Proprietà della convoluzione a t.d.

1) Definizione

Dati due segnali a t.d., $v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ e $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$\forall n \in \mathbb{Z}$ si consideri la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} v(n-k) w(k)$

Se tale serie converge $\forall n \in \mathbb{Z}$, allora possiamo definire un nuovo segnale t.d., indicato con $v * w$ e detto convoluz di v e w. Per definizione

$$v * w : n \in \mathbb{Z} \to \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(n-k) w(k)$$

scriveremo anche, se $x = v * w$,

$$v * w\ (n) = x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(n-k) w(k)$$

← equazione che definisce il valore di x in n

o anche $x = v * w = \sum_{k} w(k) \, \mathcal{U}_k[v]$ ← equazione che definisce globalmente il segnale $x = v * w$

2) Regole di convergenza (Senza dim.)

$\forall p \in \{1, 2, \infty\}$

$$\ell^1 * \ell^p \to \ell^p$$
$$\ell^p * \ell^1 \to \ell^p$$
$$\ell^2 * \ell^2 \to \ell^\infty$$

È un modo sintetico per dire che, $\forall v \in \ell^1$ e $\forall w \in \ell^p$, con $p = 1, 2, o\ \infty$, la convoluzione tra v e w converge ad un segnale di ℓ^p

Analogamente, $\forall v \in \ell^2$ e $\forall w \in \ell^2$, la convoluzione tra v e w converge ad un segnale di ℓ^∞

3) Proprietà algebriche

3.1) Commutatività

Se $v * w$ converge allora $w * v = v * w$

DIM $\quad v * w(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(n-k)\, w(k)$ $\quad$ Siò che $\left[\begin{array}{l} m = n-k \\ k = n-m \end{array}\right]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, w(n-m) = w * v(n)$$

3.2) Associatività

Sotto condizione di convergenza per tutte le convoluzioni implicate,

$$v_1 * (v_2 * v_3) = (v_1 * v_2) * v_3$$

senza dim

3.3) Linearità (o proprietà distributiva)

Se $v * w_1$ e $v * w_2$ convergono, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha che

$v * (\alpha w_1 + \beta w_2)$ converge a $\alpha (v * w_1) + \beta (v * w_2)$

senza dim., ma è una conseguenza della linearità della somma

3.4) Elemento neutro

Qualunque sia il segnale t.d. v, (quindi anche non limitato)

$\delta * v = v$ $\quad$ come visto negli esercizi.

Per la 3.1, anche $v * \delta = v$

3.5) convoluzione per la delta ritardata

$$v(n) * \delta(n-m) = v(n-m)$$ (notazione "intuitiva")

$$v * U_m[\delta] = U_m[v]$$ (notazione rigorosa)

<u>DIM</u> Se $w(n) = \delta(n-m)$ abbiamo

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)\,\delta(n-m-k)$$

l'unico elemento della somma che non sia nullo è quello per il quale l'argomento di δ è zero:

$$n-m-k=0 \iff k=n-m \Rightarrow x(n)=v(n-m) \quad \text{c.v.d.}$$

3.6) Traslazioni

$$v(n-m) * w(n) = v(n) * w(n-m) = (v*w)(n-m)$$ [Notazione intuitiva]

$$U_m[v] * w = v * U_m[w] = U_m[v*w]$$

DIM. $$U_m[v] * w = \underset{\uparrow \text{per } 3.5}{(v * U_m[\delta])} * w = \underset{\uparrow \text{per } 3.2}{v * (U_m[\delta] * w)} = v * U_m[w]$$

$$= \underset{\uparrow \text{per } 3.1}{(U_m * v) * w} = \underset{\uparrow \text{per } 3.2}{U_m * (v * w)} \quad \text{c.v.d.}$$

3.7 Supporto

Se il supporto di v è $\{0, 1, \dots N-1\}$ (cioè "v è lungo N")

e il supporto di w è $\{0, 1, \dots M-1\}$ (cioè "w è lungo M")

allora il supporto di x è $\{0, 1, \; N+M-2\}$ (cioè la conv. è "lunga $N+M-1$")

<u>DIM.</u> $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)\, w(n-k)$

Ora, per i limiti nel supporto di v, possiamo riscrivere

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k)\, w(n-k)$$

quindi considero $v(k) \cdot w(n-k)$; $\forall k$ tra 0 e $N-1$ abbiamo

1) $\forall n<0$, $n-k<0$ quindi $w(n-k)=0$ per il supporto di w

cioè; $\forall n<0$, $x(n)=0$

2) $\forall n > N+M-2$ $\quad n-k > N+M-2 - \underbrace{(N-1)}_{\text{perché } k \text{ è al più } N-1} = M-1$

quindi, ancora $w(n-k)=0$ e allora $x(n)=0$

C.V.D.

