) Usando il trucco della funzione indicatrice si ha:

- la somma è tra 0 e $+\infty$
- l'indicatrice è quindi $u(k)$ (la variabile è l'indice di somma)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) a^k x(n-k) \Rightarrow h(n) = u(n) a^n \quad \text{(per confronto)}$$

2) Per definizione, $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n}$

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^n$$

ora $|a e^{-j\omega}| = |a| < 1$
$\Rightarrow$ convergenza

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Tracciamo $|\hat{h}(\omega)|^2$ per capire l'andamento

$$|1 - a e^{-j\omega}|^2 = |1 - a\cos\omega - j a \sin\omega|^2 = (1 - a\cos\omega)^2 + (a \sin\omega)^2$$

$$= 1 + a^2 - 2a\cos\omega$$

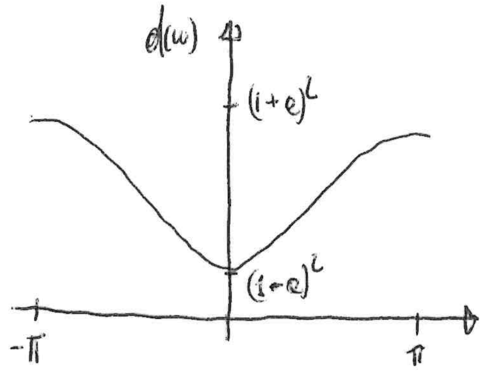
Tracciamo prima $\quad . \; -2a \cos \omega)$ e poi $|\hat{h}(\omega)|^2$

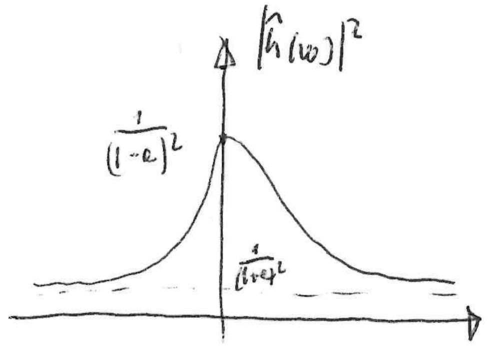
Osserviamo che $d(\omega)\big|_{\omega=0} = 1+a^2-2a = 1- \quad$ e

$$d(\omega)\big|_{\omega=\pi} = 1+a^2+2a = (1+a)^2$$

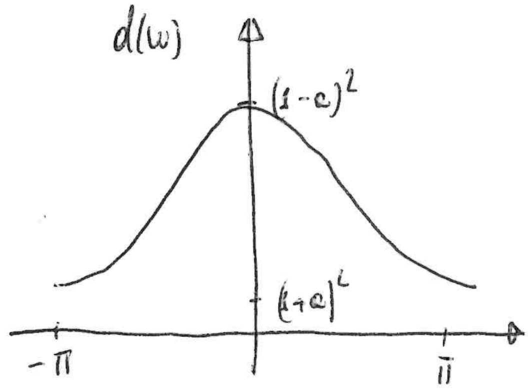
Quindi abbiamo un coseno che oscilla tra $(1-a)^2$ e $(1+a)^2$

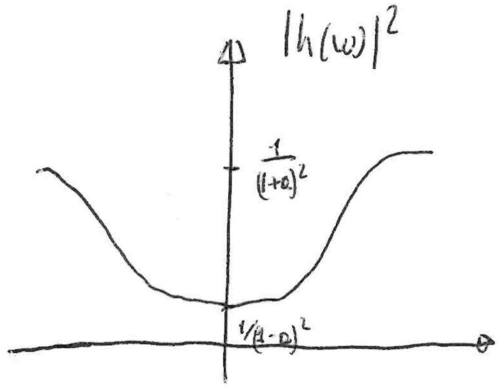
$a>0$





$a<0$





$a>0$: sistema "passa basso" : le basse frequenze (vicino a zero) sono amplificate : le alte sono attenuate (ω vicino a $\pm\pi$)

$a<0$: sistema "passa alto" : le alte freq. (vicino a $\pm\pi$) sono amplificate, le basse attenuate

3) Se $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n}$, $y(n) = \hat{h}(\omega)\cdot x(n)$, $\omega = \pi$

$$|\hat{h}(\omega)|^2 = \frac{1}{1+a^2-2a\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-a+a^2}$$

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{1-a+a^2}}\, e^{j\left(\frac{\pi}{3}n + \angle\hat{h}(\pi/3)\right)}$$

Risposta a ingresso sinusoidale di sistema LTI reale

Sia $x(n) = A\cos(\omega n+\varphi)$ e h reale

Calcoliamo $y = h * x$.