<u>NoTa</u> Usando la 3.7 e la 3.6, la regola seguente:

« Se v è "lungo" N e w è "lungo" M, $v * w$ è "lungo" $N+M-1$ »

vale indipendentemente dalla posizione del supporto

<u>Esempio</u> Se v è non nullo tra -5 e 5 (supporto $N=11$) e

w è non nullo tra 10 e 12 (supporto $M=3$), allora $v * w$ ha supporto su 13 punti (al più)

3.8 Differenza prima

Sia $D[u](n) = u(n) - u(n-1)$

Allora $D[u * w] = D[u] * w = u * D[w]$

DIM

Basta osservare che $D[u] = u * (\delta(n) - \delta(n-1))$

cioè, più rigorosamente $D[u] = u * (\delta - U_1[\delta])$

Poi basta applicare linearità e associatività della convoluzione

Applicazione agli LTI

$x \to \boxed{h} \to y$ $\boxed{y = h * x}$

Le proprietà degli LTI sono legate a quelle della convoluzione

1) LTI è statico $\Leftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{C}: \quad h(n) = A\,\delta(n)$

DIM: $y(n) = \sum_k h(k)\,x(n-k)$

DIM $\Leftarrow$ Se $h(n) = A\,\delta(n)$ allora $y(n) = A\,x(n)$

DIM $\Rightarrow$ Per assurdo Se $h(m) \neq 0$ per $m \neq 0$, allora $y(n)$ dipende (anche) da $x(n-m)$ e il sist. non sarebbe statico

2) LTI causali: Il sistema $y = L[x] = h * x$ è causale se e solo se h ha supporto solo negli interi non negativi

DIM. Se il sistema è causale, $y(n) = \dots h(-3)\,x(n+3) + h(-2)\,x(n+2) + h(-1)\,x(n+1) + h(0)\,x(n) + h(1)\,x(n-1) + \dots$

I termini $h(-m)\,x(n+m)$ devono essere nulli $\Rightarrow$ h ha supporto negli interi positivi

Analogamente, se h ha supporto negli interi positivi è evidente che $y(n)$ non dipende da $x(n+1)$, $x(n+2)$ ecc.

3) Stabilità   Dalla proprietà di convergenza (non dimostrata):

$$x \in \ell^{\infty} \text{ e } h \in \ell^{1} \Rightarrow y = x * h \in \ell^{1}$$

quindi se h è assolutamente sommabile, il sistema è stabile

4) Sistemi reali $\forall x$ reale, $y = h * x$ è reale $\Leftrightarrow$ h è reale

5) Commutatività dei sistemi: $y = h_2 * (h_1 * x) = h_1 * (h_2 * x)$

6) Invertibilità dei sistemi.

Se $h_2 * h_1 = \delta$, allora il sistema di risposta impulsiva h_2 è "l'inverso" del sistema di r.i. h_1

$$x \longrightarrow \boxed{h_1} \xrightarrow{\;y\;} \boxed{h_2} \longrightarrow x$$

infatti

$$h_2 * y = h_2 * (h_1 * x) = (h_1 * h_2) * x =$$

$$= \delta * x = x$$

Esempio U_m è l'inverso di U_{-m}

Infatti $U_m[\delta] * U_{-m}[\delta] = U_0[\delta] = \delta$

Esempio   il sistema $y(n) = x(n) - \frac{1}{2} x(n)$

è invertito da $z(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k y(n-k)$

DIM $y(n) = x * (\delta - \frac{1}{2} U_1(\delta)) \Leftrightarrow h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)\, y(n-k) = w * y \quad \text{dove } w(n) = u(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ma noi sappiamo che $w * h = \delta$ (vedere eserc. 2 pag 14) $\boxed{27}$

Esercizi

Per i seguenti sistemi, determinare se sono LTI, qual è la RI, se sono causali e se sono stabili

1) $y(n) = M_{(n-N,\, n+N)}[x]$ (media mobile)

$$y(n) = \frac{1}{2N+1}\left[x(n+N) + x(n+N-1) + \dots + x(n+1) + x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-N)\right]$$

è una comb. lineare di elementi di $x(n)$ con coefficienti che non variano nel tempo: è una convoluzione $\Rightarrow$ il sist. è un LTI

In effetti, se $h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{se } |n| \leq N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

applicando la definizione di convoluzione si trova

$y = h * x$

- h ha supporto su numeri negativi e positivi $\Rightarrow$ il sistema è non causale
- h è assolutamente sommabile: $\sum_k |h(k)| = 1$ $\Rightarrow$ il sistema è BIBO-stabile

2) $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$

Osserviamo ancora una comb. lineare con coeff. costanti.
Il sistema è LTI.

La R.I. si trova guardando i coeff. dell'ingresso:

$h(0) = 1 \qquad h(1) = -\frac{1}{2} \qquad h(2) = \frac{1}{3}$ Tutti gli altri $h(n)$ sono nulli.

- Il sistema è causale (h ha supporto su $\mathbb{N}$)
- Il sistema è stabile

3) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ usiamo il trucco della funzione indicatrice: $k \leq n$ è indicato da $u(n-k)$

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n-k)\, x(k)$

cioè $y = u * x \Rightarrow h = u$

È un LTI causale ma non stabile: $u \notin l^1$

4) $y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k) = h * x\,(n$

con $h(n) = u(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ LTI causale

Inoltre $\|h\|_1 = \sum_n |h(n)| = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow$ stabile

Convoluzione tempo continuo

Per lo studio dei sistemi LTI a t.c. dobbiamo introdurre la convoluzione T

Siano v, w segnali t.c. la loro convoluzione $v * w$ è definita in $t \in \mathbb{R}$ come:

$$v * w\,(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) w(t-\tau)\, d\tau$$ a condizione che l'integrale converga

__Teorema di convergenza 1__ Se $v, w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $v * w$ converge su $\mathbb{R}$ "quasi ovunque" (cioè eccetto un insieme di punti di misura nulla)

Inoltre, $v * w \in \mathcal{L}^1$

__Teorema di convergenza 2__ Se $v, w \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, allora $v * w$ converge per ogni $t \in \mathbb{R}$

__Esempi di calcolo__

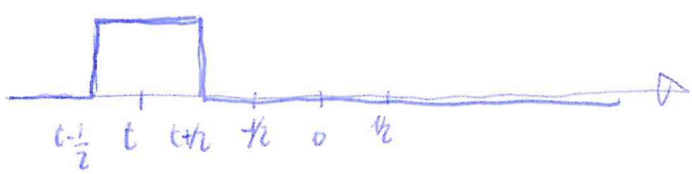
Sia $v = w = \text{rect}$. Calcolare $x = v * w$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(\tau)\, \text{rect}(t-\tau)\, d\tau =$$ il primo rect è non nullo se $\tau \in (-1/2, 1/2)$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t-\tau)\, d\tau$$ ora usiamo la parità della funzione rect

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(\tau - t)\, d\tau$$

Tracciamo l'integrando (funzione di τ)