Abbiamo (formule di Eulero)

$$x(n) = A\cdot\frac{e^{j(\omega n+\varphi)}+e^{-j(\omega n+\varphi)}}{2} = \frac{A}{2}e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega n} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{A}{2}e^{j\varphi}\cdot\hat{h}(\omega)e^{j\omega n} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}\hat{h}(-\omega)e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{A}{2}|\hat{h}(\omega)|\,e^{j(\omega n+\varphi+\angle\hat{h}(\omega))} + \frac{A}{2}|\hat{h}(\omega)|\,e^{-j\omega n-j\varphi+j\angle\hat{h}(-\omega)}$$

Se h è reale, $\hat{h}(-\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{j\omega k} = \overline{\hat{h}(\omega)}$

$$\Rightarrow |\hat{h}(-\omega)| = |\hat{h}(\omega)| \quad \text{e} \quad \angle\hat{h}(-\omega) = -\angle\hat{h}(\omega)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{A}{2}|\hat{h}(\omega)|\left(e^{j(\omega n+\varphi+\angle\hat{h}(\omega))} + e^{-j(\omega n+\varphi+\angle\hat{h}(\omega))}\right) = \boxed{A|\hat{h}(\omega)|\cos(\omega n+\varphi+\angle\hat{h}(\omega))}$$

Cioè $\quad A\cos(\omega n+\varphi) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow A\cdot|\hat{h}(\omega)|\cos(\omega n+\varphi+\angle\hat{h}(\omega))$

Ingresso sinusoide

- Uscita sinusoidale alla <u>stessa frequenza</u> (un LTI non <u>può</u> introdurre nuove frequenze)
- Ampiezza moltiplicata per $|\hat{h}(\omega)|$ ← chiamata <u>risposta in ampiezza</u>
- Sfasamento di $\angle\hat{h}(\omega)$ ← <u>risposta in fase</u>

Risposta in frequenza per sistemi LTI a t.c.

Sia $x(t)=e^{j\omega t}$ e sia L un generico LTI t.c. con risposta impulsiva h. Sia L stabile, quindi $h\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Calcoliamo $y=L[x]=h*x$

Si ha
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\underbrace{e^{j\omega t}}_{x(t)}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{\overset{\text{def.}}{=}\,H(\omega)}$$

Anche nel caso t.c., se l'ingresso è imm. puro, l'uscita è proporzionale all'ingresso. La costante (rispetto al tempo) di proporzionalità dipende da ω, è indicata con $H(\omega)$ ed è chiamata <u>risposta in frequenza</u>

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{j\omega t}}$$

la convergenza è assicurata se $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Quindi ① $x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = |H(\omega)|\, e^{j(\omega t + \angle H(\omega))}$

② $x(t) = A e^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow y(t) = H(\omega)\, x(t) = H(\omega) A e^{j(\omega t+\varphi)}$

(Più generale)

$$= |H(\omega)|\, e^{j\angle H(\omega)} \cdot A e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$= |H(\omega)| \cdot A \cdot e^{j(\omega t+\varphi+\angle H(\omega))}$$

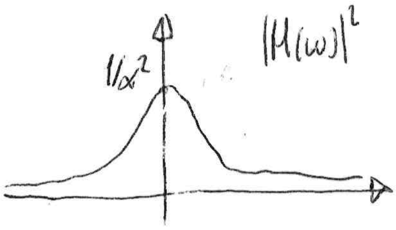
<u>Esempio</u> Se $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+_0$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

È un sistema <u>passa basso</u>

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$



Notiamo che, rispetto al caso t.d., la R.F. <u>non è</u> necessariamente periodica ma si estende su R.

Questo rispecchia il fatto che gli esp. imm. puri a t.c. hanno pulsazioni che può variare su tutto $\mathbb{R}$.

Risposta al segnale sinusoidale per LTI a t.c. reali

Sia L un LTI t.c. reale e stabile. Sia $H(\omega)$ la sua R.F.

Se in ingresso al sistema c'è una sinusoide in forma canonica:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita sarà $\quad y(t) = A \cdot |H(\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \angle H(\omega))$

<u>DIM.</u> Osservato che $\quad H(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{j\omega t} = \overline{H(\omega)}$ se h è reale,

la dim. è formalmente identica a quella del caso t.c.