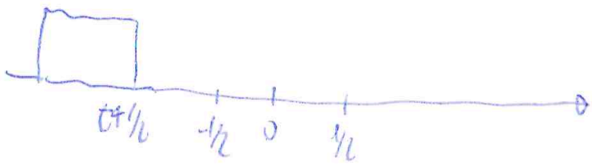


Vediamo quando l'integrando ha supporto sovrapposto a $(-1/2, 1/2)$

Il supporto dell'integrando è $(t-1/2, t+1/2)$

Caso 1: $t+1/2 < -1/2$

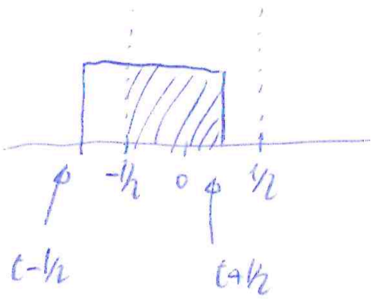
$\Leftrightarrow t<-1$



In tal caso l'integrale è nullo

Caso 2 $-\frac{1}{2} < t+1/2 < \frac{1}{2}$

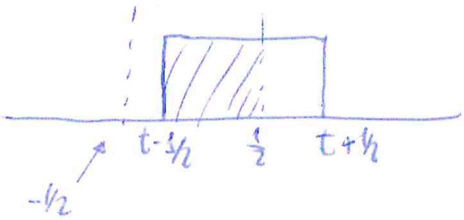
$\Leftrightarrow -1<t<0$



Allora l'integrale è $\displaystyle\int_{-1/2}^{t+1/2} dt = t+1$

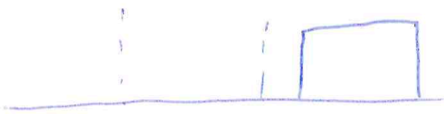
Caso 3 $-\frac{1}{2} < t-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0<t<1$



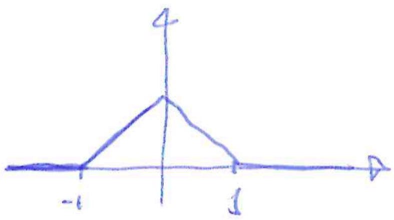
L'integrale è $\displaystyle\int_{t-1/2}^{1/2} dt = 1-t$

Caso 4 $t-1/2 > 1/2$



l'integrale è zero

quindi $\quad rect * rect\,(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<-1 \\ 1+t & \text{se } -1<t<0 \\ 1-t & \text{se } 0<t<1 \\ 0 & \text{se } t>1 \end{cases}$



$= \Lambda(t)$

Caratterizzazione dei LTI t.c.

Anche nel caso t.d. introduciamo la risposta impulsiva: dato il sistema L, la risposta impulsiva è $h = L[\delta]$ dove δ è la δ di Dirac

Esempi

1) $y(t) = x(t-T) \Rightarrow h(t) = \delta(t-T)$

2) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$

(vedere prop. delle

Caratterizzazione degli LTI con la R.I.

Dato un LTI con R.I. h, l'uscita corrispondente all'ingresso x è $y = h * x$, ammesso che la convoluzione converga.

Non daremo una dimostrazione, ma solo un'argomentazione intuitiva

Partiamo dalla rappresentazione integrale dei segnali:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, U_\tau[\delta](t)\, d\tau$$

Allora abbiamo

$$y(t) = L[x](t) = L\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, U_\tau[\delta](t)\, d\tau$$

$$(*) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, L \circ U_\tau[\delta](t)\, d\tau = \qquad \text{(per linearità del sistema}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, U_\tau \circ L[\delta](t)\, d\tau \qquad \text{(per tempo-invarianza)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, U_\tau[h(t)]\, d\tau \qquad \text{(per definizione di } h)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x * h(t)$$

Si noti che il passaggio (*) andrebbe giustificato rigorosamente, ma ci accontentiamo di dire che in tutti i casi pratici e d'interesse possiamo assumere che $y = h * x$

Proprietà della convoluzione t.c.

Sono simili alle proprietà della conv. t.d.:

1) Commutatività. Sotto ipotesi di convergenza, $v * w = w * v$

2) Associatività. " " " , $(v_1 * v_2) * v_3 = v_1 * (v_2 * v_3)$

3) Distributività " " " , $v * (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v * w_1) + \beta(v * w_2)$

4) Unità Riprendiamo la rappresentazione integrale dei segnali:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad \text{cioè} \quad x = x * \delta$$

5) Ritardo come convoluzione

Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e ~~sia~~ $y(t) = \mathcal{U}_\beta(x)(t) = x(t-\beta)$

Calcoliamo la convoluzione tra $\mathcal{U}_\beta[\delta]$ e x:

$\tau - \beta = s$

$\tau = s + \beta$

$$\mathcal{U}_\beta[\delta] * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-\beta)\,x(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x(t-\beta-s)\,ds = x(t-\beta) = \mathcal{U}_\beta[x](t)$$

cioè $\boxed{\mathcal{U}_\beta[x] = x * \mathcal{U}_\beta[\delta]}$

6) Traslazioni Temporali: $\mathcal{U}_\beta[v] * w = v * \mathcal{U}_\beta[w] = \mathcal{U}_\beta[v * w]$

DIM. Formalmente identico al caso t.d.