$\Rightarrow$ Come nel caso t.d., anche nel caso t.c.:

Ampiezza moltiplicata per $|H(\omega)|$

Fase "spostata" di $\angle H(\omega)$

Esempio Sia $h(t) = e^{-t} u(t)$ la RI di un LTI t.c.

calcolare l'uscita per $x(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right)$

Si potrebbe calcolare $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$

Ma siccome il sistema è reale,

$$y(t) = \frac{1}{2}\,|H(\sqrt{3})|\,\cos\left(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3} + \angle H(\sqrt{3})\right)$$

Dove $H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ (vd esempio pag 36 con $\alpha = 1$)

Allora $H(\sqrt{3}) = \frac{1}{1+j\sqrt{3}} = \frac{1-j\sqrt{3}}{1+3} = \frac{1}{4}(1-j\sqrt{3})$

$$|H(\sqrt{3})| = \frac{1}{4}\cdot(1+3) = 1$$

$$\angle H(\sqrt{3}) = tg^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}\,t$$

Esempio Sia $y(t) = x(t-T)$ ritardo

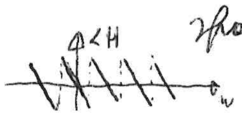
$$h(t) = \delta(t-T)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)\,e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega T}$$

$|H(\omega)| = 1$ ← "passa tutto": non modifica l'ampiezza

$\angle H(\omega) = -\omega T$ ← $2k\pi$ tale che $\angle H(\omega) \in (-\pi, \pi)$

sfasamento "lineare"



+ periodo $\frac{2\pi}{T}$

Transitorio e regime per sistemi BIBO stabili

Consideriamo un LTI t.c. stabile di RF $H(\omega)$

Sia un ingresso $x(t) = u(t) \cdot e^{j\omega t}$ (exp im. "che comincia a $t=0$")

Calcoliamo l'uscita

Osserviamo che $x(t) = 1 - u(-t)$ per cui $x(t) = e^{j\omega t} - u(-t) e^{j\omega t}$

Allora $y(t) = L[e^{j\omega t}] - L[u(-t) e^{j\omega t}]$

$$L[e^{j\omega t}] = H(\omega) e^{j\omega t} = x_{PER}(t)$$

$$L[u(t) e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} u(\tau - t) d\tau$$

$$= e^{j\omega t} \cdot \int_{t}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = y_{TR}(t)$$

$$y(t) = y_{PER}(t) + y_{TR}(t)$$

Abbiamo una componente periodica, $H(\omega) e^{j\omega t}$

e un "transitorio", il cui modulo tende a zero per $t \to \infty$

$$|y_{TR}(t)| = \left| e^{j\omega t} \int_{t}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right| \leq \int_{t}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

perché $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\Downarrow$

vedi dim. dietro

Regime periodico generale   Sia adesso $x_{PER} \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$ periodico di periodo T

Sia L sempre BIBO stabile con R.I. $h(t)$ e R.F. $\breve{H}(\omega)$

L'uscita corrispondente è $y_{PER} = h * x_{PER}$ (Vd. pg 28)

y_{PER} è anch'esso periodico di periodo T

Se il segnale comincia a $t=0$, cioè $x(t) = x_{PER}(t) \cdot u(t)$, calcoliamo l'uscita:

$$x(t) = x_{PER}(t) \qquad = x_{PER}(t) - u(-t)\, x_{PER}(t)$$

$R[u]$ gradino ribaltato

$$y(t) = h * x\,(t) = h * x_{PER}\,(t) - h * \left(x_{PER} \cdot R[u]\right)(t)$$

$$= y_{PER}(t) - y_{TR}(t)$$

Ora sappiamo che y_{PER} è periodico. Il "transitorio" è

$$y_{TR}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x_{PER}(t-\tau)\, u(\tau - t)\, dt = \int_{t}^{+\infty} h(\tau)\, x_{PER}(t-\tau)\, d\tau$$

Ora, $x_{PER} \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}) \iff \exists M_x : \forall t \in \mathbb{R} \quad |x_{PER}(t)| < M_x$

$$\Rightarrow |y_{TR}(t)| \leq \int_{t}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot M_x\, d\tau = M_x \int_{t}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau$$

Ora, dimostriamo che $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \displaystyle\int_{t}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$$\int_{t}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau - \int_{-\infty}^{t} |h(\tau)|\, d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} \|h\|_1 - \|h\|_1 = 0$$

Infatti $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \|h\|_1 < +\infty$

e $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} |h(\tau)|\, d\tau = \|h_1\|$