7) Supporto

Se $v(t) = 0 \quad \forall t < t_v \quad e \quad \forall t > T_v$

e $w(t) = 0 \quad \forall t < t_w \quad e \quad \forall t > T_w$

allora $v * w(t) = 0 \quad \forall t < t_v + t_w \quad e \quad \forall t > T_v + T_w$

SENZA DIM.

8) Derivata $\quad (v * w)' = v' * w = v * w'$

Senza DIM.

Esercizio

Sia $v(t) = e^{-at} u(t)$ con $a > 0$

e $w(t) = u(t)$

Calcolare $x = v * w$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) w(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-a\tau} u(t-\tau) d\tau$$

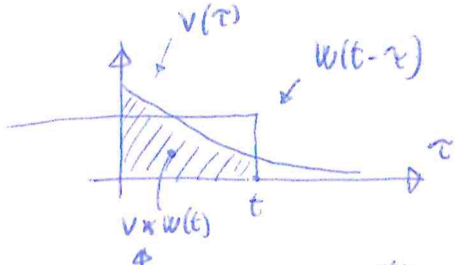
$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-a\tau} u(t-\tau) d\tau$$

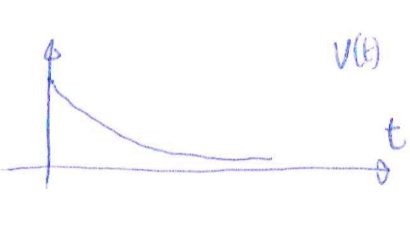
Se $t < 0$, $u(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > 0$, quindi $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$

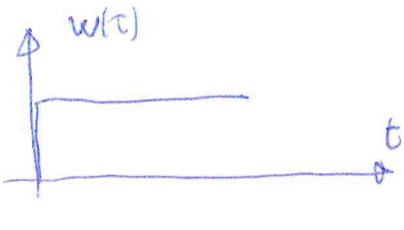
Se $t > 0$, $u(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > t$, quindi

$$t > 0 \Rightarrow x(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \left[-\frac{e^{-a\tau}}{a} \right]_0^t = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

In conclusione $x(t) = u(t) \dfrac{1 - e^{-at}}{a}$







Proprietà degli LTI (t.c. e t.d) e risposta impulsiva

1) Un LTI è statico $\Leftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{C}: \quad h = A\delta$

DIM. $\Rightarrow$ $y = h * x$. Applicando la def. di convoluzione, è immediato constatare che se h è $\neq 0$ altrove che in zero, y dipende anche dal passato / dal futuro.
Si mostra allora che h deve essere un impulso: questo è esatto in t.d., un po' meno in t.c.

DIM. $\Leftarrow$ $y = A\delta * x = Ax$ il sistema è istantaneo

2) LTI causale $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} h(n) = 0 & \forall n < 0 \\ h(t) = 0 & \forall t < 0 \end{cases}$

DIM. $\Rightarrow$ $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

se h fosse $\neq$ per un $t_0 < 0$, $y(t)$ dipenderebbe da $x(t+t_0)$ (futuro)

DIM $\Leftarrow$ $h(t) = h(t) \cdot u(t) \Rightarrow y(t) = \int_0^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$

quindi y dipende da $x(t-\tau)$ con $\tau > 0$, cioè dal passato

Nel caso t.d. le dim. sono simili (anche più semplici)

3) LTI reale $\Leftrightarrow$ h reale

LTI reale significa che, $\forall x \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = h * x$ è anche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

DIM Banale

4) Stabilità BIBO

Condizione necessaria e sufficiente è che $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ [$h \in \ell^1$ nel caso t.d.]

Deriva dai criteri di convergenza della convoluzione

5) cascata di LTI

Due LTI in cascata commutano

$$x \rightarrow \boxed{h_1} \xrightarrow{y} \boxed{h_2} \xrightarrow{z} \qquad\qquad x \rightarrow \boxed{h_2} \xrightarrow{v} \boxed{h_1} \xrightarrow{w}$$

Infatti $w = h_1 * (h_2 * x) = h_1 * (x * h_2) = (h_1 * x) * h_2$

$= h_2 * (h_1 * x) = z$

6) LTI in regime periodico

L'uscita di un LTI in regime periodico (cioè con ingresso periodico) è anch'essa periodica con lo stesso periodo

DIM (caso t.c.)

Sia T il periodo di x e sia $\hat{x}$ così definito:

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{x}(t) = x(t)\,\mathrm{rect}(t/T)$

cioè $\hat{x}(t)$ coincide con $x(t)$ all'interno di $(-T/2, T/2)$ (un periodo) mentre altrove è zero. Allora si ha

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}(t - kT) \qquad \text{[replica periodica]}$$

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{kT}[\hat{x}]$$

Sia ora $\hat{y} = L[\hat{x}]$ (il supporto di $\hat{y}$ potrebbe essere più grande di quello di $\hat{x}$),

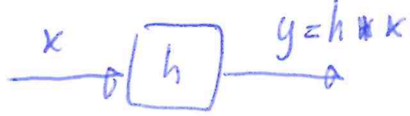
Abbiamo $y = L[x] = L\left[\sum_k U_{kT}[\hat{x}]\right] \underset{\text{linearità}}{=} \sum_k L\, U_{kT}[\hat{x}] \underset{\text{T.I.}}{=} \sum U_{kT} L[\hat{x}]$

$= \sum U_{kT}[\hat{y}]$

è replica periodica di periodo T di $\hat{y}$ c.v.d.

6) Inversione di un LTI

Supponiamo che un segnale di interesse sia osservabile solo dopo l'uscita di un LTI



I segnali possono essere t.c. o t.d.
Ci interessa x ma possiamo osservare solo y. Ad esempio perché il sistema di acquisizione è modellabile con un LTI

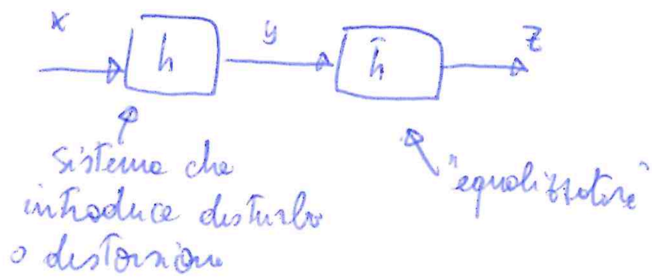
Domanda: è possibile ricavare x da y?

Questo sarebbe equivalente a cercare il sistema inverso di h.

Un sistema con R.I. $\tilde{h}$ tale che $\tilde{h} * h = \delta$

Infatti in tal caso

$$z = \tilde{h} * (h * x) = (\tilde{h} * h) * x =$$
$$= \delta * x = x$$



1) Quand'è che è possibile invertire un sistema?
2) Se è possibile, come si fa?

La trasformata di Fourier permette di dare una risposta molto semplice a queste domande. Per ora, ci limitiamo ad esempi

<u>Esempio 1</u> (t.d.) $\quad h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) \quad \Rightarrow \quad y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

Posto $\tilde{h}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, in un esercizio precedente abbiamo mostrato che $\tilde{h} * h = \delta$ quindi $\tilde{h} * y = \tilde{h} * h * x = x$

Allora per recuperare x si ha $\quad x(n) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k y(n-k)$

Invertire il sistema costa infinite operazioni. La Trasf. Z ci mostrerò come sopperire

Esempio 2 (t.c. e t.d.)

Il sistema inverso di un ritardo è un anticipo:

Se $h = \mathcal{U}_\beta[\delta]$ e $\bar{h} = \mathcal{U}_{-\beta}[\delta]$

$h(t) = \delta(t-\beta)$ $\quad\quad$ $\bar{h}(t) = \delta(t+\beta)$

Si ha $\bar{h} * (h * x) = \mathcal{U}_{-\beta}[\mathcal{U}_\beta[x]] = x$

Risposta in frequenza per un LTI t.d

Oltre alla risposta impulsiva, ci sono altri tipi di risposte interessanti, tra tutte, la risposta in frequenza

Consideriamo un sistema LTI stabile con R.I. h

Sia in ingresso il segnale esponenziale immaginario puro: $x(n) = e^{j\omega n}$

L'uscita corrispondente è proporzionale a x : $L[x] = C \cdot x$

Infatti

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{j\omega n} e^{-j\omega k}$$

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\omega k}\right] \cdot e^{j\omega n} = \hat{h}(\omega) \cdot x(n)$$

Il segnale d'uscita è uguale a quello d'ingresso ma con una moltiplicazione per una costante (rispetto a n) indicata con $\hat{h}(\omega)$:

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\omega k}$$

Tale funzione, la cui convergenza è assicurata se $h \in \ell^1$ è periodica in ω con periodo 2π